DOI: 10.32347/2076-815x.2020.74.341-359
УДК 539.3

д.т.н., професор **Чибіряков В.К.**,
chybiriakov.vk2@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-8839-7262,
к.т.н., доцент **Станкевич А.М.**,
к.т.н., доцент **Кошевий О.П**.,
380939339872@yandex.ua, ORCID: 0000-0002-7796-0443,
к.т.н., доцент, **Левківський Д.В.**,
dmitriylev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2964-1605,
Краснеєва А.О., krasnieieva.ao@ knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-8058-1823,
Пошивач Д.В., dposhyvach@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8273-0298,
Чубарев А.Г., antoncubarev9@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6620-639X,
Шорін О.А., shoringm@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3250-2537,
Янсонс М.О., ya_mari@bigmir.net, ORCID: 0000-0002-6174-0403,
Сович Ю.В., yuliiasov@bigmir.net, ORCID: 0000-0002-5114-6363,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ.

Важливим етапом сучасних комбінованих методів є застосування чисельних методів до розв'язання редукованих задач. Саме це було недоліком класичного методу прямих. Чисельний метод використовувався для зниження вимірності (редукції) вихідних рівнянь, у результаті чого редуковані рівняння мали складний вигляд. Це заважало застосуванню сучасних чисельних методів для їх розв'язання. Зниження вимірності вихідних граничних та початково-граничних задач для рівнянь теорії пружності та термопружності за допомогою проекційного методу [1] зберігає форму класичних граничних та початково-граничних задач математичної фізики і потребує незначну адаптацію до сучасних чисельних методів [2-6]. Саме цим питанням присвячена дана робота. Застосування модифікованого методу прямих може бути поширено на статичні задачі теорії пружності та стаціонарні задачі теплопровідності [7], на задачі усталених коливань пружних конструкцій, на задачі знаходження динамічних характеристик (частот і форм власних коливань), задач нестаціонарної теплопровідності [7] та нестаціонарних коливань пружних об'єктів. Розглянемо питання адаптації сучасних чисельних методів на розв'язання відповідних редукованих задач. При цьому важливо в якій формі необхідно подавати редуковані рівняння в залежності від їх структури та особливості відповідного чисельного методу.

Ключові слова: напружено-деформований стан; динаміка; термопружність; проекційний метод; модифвкований метод прямих

Дана стаття є продовженням статті [16], опублікованої в №70 цього збірника.

1. Для граничних задач, що описують статику пружного тіла та стаціонарну теплопровідність твердого тіла, редуковані рівняння зводяться до вигляду:

- якщо вихідна задача двовимірна по просторових координатах, то при зниженні вимірності по одній змінній редуковані рівняння необхідно записати у формі Коші

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(x)\cdot\vec{Y}(x) + \vec{F}(x),\ \ x \in \left[0, L\right], \tag{1}$$

$\vec{Y}(x)$ - вектор невідомих, що в матрично-індексній формі має вигляд:

$\vec{Y}(x) = \left[u^i(x) \quad v^i(x) \quad \sigma_x^i(x) \quad \tau_{xy}^i(x)\right]^T$ - для редукованих рівняннях теорії пружності; $i = \overline{1, N_y}$. $\vec{Y}(x) = \left[T^i\left(x\right) \quad q^i\left(x\right)\right]^T$ - для редукованих рівняннях теплопровідності, $i = 1, N_y$. Тут і далі N_y - кількість прямих паралельних осі $0y$.

Відповідно рівняння (1) має вигляд:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u^i \\ v^i \\ \sigma_x^i \\ \tau_{xy}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{11} & a_{ij}^{12} & a_{ij}^{13} & a_{ij}^{14} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} & a_{ij}^{23} & a_{ij}^{24} \\ a_{ij}^{31} & a_{ij}^{32} & a_{ij}^{33} & a_{ij}^{34} \\ a_{ij}^{41} & a_{ij}^{42} & a_{ij}^{43} & a_{ij}^{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^j \\ v^j \\ \sigma_x^j \\ \tau_{xy}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x}^i \\ \hat{Y}^i \end{bmatrix} \text{ - у випадку вихідних рівнянь} \tag{2}$$

теорії пружності;

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} T^i \\ q_x^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij}^{11} b_{ij}^{12} \\ b_{ij}^{21} b_{ij}^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T^j \\ q_x^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{Q}^i \end{bmatrix} \text{ - у випадку вихідних рівнянь} \tag{3}$$

теплопровідності.

У співвідношеннях (2), (3) по індексах, що повторюються та розташовані в різних рівнях, передбачається підсумовування в межах області значень даного індексу (узгодження Ейнштейна).

Якщо вихідна задача тривимірна по просторових координатах, а зниження вимірності виконується по двох просторових змінних, наприклад, y та z, то зі змінною y пов'язуються індекси $(i, j, \alpha, \beta, \gamma) = \overline{1, N_y}$, а зі змінною z індекси $(k, l, \nu, \varepsilon, \delta) = \overline{1, N_z}$. N_z - кількість прямих паралельних осі $0z$, а відповідні вектори та матриці мають вигляд:

- у редукованих рівняннях теплопровідності:

$$\vec{Y}(x) = \begin{bmatrix} T^{ik} \\ q_x^{ik} \end{bmatrix},\ \ A = \begin{bmatrix} b_{kl}^{11} b_{kl}^{12} \\ b_{kl}^{21} b_{kl}^{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

