

ОПИС КОМПОНЕНТІВ ВІДБИВАЛЬНИХ СИСТЕМ З КЛАСИЧНИМИ КРИВИМИ У ЯКОСТІ ВІДБИВАЧІВ

ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (м. Ужгород)

Розглянуто опис і побудову компонентів відбивальних систем, коли профілем відбивача є одна з класичних кривих (Діоклеса цисоїда, Дінострата квадратриса, локон Аньези, строфоїда, тощо).

Постановка проблеми. Відбивальні системи знаходять широке застосування в архітектурній акустиці, геліотехніці, теплових обігрівачів [1 - 3]. Для геометричного розрахунку на координатній площині Oxy відбивальної системи, яка складається з кривої L та джерела променів у точці $S(x_s, y_s)$, необхідно мати рівняння її ортотоміки, подери та катакаустики. Зазначені криві мають назву компонентів відбивальних систем і використовуються при їх конструюванні. З цих позицій ще не дослідженими виявилися відбивальні системи, коли в якості відбивача використовується одна з класичних кривих (наприклад, Діоклеса цисоїда, Дінострата квадратриса, локон Аньези, строфоїда, кубіка Чирнгаузена, трактриса, тощо). Ці криві мають специфічні властивості, які доцільно доповнити і оптико-геометричними властивостями.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1-3] розглядаються графічні методи дослідження відбивальних систем. Але графічні методи важко формалізувати, внаслідок чого їх не варто класти в основу алгоритмів комп'ютерного синтезу відбивальних систем. В роботі [4] наведено опис катакаустики - як елемента відбивальної системи - у випадку, коли крива визначена у явному вигляді $y = f(x)$. Але такий опис кривої не завжди є зручним, наприклад, ним не можливо описати криву, яка має форму „петлі”. Тому для розширення класу кривих, які можливі у якості відбивачів, у роботі [5, 6] було виконано дослідження для кривих, заданих параметрично. Дана робота присвячена всебічній перевірці одержаних описів на прикладі класичних кривих.

Постановка завдання. Знайти опис і графічний вигляд компонентів відбивальних систем, коли в якості відбивача використовується одна з класичних кривих (Діоклеса цисоїда, Дінострата квадратриса, локон Аньези, строфоїда, тощо).

Основна частина. Відбивальна система $\{S, f\}$ на площині Oxy визначається двома головними елементами - точкою $S(x_s, y_s)$ як джерелом променів та гладкою і опуклою від точки S відбивальною кривою $y = f(x)$. Однак, для розрахунку системи $\{S, f\}$ ще необхідно мати і їй відповідні описи та зображення ортотоміки, подери і катакаустики [4].

Визначимо точки $S'(x_s', y_s')$, $P(x_p, y_p)$ і $C(x_c, y_c)$ (рис.1) в залежності від положення точки $A(x_a, y_a)$ падіння на відбивальну криву окремого

променя за умови, що точки S' , P і C розташовані, відповідно, на ортотоміці 2, подері 3 та катакаустиці 4 обраної кривої 1.

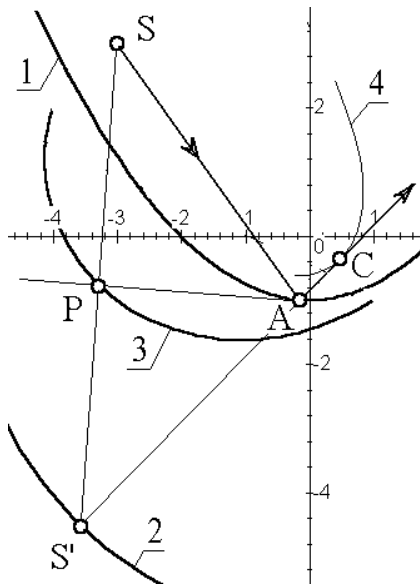


Рис.1. Елементи відбивальної системи

Нехай координати точки A на кривій задано у вигляді $x_A = t$; $y_A = f(t)$, де t - параметр. Маємо рівняння дотичної до кривої в точці A :

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) .$$

(1)

Відбитий у точці A промінь побудуємо за допомогою точки S' , розташованої на ортотоміці кривої - тобто розташованій симетрично точці S відносно дотичної (1). В цьому випадку відбитий у точці A промінь буде збігатися з прямою $S'A$.