- у редукованих рівнянь теорії пружності:

$$\vec{Y}(x)\begin{bmatrix} u^{ik} \\ v^{ik} \\ w^{ik} \\ \sigma_x^{ik} \\ \tau_{xy}^{ik} \\ \tau_{xz}^{ik} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{kl}^{11} & a_{kl}^{12} & a_{kl}^{13} & a_{kl}^{14} & a_{kl}^{15} & a_{kl}^{16} \\ a_{kl}^{21} & a_{kl}^{22} & a_{kl}^{23} & a_{kl}^{24} & a_{kl}^{25} & a_{kl}^{25} \\ a_{kl}^{31} & a_{kl}^{32} & a_{kl}^{33} & a_{kl}^{34} & a_{kl}^{35} & a_{kl}^{36} \\ a_{kl}^{41} & a_{kl}^{42} & a_{kl}^{43} & a_{kl}^{44} & a_{kl}^{45} & a_{kl}^{46} \\ a_{kl}^{51} & a_{kl}^{52} & a_{kl}^{53} & a_{kl}^{54} & a_{kl}^{55} & a_{kl}^{56} \\ a_{kl}^{61} & a_{kl}^{62} & a_{kl}^{63} & a_{kl}^{64} & a_{kl}^{65} & a_{kl}^{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Граничні умови: для рівняння (1), (2)

$$\text{при } x = 0 \;\; C_0(\vec{Y}(0) - \vec{\Phi}_0), \text{ при } x = L \;\; C_L(\vec{Y}(L) - \vec{\Phi}_L) \quad (6)$$

Для рівняння (2)при $x = 0 \;\; C_0(Y(0) - \Phi_0)$, при $x = L \;\; C_L(Y(L) - \Phi_L)$ (7)

Тут $\vec{Y}$ - вектор вимірності $2N$, $\vec{\Phi}$ - відомий вектор вимірності N,
Y - матриця вимірності $N_y \times N_z$, Φ_0, Φ_L - відомі матриці вимірності $N_y \times N_z$.

Для рівнянь теплопровідності за граничні умови приймаються умови конвективного теплообміну, які після редукування мають в індексній формі вигляд, аналогічний вихідним граничним умовам.

Система редукованих рівнянь (1) з відповідними редукованими граничними умовами (3) та система редукованих рівнянь (2) з відповідними граничними умовами (4) утворюють редуковані граничні задачі. Більшість сучасних чисельних методів будуються на ідеї зведення вихідної граничної задачі до розв'язання кількох задач Коші.

Оскільки згадані вихідні задачі є лінійними, то редуковані задачі також лінійні. Множина часткових розв'язків однорідного рівняння (при $F = 0$ або $\vec{F}$) утворює лінійний простір вимірності $M = 2N$ для редукованої задачі теплопровідності та вимірності $M = 4N$ для редукованої задачі теорії пружності. Якщо розглядається двовимірна вихідна задача, то відповідно $M = N_y \times N_z$. У випадку тривимірної вихідної задачі - $M = 6N_y \times 6N_z$. В M - вимірному лінійному просторі існує базис з M елементів, які утворюють лінійно незалежну систему елементів. На їх основі в теорії лінійних диференціальних рівнянь виводиться структура загального розв'язку системи редукованих рівнянь (8), де $\left\{\vec{Z}_1(x), \vec{Z}_2(x), \vec{Z}_3(x), \ldots \vec{Z}_M(x)\right\} = Z(x)$ - фундаментальна система часткових розв'язків однорідних рівнянь та фундаментальна матриця, стовпчиками якої є векторами фундаментальної системи розв'язків, $\vec{Z}_0$ - початковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\vec{Y}(x) = Z(x) \cdot \vec{b} + \vec{Z}_0(x) \quad (8)$$

До елементів фундаментальної системи розв'язків лінійного диференціального рівняння є дві основні вимоги – її елементи повинні бути частковими розв'язками відповідного однорідного рівняння, часткові розв'язки повинні утворювати лінійно-незалежну систему з M елементів.

Побудова фундаментальної системи розв'язків виконується розв'язуючи задачу Коші для однорідних рівнянь, вибравши при $x=0$ для векторів фундаментальної системи розв'язків певні значення. Якщо ці початкові вектори утворюють лінійно незалежну систему, то згідно теореми про однозначний розв'язок задачі Коші, в інших точках відрізка $[0,l]$ знайдені значення векторів також утворюють лінійно незалежну систему векторів.

Аналогічно будується частковий розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь. Найпростіше для побудови фундаментальної матриці та часткового розв'язку неоднорідної системи вибирати:

$$\begin{aligned} Z(0) &= E, \\ \vec{Z}(0) &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Де E - одинична матриця вимірності M, $\vec{0}$ - нуль-вектор відповідної вимірності.

Це найпростіший варіант зведення граничної задачі до задачі Коші. А саме для розв'язування задачі Коші розроблені ефективні та високоточні чисельні методи, найбільш вживаним з яких є метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності. Це явний однокроковий метод, який має декілька інтерпретацій [7]. У наших роботах використовується метод Рунге-Кутти, варіант Мерсона (RKM) [9].

При використанні явних чисельних методів виникає одне ускладнення, яке підсилюється властивостями редукованих рівнянь, які є "жорсткими" [7] і це впливає на стійкість обчислювального процесу.

Для лінійних диференціальних рівнянь С.К. Годунов [10] запропонував додаткову операцію в процесі інтегрування системи диференціальних рівнянь. При фіксованому x значення часткових розв'язків утворюють систему векторів, яка в будь-якій точці відрізка інтегрування має бути лінійно незалежною. При інтегруванні рівнянь явними методами можливе накопичення похибок, що призводить до перетворення лінійно незалежної системи векторів на "майже" лінійно залежну. С.К. Годунов запропонував відрізок інтегрування розбивати певною кількістю точок, в яких необхідно ортогоналізувати фундаментальну систему розв'язків за допомогою процедури ортогоналізації Грама-Шмідта. Це додатково ускладнює алгоритм інтегрування задачі Коші, оскільки при переході від одного базису до іншого (ортонормованого) змінюється вектор довільних сталих $\vec{b}$ в співвідношенні (8), що ускладнює обчислювальний алгоритм.

Щоб уникнути зайвих ускладнень в чисельних методах, що використовують розв'язки задач Коші для систем "жорстких" звичайних диференціальних рівнянь Гіром запропоновано метод, який базується на формулах (10)

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t) \tag{10}$$

$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1},t_{n+1}) = x_n + h[f(x_{n+1},t_{n+1})]$ - метод Гіра першого порядку;

$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{3}x_{n-1} + h\left[\frac{2}{3}f(x_{n+1},t_{n+1})\right]$ - другого порядку;

$x_{n+1} = \frac{18}{11}x_n - \frac{9}{11}x_{n-1} - \frac{2}{11}x_{n-2} + h\left[\frac{6}{11}f(x_{n+1},t_{n+1})\right]$ - третього порядку;

$x_{n+1} = \frac{48}{25}x_n - \frac{36}{25}x_{n-1} + \frac{16}{25}x_{n-2} - \frac{3}{25}x_{n-3} + fh\left[\frac{12}{25}f(x_{n+1},t_{n+1})\right]$ - четвертого порядку.

Тут $h = \Delta x$ - відстань між точками, номери яких, вказані в формулах

Можна побудувати методи Гіра вищого порядку, але найбільш вживаними є тут наведені. Усі методи Гіра є неявними та багатокроковими. Це означає, що для запуску методу Гіра необхідно спочатку чисельним методом визначити кілька перших значень розв'язку (для метода Гіра другого порядку x_2, третього порядку - x_2, x_3, четвертого - x_2, x_3, x_4 (x_1 відоме з початкових умов). Як правило, вказані значення обчислюються за допомогою методу Рунге-Кутти відповідного порядку точності. У алгоритмі для знаходження x_{n+1} на кожному кроці необхідно розв'язувати нелінійні рівняння.

У випадку лінійної задачі Коші вихідне рівняння має вигляд

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(x)\vec{Y}(x) + \vec{F}(x) \tag{11}$$

Формули методів Гіра (МГ) будуємо за співвідношеннями $t \leftrightarrow x$, $f(x_{n+1},t_{n+1}) \leftrightarrow A(x_{n+1})\vec{Y}_{n+1} + \vec{F}(x_{n+1})$, $x_n^{(t)} \leftrightarrow \vec{Y}_n^{(x)}$.

Отримуємо наступні формули:

для МГ першого порядку $\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + h\left[A_{n+1}\cdot\vec{Y}_{n+1} + \vec{F}_{n+1}\right]$;

для МГ другого порядку $\vec{Y}_{n+1} = \frac{4}{3}\vec{Y}_n - \frac{1}{3}\vec{Y}_{n-1} + h\left[\frac{2}{3}(A_{n+1}\cdot\vec{Y}_{n+1} + \vec{F}_{n+1})\right]$;

для МГ третього порядку $\vec{Y}_{n+1} = \frac{18}{11}\vec{Y}_n - \frac{9}{11}\vec{Y}_{n-1} + \frac{2}{11}\vec{Y}_{n-2} + h\left[\frac{6}{11}(A_{n+1}\cdot\vec{Y}_{n+1} + \vec{F}_{n+1})\right]$;

для МГ четвертого порядку

$$\vec{Y}_{n+1} = \frac{48}{25}\vec{Y}_n - \frac{36}{25}\vec{Y}_{n-1} + \frac{16}{251}\vec{Y}_{n-2} - \frac{3}{25}\vec{Y}_{n-3} + h\left[\frac{12}{25}(A_{n+1}\cdot\vec{Y}_{n+1} + \vec{F}_{n+1})\right].$$

У кожному з цих співвідношень можна знайти $\vec{Y}_{n+1}$ явно, маємо:

для МГ першого порядку $\vec{Y}_{n+1} = \left[E - h\cdot A_{n+1}\right]^{-1}\cdot\left[\vec{Y}_n + h\cdot\vec{F}_{n+1}\right]$;

для МГ другого порядку $\vec{Y}_{n+1} = \left[E - \frac{2}{3}h\cdot A_{n+1}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{4}{3}\vec{Y}_n - \frac{1}{3}\vec{Y}_{n-1} + \frac{2}{3}h\cdot\vec{F}_{n+1}\right]$;

для МГ третього порядку

$$\vec{Y}_{n+1} = \left[E - \frac{6}{11}h\cdot A_{n+1}\right]^{-1}\left[\frac{18}{11}\vec{Y}_n - \frac{9}{11}\vec{Y}_{n-1} + \frac{2}{11}\vec{Y}_{n-2} + \frac{6}{12}h\cdot\vec{F}_{n+1}\right];$$

для МГ четвертого порядку

$$\vec{Y}_{n+1} = \left[E - \frac{12}{25}h\cdot A_{n+1}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{48}{25}\vec{Y}_n - \frac{36}{25}\vec{Y}_{n-1} + \frac{16}{25}\vec{Y}_{n-2} - \frac{3}{25}\vec{Y}_{n-3} + \frac{12}{25}h\cdot\vec{F}_{n+1}\right], \tag{12}$$

де E – одинична матриця.