Точки $S(x_s, y_s)$ і $S'(x_{s'}, y_{s'})$ розташовані симетрично відносно прямої (1) тоді, коли будуть виконуватися співвідношення

$$x_{s'} = 2t - x_s + 2k ; \quad (2)$$

$$y_{s'} = 2f(t) - y_s + 2f'(t)k ,$$

$$\text{де } k = \frac{x_s - t + f'(t)(y_s - f(t))}{1 + (f'(t))^2} .$$

Знаходимо координати точки $S'(x_{s'}, y_{s'})$. Побудована за цим законом множина точок S' в залежності від параметра t утворить ортотоміку відбивальної системи $\{f, S\}$, опис якої має вигляд (2).

Рівняння відбитого променя $S'A$

$$(f(t) - y'_s)(x - x'_s) - (y - y'_s)(t - x'_s) = 0 \quad (3)$$

та рівняння прямої SS'

$$(y_s - y'_s)(x - x'_s) - (y - y'_s)(x_s - x'_s) = 0 . \quad (4)$$

Точка P на подері визначається в результаті перетину дотичної і прямої SS' . Тобто координати точки P обчислюються в результаті розв'язання відносно x і y системи рівнянь (1) і (4).

Катакаустикою називається обвідна сім'ї відбитих променів [3, 4]. Тобто для визначення координат точки C , що належить катакаустиці, необхідно [5] розв'язати відносно x і y систему рівнянь

$$(f(t) - y'_s)(x - x'_s) - (y - y'_s)(t - x'_s) = 0 ; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (f(t) - y'_s)(x - x'_s) - (y - y'_s)(t - x'_s) \right\} = 0.$$

Наведені співвідношення покладено в основу складеної мовою Maple програми зображення елементів відбивальної системи.

В якості прикладів відбивальних кривих було обрано: напівкубічну параболу $x = at^3$; $y = t^2$ (рис. 1), локон Аньезі $y = -\frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (рис. 2),

Дінострата квадратриса $y = t \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ (рис. 3), крива Гауса

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h e^{-h^2 x^2} \text{ (рис. 4), Діоклеса цисоїда } y = 2a \sin^2 t; \quad x = 2a \frac{\sin^3 t}{\cos t}$$

(рис. 5), строфоїда $x = at \frac{t^2 - 1}{1 + t^2}$ $y = 2a \frac{t^2}{1 + t^2}$ (рис. 6).

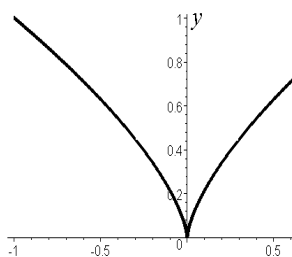


Рис. 1.

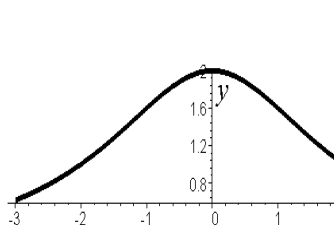


Рис.2.

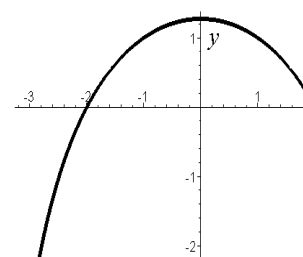


Рис. 3.

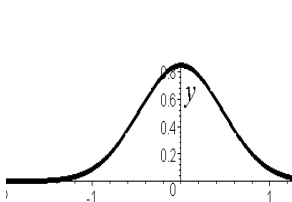


Рис. 4.

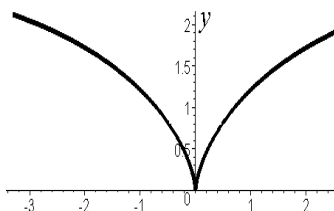


Рис. 5.

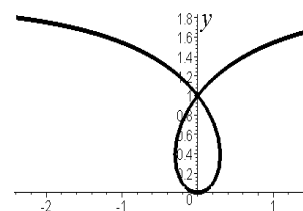


Рис. 6.

Наведемо компоненти відбивальної системи залежно від положення точки джерела променів для: напівкубічної параболі (рис. 7); локона Аньезі (рис. 8); Дінострата квадратриси (рис. 9); кривої Гауса (рис. 10); Діоклеса цисоїди (рис. 11); строфоїди (рис. 12). При чому, парні рисунки відрізняються розташуванням джерела променів (вище або нижче кривої).

Для зручності сприйняття графічної інформації на рисунках відбивальну криву позначено цифрою 1, ортотоміку – цифрою 2, подеру – цифрою 3 і катакаустіку цифрою 4. Крім того, ці лінії виділені за їх типами. Слід пам'ятати, що катакаустіки на рисунках зображують разом зі своїми асимптотами.