Якщо матриця A є сталого, тобто $A_{n+1} = A_0$ для усіх значень n, то обернену матрицю треба шукати один раз, якщо ж ця матриця залежить від змінної x, то на кожному кроці необхідно знаходити обернену матрицю.

У результаті чисельного розв’язання задачі Коші в точках відрізка $[0, l]$ визначаються значення фундаментальної матриці $Z(x_i)$ та часткового розв’язку неоднорідної системи рівнянь $\vec{Z}_0(x_i)$. Це дає змогу побудувати загальний розв’язок граничної задачі, використовуючи граничні умови при $x = 0$ та $x = L$. Якщо для інтегрування задач Коші використовується метод Гіра, то вигляд загального розв’язку не залежить від змінної x і сталі інтегрування знаходяться з рівнянь:

$$\begin{cases} C_0\left(Z(x_0)\vec{b} + \vec{Z}_0(x_0) - \vec{\Phi}_0\right) = 0 \\ C_L\left(Z(x_L)\vec{b} + \vec{Z}_0(x_L) - \vec{\Phi}_L\right) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Якщо при інтегруванні задач Коші використовується ортогоналізація векторів часткових розв’язків, то при використанні граничних умов необхідно враховувати залежність вектора сталих інтегрування $\vec{b}$ від координати відповідної точки.

Початкові умови для побудови задач Коші для даної системи звичайних диференціальних рівнянь можна вибирати довільно. Але для знаходження вектора констант інтегрування $\vec{b}$ необхідно використовувати граничні умови граничної задачі при $x = 0$ та $x = L$. С.К. Годунов [10] запропонував вибирати фундаментальну систему розв'язків Z та вектор розв'язків неоднорідної системи $\vec{Z}_0$ таким чином, щоб вони задовільняли граничним умовам в початковій точці інтегрування задачі Коші. Такий вибір фундаментальної матриці $Z(x)$ та вектора $\vec{Z}_0(x)$ удвічі зменшує об'єм необхідних обчислень. $Z(x)$ - прямокутна матриця розміру $\left(M \times \dfrac{M}{2}\right)$. При цьому $Z(x_0)$ необхідно вибирати в залежності від C_0 , $Z_0\left(x_0\right) = \vec{\Phi}_0$. Далі методом Рунге-Кутти четвертого степеня з використанням метода С.К. Годунова будується розв'язок задачі Коші.

Аналогічно будується задача Коші з урахуванням граничних умов при $x = 0$, але розв'язок цієї задачі виконується методом Гіра, де вектор довільних сталих $\vec{b}$ знаходяться з граничних умов при $x = L$.

2. Розглянуті в попередньому пункті чисельні методи використовуються для побудови алгоритмів розв'язування квазістатичних динамічних задач будівельної механіки – знаходження частот і форм власних коливань – та знаходження амплітудних значень характеристик НДС при усталених коливаннях.

Для знаходження частот і форм власних коливань використовуються редуковані динамічні рівняння теорії пружності, які записуються у формі системи однорідних диференціальних рівнянь першого порядку по просторових координатах. Вихідні динамічні рівняння в плоскій постановці редукуються по одній просторовій змінній, а редуковані рівняння залежать від однієї просторової змінної, наприклад x. До рівнянь входять також інерційні складові $\rho\dfrac{\partial^2 u^i(x)}{\partial t^2}$ та $\dfrac{\partial^2 v^i(x)}{\partial t^2}$. Якщо вихідні рівняння є тривимірними і редукція проводиться по двох просторових координатах, то редуковані рівняння мають аналогічний вигляд, хіба що включають додаткову інерційну змінну $\rho\dfrac{\partial^2 w^{ik}(x,t)}{\partial t^2}$

Шукаючи розв'язок редукованих рівнянь у вигляді вільних коливань:

$$
\begin{aligned}
u^i(x,t) &= u^i(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi), \\
v^i(x,t) &= v^i(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi);
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

$$
\begin{aligned}
u^{ik}(x,t) &= u^{ik}(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi), \\
v^{ik}(x,t) &= v^{ik}(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi), \\
w^{ik}(x,t) &= w^{ik}(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi);
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

приходимо до розв'язування задачі (16), яка за виглядом рівнянь схожа на рівняння для статичних задач.

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(\omega, x)\vec{Y}(x) \tag{16}$$

По-перше, це система однорідних рівнянь, з однорідними граничними умовами:

$$\begin{aligned} C_0 \cdot \vec{Y}(x_0) = 0 \\ C_L \cdot \vec{Y}(x_L) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Це типова задача на власні значення для системи диференціальних рівнянь, яку сучасні чисельні методи розв'язують покроковим методом [12]. Дані рівняння та граничні умови є однорідними, ненульові розв'язки і відповідно коливання можливі при певному значенні частоти. При побудові розв'язку за попереднього підходу граничні умови однорідні, то й розрахункові рівняння для знаходження вектора сталих інтегрування $\vec{b}$ також будуть однорідними. Ненульовий розв'язок алгебраїчних рівнянь буде в тому випадку, якщо детермінант матриці коефіцієнтів дорівнює нулю.

Задаючи інтервал значень ω, в межах якого визначаються власні значення, розв'язується квазістатична задача із заданим фіксованим значенням ω. Досліджується значення детермінанта матриці відповідної алгебраїчної системи рівнянь. Необхідно задати, з якою точністю значення детермінанта вважається нульовим.

Після знаходження значення ω, при якому детермінанта дорівнює нулю, необхідно побудувати відповідну форму власних коливань. Для цього досліджують алгебраїчну систему, з якої знаходиться вектор сталих інтегрування $\vec{b}$. Оскільки детермінант матриці коефіцієнтів умовно дорівнює нулю, то її ранг менше кількості невідомих. Одне невідоме не є зв'язаним цими рівняннями з іншими і може бути вибране будь-яким. Вибираючи таке невідоме переносимо його в праву частину і знаходимо відповідні значення переміщень, які залежні від вибраного, розв'язуємо отриману систему рівнянь. За побудованим вектором $\vec{b}$ знаходимо відповідні значення переміщень, які визначають форму коливань, визначену з точністю до множника.

3. Знаходження амплітудних значень невідомих при усталених коливаннях. Коливання пружних систем поділяють на дві фази.

Перша фаза – це перехідний процес, або нестаціонарні коливання, впродовж якого у загальному процесі коливань суттєва частка власних коливань. Але з часом, у зв'язку з наявністю гасників коливань, доля власних коливань зменшується. Якщо вимушені гармонічні впливи, з частотою θ, то основні коливання далі відбуваються за гармонічним законом, наприклад $\sin\theta t$, такі коливання називаються усталеними або стаціонарними коливаннями.

Відповідні розрахункові рівняння отримують з динамічних рівнянь визначаючи розв’язок у формі:

$$u^i(x,t) = u^i(x)\sin\theta t, \quad v^i(x,t) = v^i(x)\sin\theta t; \tag{18}$$

$$u^{ik}(x,t) = u^i(x)\sin\theta t, \quad v^{ik}(x,t) = v^i(x)\sin\theta t, \quad w^{ik}(x,t) = w^i(x)\sin\theta t; \tag{19}$$

приходимо до розв’язування задачі

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(\theta,x)\vec{Y}(x) + \vec{F} \tag{20}$$

де $\vec{Y}(x)$ задовольняє умовам:

$$C_0(\vec{Y}(x_0) - \vec{\Phi}_0) = 0, \quad C_L(\vec{Y}(x_L) - \vec{\Phi}_L) = 0. \tag{21}$$

Задача (17), (18) при заданому θ є квазістатичною і розв’язується відносно амплітудних значень компонент НДС аналогічно статичним задачам.

Важливою характеристикою пружних систем є амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), побудова якої випливає з попереднього і будується для окремих компонентів НДС.

Одними з зовнішніх впливів, врахування яких на несучі конструкції важливе, є температурні впливи. У наш час врахування температурних впливів розглядається в рамках певного напрямку механіки деформівного твердого тіла – термопружності. Знаходженню напружено-деформованого стану конструкції передує розрахунок теплового поля, для чого використовується теорія теплопровідності. Розв’язання задачі термопружності складається з двох етапів – на першому необхідно визначити характеристики теплового поля, на другому – по знайденим значенням температур визначають характеристики НДС. При цьому розглядають два типи задач теплопровідності.

Якщо зовнішні температурні впливи сталі, то стан теплового поля є стаціонарним, тобто незалежним від часу. Розрахункові рівняння теорії теплопровідності схожі за формою та змістом з статичними рівняннями теорії пружності, тому для їх розв’язання використовуються алгоритми, що описані вище для розв’язування статичних задач.

4. Якщо відповідна задача називається нестаціонарною задачею теплопровідності і описується нестаціонарними рівняннями теплопровідності, які (як і вище) записуються у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку по просторових координатах. Для плоскої задачі вони мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&q_x(x,y,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \\
&q_y(x,y,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \\
&\rho c \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x(x,y,t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(x,y,t)}{\partial y} + Q(x,y,t)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

де λ_T - коефіцієнт теплопровідності, c - питома теплоємність, ρ - щільність матеріалу, що розглядається.

Тут T - температура, q_x , q_y - компоненти вектора теплового потоку. Невідомі функції повинні задовольняти граничним умовам, у якості яких вибирається умови конвективного теплообміну, та початковим умовам, де в початковий момент часу $t=0$ $T(x,y,0)=T_0(x,y)$ (розподіл температур відомий).

Редукуючи рівняння за допомогою проекційного метода з використанням базисних функцій-кришок, отримуємо редуковані рівняння "в коефіцієнтах":

$$
\begin{aligned}
&q_x^{i(x,t)} = -\lambda_T \frac{\partial T^i(x,t)}{\partial t} \\
&q_y^{i(x,t)} = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^{\alpha}(x,t) \\
&\rho c \frac{\partial T^i(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x^i}{\partial x} - g^{ij} b_{\alpha j} q_y^{\alpha} + g^{iN} q_y^N - g^{i1} q_y^1
\end{aligned}
\tag{23}
$$

При розв'язуванні рівнянь нестаціонарної теплопровідності чисельними методами, прийнято розрахункові рівняння зводити до рівнянь другого порядку по просторових координатах, виключаючи з них компоненти вектора теплового потоку. Редуковані рівняння (20) мають аналогічну форму з вихідними рівняннями. За допомогою граничних умов при $y=h^-$ та $y=h^+$ з рівнянь виключаються q_y^1 та q_y^N . У результаті отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&\rho c \frac{\partial T^i(x,t)}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T^i(x,t)}{\partial x^2} - \lambda_T g^{ij} b_{\alpha j} g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} T^{\gamma}(x,t) + \lambda_T^+ g^{iN} T^N(x,t) - \\
&-\lambda_T^- g^{i1} T^1(x,t) + \tilde{Q}_*^i(x,t)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

де $\tilde{Q}^i(x,t) = Q^i(x,t) - g^{iN}\lambda_T^+\theta_c^+(x,t) - g^{i1}\lambda_T^-\theta_c^-(x,t)$, де $\theta_c^-(x,t)$, $\theta_c^+(x,t)$ - температура оточуючого середовища з боків площин $y=h^-$ та $y=h^+$.