На практиці при реальному конструюванні відбивача доцільно використовувати анімаційні зображення компонентів відбивальних систем залежно від початкових параметрів відбивача, а також від напрямку руху точки джерела променів.

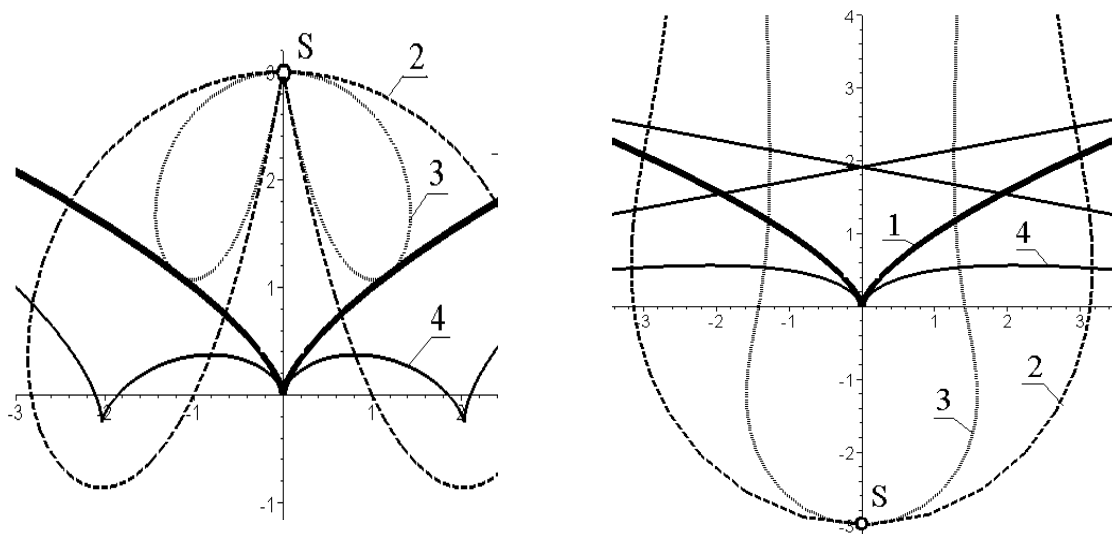


Рис. 7. Компоненти відбивальної системи для напівкубічної параболи

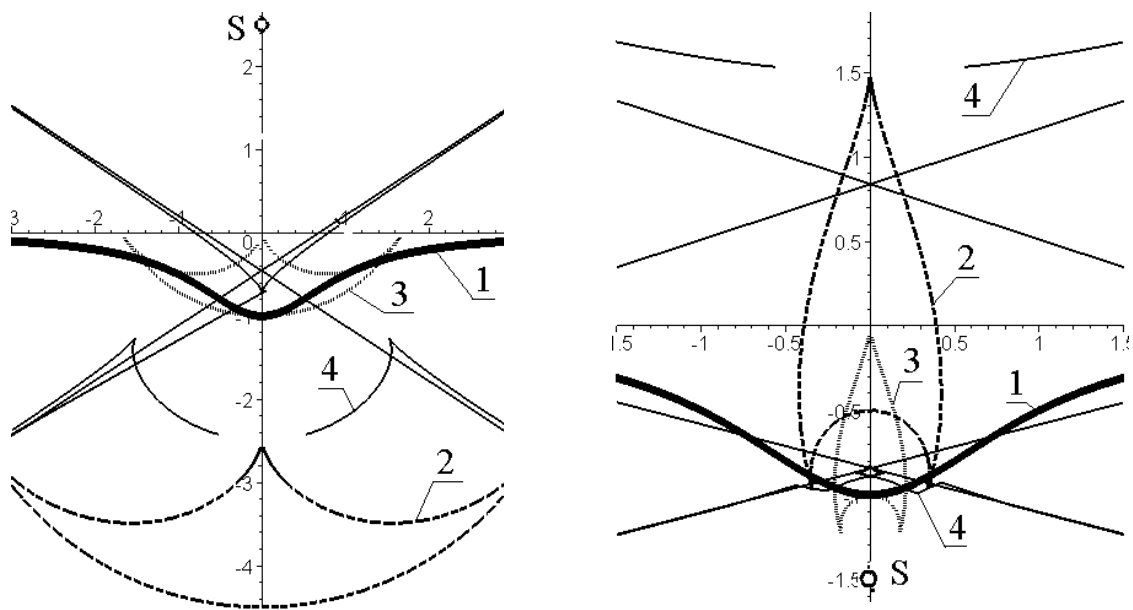