Для подальшої розробки алгоритма та програмування зручно перейти до матричної форми розрахункового редукованого рівняння:

$$\rho c\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}=\lambda_T\frac{\partial^2\vec{T}(x,t)}{\partial x^2}=\lambda_T A_1\vec{T}(\alpha,t)+\alpha_T^+G_N T^N(x,t)-\alpha_T^-G_1T^1(x,t)+Q_*(x,t). \qquad (25)$$

Тут $\vec{T}=\left[T^i\right]$, $A_1=\left[g^{i\gamma}b_{\alpha j}g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}\right]=\left\{\alpha^{i\square}_{\square\gamma}\right\}$ $T^N(x,t)$ - значення температурної функції на прямій $n=N$; $T(x,t)$ - значення температурної функції на прямій $n=1$; $\vec{G}_N=\left\{g^{iN}\right\}$ - значення двічі контраваріантного метричного тензора на прямій $n=N$, при $i=1,N$ (матриця-стовпчик); $\vec{G}_1=\left\{g^{i1}\right\}$ - значення двічі контраваріантного метричного тензора (матриця-стовпчик) на прямій $n=1$, при $i=1,N$.

Для розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних використовуються різницеві схеми метода скінченних різниць. Різницеві схеми [17] можуть бути явними, де обчислення проводиться по рекурентним формулам, або неявним, де на кожному кроці необхідно розв'язувати деякі системи алгебраїчних рівнянь. Явні схеми для рівняння теплопровідності набагато простіші за неявні, але в практичних задачах нестаціонарної теплопровідності рекомендують використовувати неявні схеми [13]. Явні схеми можуть бути умовно стійкими, тобто потребують малих значень кроків по часовій координаті Δt при вибраних значеннях кроку по просторовій координаті Δx, яка забезпечує достатню точність результатів. Розроблена велика кількість неявних різницевих схем, які є стійкими при будь-яких значеннях Δx та Δt, що забезпечують знаходження результатів з достатньою точністю і без втрати обчислювальної стійкості.

Найпростіші різницеві схеми для нестаціонарної теплопровідності наведені на рис.1.

На напівнескінчену область визначення редукованих рівнянь $\left[0\le x,\mathrm{L}\right]\otimes\left[0\le t,L\right]$, віднесеної до декартової системи координат $x0t$ нанесено сітку з кроком Δx по координаті x та Δt по координаті t. Лінії сітки визначаються індексом 1 по змінній x та індексом k по змінній t.

Сукупність вузлів сітки, що використовується для побудови даної різницевої схеми, називають шаблоном. На рис.1 сукупність вузлів, що позначені кружечками, використовується для побудови явної різницевої схеми, а сукупність вузлів, що позначені хрестиками, використовується для побудови неявної схеми. Згадані різницеві схеми прив'язані до центрального вузла $\left(1,k\right)$ і використовуються для апроксимації редукованого рівняння теплопровідності (25) в цій точці. При цьому по осі $0t$ для похідної по t використовуються скінченні різницеві частки першого порядку точності, по змінній x - скінченні різницеві частки другого порядку точності.

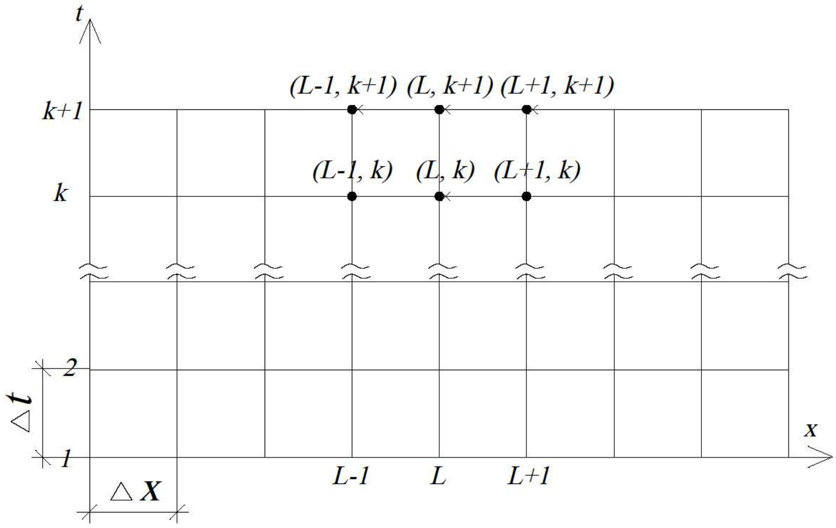

Рис.1. Різницева схема.

До першої різницевої схеми входять вузли, що позначені точками, до другої - позначені хрестиками. Перша явна схема - умовно стійка і вимагає малих значень Δt для забезпечення стійкості обчислювального процесу, тобто не економічна. Друга схема- неявна, завжди стійка. На основі цих двох схем утворюється неявна схема Кранка-Нікольсена [7], що є середнім цих двох схем, тобто їх сумою поділеною на 2.

Ця схема є економічною і широко використовується при розв'язанні рівнянь теплопровідності [4].

Оскільки структура редукованого рівняння несуттєво відрізняється від структури стандартного рівняння теплопровідності, то побудуємо відповідну різницеву схему для рівняння (25).

$\vec{T}_l^{k+1} - \vec{T}_l^k = \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2}\left(\vec{T}_{l+1}^{k+1} - 2\vec{T}_l^{k+1} + \vec{T}_{l-1}^{k} + \vec{T}_{l+1}^{k} - 2\vec{T}_l^{k} + \vec{T}_{l-1}^{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{F}_l^{k+1} + \vec{F}_l^{k}\right)$, де $\vec{F}$ - залишкова частина рівнянь (25).

Значення невідомих на часовому шарі k є відомими, а (26) на часовому шарі k+1 - невідомі. Переносячи невідомі величини ліворуч, а відомі праворуч, отримуємо розв'язувальні рівняння:

$$T_{l-1,k+1} - 2\left(\rho c \frac{\left(\Delta x^2\right)}{\Delta t} + 1\right) T^{i}_{l,k+1} + T^{i}_{l+1} = T^{i}_{l-1,k} - 2\left(\rho c \frac{\left(\Delta x^2\right)}{\Delta t} + 1\right) T^{i}_{l,k} + T^{i}_{l+1,k} + Q^{i}_{l,k} \qquad (26)$$

Для знаходження значень розрахункової функції T згідно різницевої схеми (14) складається система рівнянь для невідомих на $k+1$ шарі. Матриця цієї системи має тридіагональний вигляд, що дозволяє розв'язувати цю систему алгебраїчних рівнянь методом матричної прогонки [8].

5. Дослідження нестаціонарних коливань пружніх об’єктів повинно враховувати будь-які за часом впливи, розрахункові функції повинні задовольняти початковим умовам і складатися з вимушених та власних коливань. Відповідні задачі в математичній фізиці описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних и відносяться до рівнянь гіперболічного типу [8]. Зниження вимірності суттєво поліпшує процес отримання розв’язків. Але знаходження розв’язків початково-граничних задач, особливо редукованих, можливо тільки чисельними методами. Для типу задач, які розглядаються, чисельні методи базуються на застосуванні метода скінченних різниць і побудові на його основі різницевих схем - явних або неявних.

Побудова різницевих схем для задач гіперболічного типу.

Вихідні рівняння прийнято записувати у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку по просторових та часовій координатах використовуються явні різницеві схеми. Для вихідної плоскої динамічної задачі редуковані рівняння по просторовій координаті мають вигляд:

$$\rho\frac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial x^2}+\lambda g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{v}}{\partial x}-g^{iN}\overset{+}{k}_{yx}\overset{N}{u}-g^{i1}\overset{-}{k}_{yx}\overset{1}{u}-g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{v}}{\partial x}-\mu g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma}\overset{\gamma}{u}+\overset{i}{x},$$

$$\rho\frac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial x^2}+\mu g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{u}}{\partial x}-g^{iN}\overset{+}{k}_{yy}\overset{N}{v}-g^{i1}\overset{-}{k}_{yy}\overset{1}{v}-\lambda g^{ij}\frac{\partial \overset{j}{u}}{\partial x}-(\lambda+2\mu) g^{ij} b_{\alpha j} b_{\beta\gamma}\overset{\gamma}{v}+\overset{i}{y},$$

Для головної частинної різницевої схеми, пов’язаної з апроксимацією других похідних по просторовій та часовій координатах використовуємо шаблон “хрест” (Рис.2).

Диференціальному виразу

$$\rho\frac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial x^2}+\lambda g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{v}}{\partial x}-g^{iN}\overset{+}{k}_{yx}\overset{N}{u}-g^{i1}\overset{-}{k}_{yx}\overset{1}{u}-g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{v}}{\partial x}-\mu g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma}\overset{\gamma}{u}+\overset{i}{x},$$

у вузлі (l, k) ставиться у відповідність вираз

$\frac{\rho(\overset{i}{v}_{l,k-1}-2\overset{i}{v}_{l,k}+\overset{i}{u}_{l,k+1})}{(\Delta t)^2}=\frac{(\lambda+2\mu)(\overset{i}{u}_{l-1,k}-2\overset{i}{u}_{l+1,k}+\overset{i}{u}_{l+1,k})}{(\Delta x)^2}+\ldots$, а диференціальному виразу

$$\rho\frac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial x^2}+\mu g^{ij} b_{j\alpha}\frac{\partial \overset{\alpha}{u}}{\partial x}-g^{iN}\overset{+}{k}_{yy}\overset{N}{v}-g^{i1}\overset{-}{k}_{yy}\overset{1}{v}-\lambda g^{ij}\frac{\partial \overset{j}{u}}{\partial x}-(\lambda+2\mu) g^{ij} b_{\alpha j} b_{\beta\gamma}\overset{\gamma}{v}+\overset{i}{y},$$

ставиться у відповідність вираз $\frac{\rho(\overset{i}{v}_{l,k-1}-2\overset{i}{v}_{l,k}+\overset{i}{u}_{l,k+1})}{(\Delta t)^2}=\mu(\overset{i}{v}_{l-1,k}-2\overset{i}{v}_{l,k}+\overset{i}{u}_{l+1,k})+\ldots .$