Рис. 8. Компоненти відбивальної системи для локона Аньезі

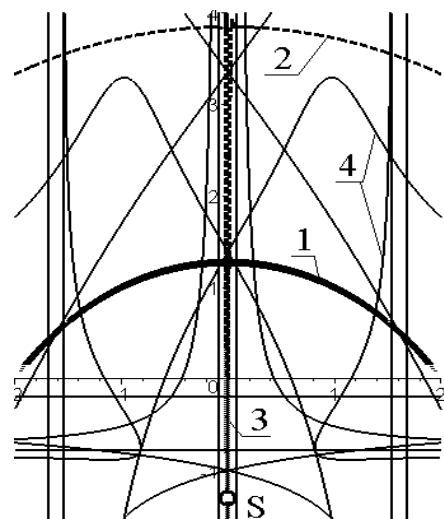
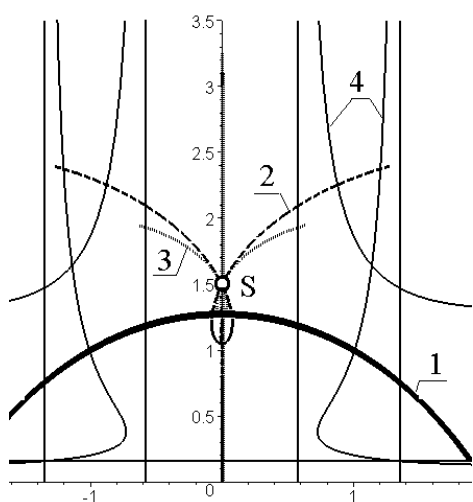


Рис. 9. Компоненти відбивальної системи для Дінострата квадратриси

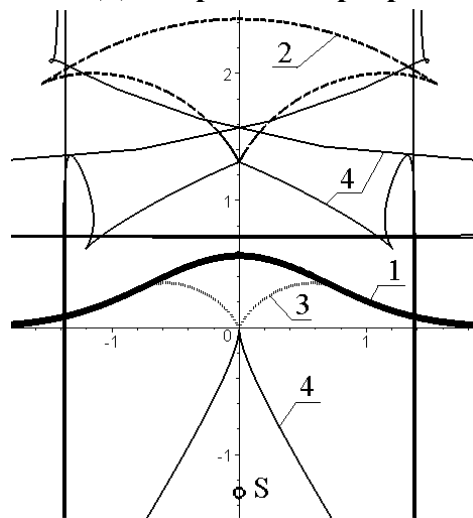
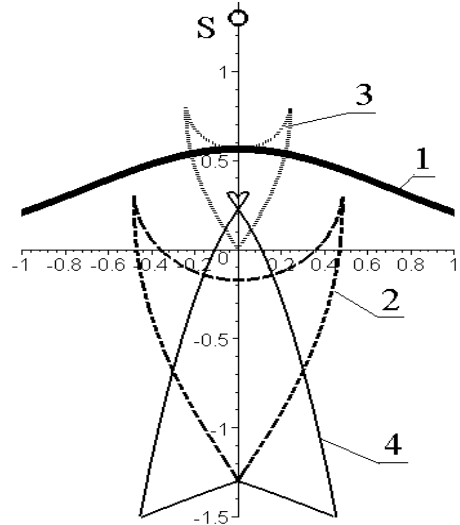


Рис. 10. Компоненти відбивальної системи для кривої Гауса

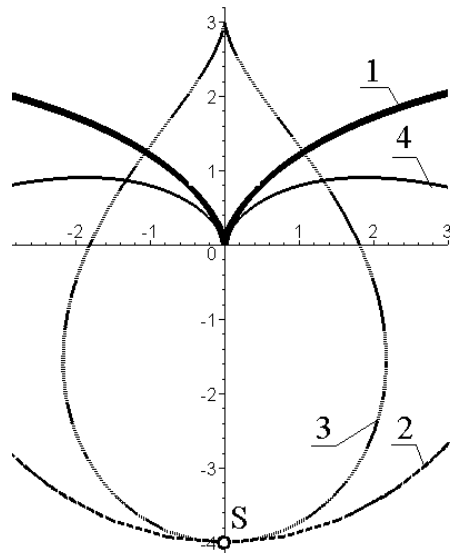
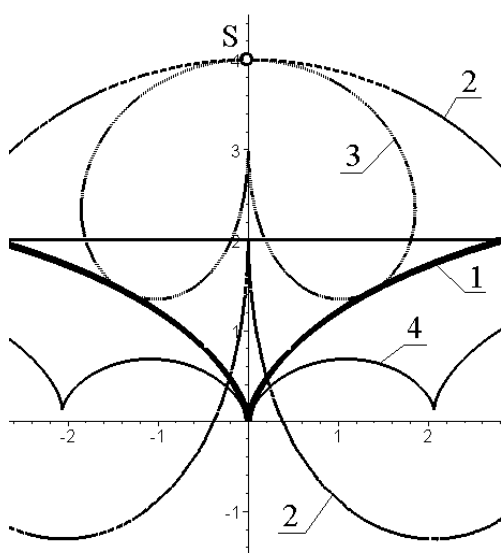


Рис. 11. Компоненти відбивальної системи для Діоклеса цисоїди

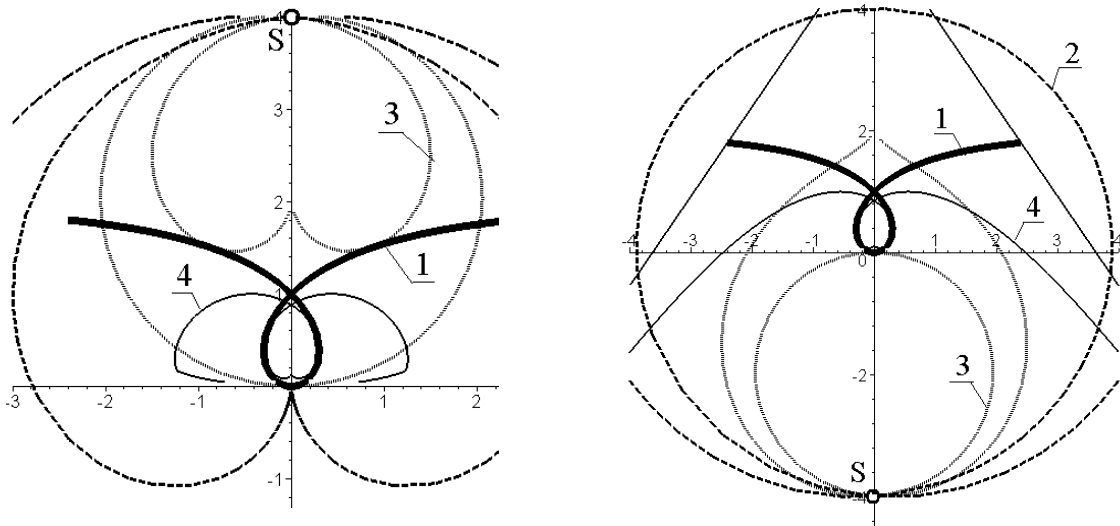


Рис. 12. Компоненти відбивальної системи для строфоїди

Висновок. При конструюванні реальних конструкцій відбивачів певну допомогу може зробити унаочнення компонентів відбивальних систем для класичних кривих як відбивачів.

Література

1. Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л. Формообразование оболочек в артектуре.-Киев:Будівельник,1972.-206с
2. Дворецкий А.Т. К вопросу формообразования ортотоміки с использованием подэрного преобразования. - В Сб. трудов IV Международной н/п конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». Мелитополь: ТГАТА, 1997. - с.28 -30
3. Мазуренко Е.Д. Геометрическое моделирование катакаустик и карстовых областей на плоскости.- Харьков: ХГПУ, 1996.- 12 с.
4. Підгорний О.Л., Куценко Л.М. Опис подери, ортотоміки і катакаустики як елементів відбивальної системи // Труды / Таврическая государственная агротехнологическая академия. - вып. 4, том 10. - Мелитополь: ТГАТА, 1999 - С. 14 - 18
5. Куценко Л.Н. О катакаустиках кривых, заданных параметрически // Вісник Запорізького державного університету, № 1, 2002, с. 57-61.
6. Куценко Л.М. Опис подери, ортотоміки і катакаустики для кривої, заданої параметрично // Труды / Таврическая гос. Агротехн. академия.- вып. 4, том 16. – Мелитополь: ТГАТА, 2002 - С. 10 - 14.

ОПИСАНИЕ КОМПОНЕНТОВ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КЛАССИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ В КАЧЕСТВЕ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

С.В. Тютюнников

Рассмотрено описание и построение компонентов отра-жательных систем, когда профилем отражателя является одна из классических кривых (Диоклеса цисоида, Динострата квадратриса, локон Аньези, строфоида, и т.п.).

DESCRIPTION OF COMPONENTS OF REFLECTIVE SYSTEMS WITH CLASSICAL CURVES AS REFLECTORS

S. Tutunnikov

The description and creation of components of reflective systems when a profile of a reflector is one of classical curves (Diokles a cissoid, Dinostrata a quadratrix, Agnesi's ringlet, strofoida, etc.) is considered.