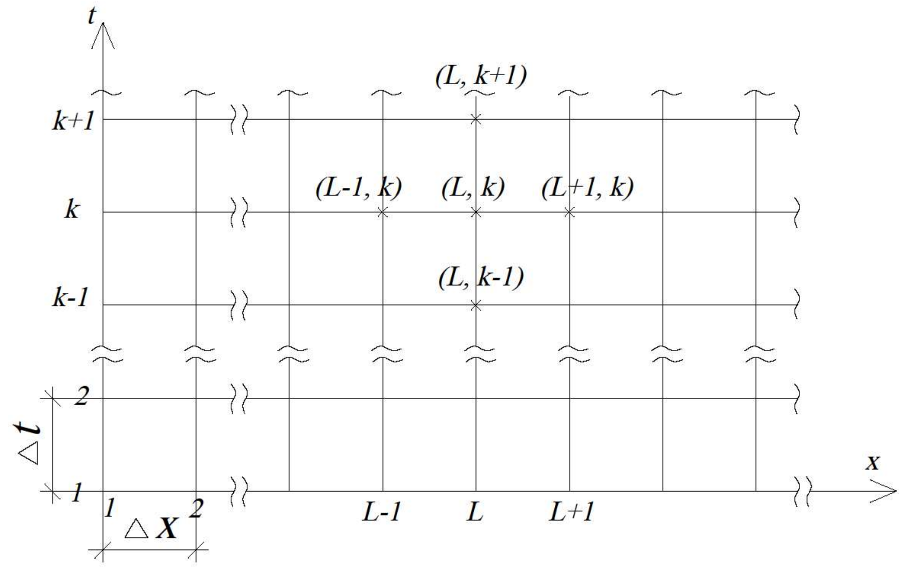

Рис.2.

У редукованих рівняннях перші похідні по просторових змінних апроксимуються центральними різницевими частками, а в редукованих граничних умовах - відповідними однобічними різницевими частками.

З редукованих початкових умов знаходяться значення невідомих вектор-функцій u^i та v^i в усіх вузлах перших двох шарів, а починаючи з третього - по рекурентним співвідношенням явної різницевої схеми послідовно на всіх наступних шарах.

Оскільки дана різницева схема є умовно стійкою, то необхідно підібрати значення кроків Δt і Δx, які забезпечують стійкість обчислювального процесу. Оскільки редуковані рівняння досить складні, то при вибраному Δx необхідно підбирати значення Δt чисельно.

Література

1. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с
2. Чибиряков, В.К. Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в задачах статики и динамики массивных элементов конструкций: автореферат дис. … доктора технических наук: 01.02.03 / Моск. инж.-строит. ин-т им. В. В. Куйбышева. - Москва, 1988. - 39 с.
3. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1934 – С. 21-34.
4. Винокуров Л.П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Харьков. Изд-во Харьк. ун-та, 1956.
5. Винокуров Л.П. Решение пространственной задачи теории упругости в перемещениях. «Бюллетень Харьковского инженерно-строительного института», 1940, №18. – С.59-73.

6. Шкелёв Л.Т. Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояний пластин и оболонок. / [Л.Т. Шкелёв, Ю.А. Морсков, ТА. Романова, и др.] – К.: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.

7. Шкелёв Л.Т. Использование метода прямых для решения бигармонического уравнения. В. Сб. «Реферативная информация о законченых научно-исследовательских работах в ВУЗах УССР. Строительная механика, расчет сооружений» Вып 2, Киев, «Вища школа» – 1971. – С. 54-66.

8. Шкелёв Л.Т. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов / [Л.Т. Шкелёв, А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач и др.]: Монография. – К.: КНУСА, 2004. -136 с.

9. Григоренко Я.М. О решении задач статики слоистых оболочек в трехмерной постановке / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д Панкратова // Вычислительная и прикл. математика – 1981. – Вып. 43. – С.123-132.

10. Влайков Г.Г. Некоторые осесимметричные задачи статики и динамики анизотропных тел цилиндрической формы / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко; НАН Украины. Техн. центр. – К., 1998. – 58 с.

11. Влайков Г.Г. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко, С.Н. Шевченко// НАН Украины. Ин-т механики им. С.П.Тимошенко. Техн. центр. – К., 2001. – 148 с.

12. Чибіряков В.К. Зниження вимірності рівнянь статики товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, А.А. Сташук // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2012. - Вип. 89. - С. 58-67

13. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В., Мельничук В.Ф. Про підвищення точності узагальненого методу прямих // містобудування та територіальне планування: наук.-техн. збірник. київ.: кнуба, 2014. вип. 53. С. 565–574.

14. Чибіряков В.К. Про одну розрахункову модель для дослідження деформацій дамб та гребель та обгрунтування точності геодезичних спостережень / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, В.С. Старовєров, Г.С. Акчуріна, О.А. Шорін // Інженерна геодезія. - 2016. - Вип. 63. - С. 21-34.

15. Чибіряков В.К. Узагальнений метод прямих в задачах теорії пружності для областей складної форми / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, А.О. Краснєєва, О.А. Шорін // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. - 2017. - Вип. 67. - С. 71-77.

16. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В. та ін. Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 70. – Київ, КНУБА, 2019. – С. 595-616.

17. А.М. Станкевич, Д.В. Левківський. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом “прямих”. / А. М. Станкевич, Д. В. Левківський // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49. – Київ, КНУБА, 2013. – С. 509-521.

18. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы./ Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.

19. Бурбаки Н. Алгебра: Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. - М.: Физматлит, 1962. - 516 с.

20. Дж. Ортега, У. Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. - 288 с.

д.т.н., профессор Чибиряков В.К., к.т.н., доцент Станкевич А.М.,
к.т.н., доцент Кошевой О.П., к.т.н., доцент Левковский Д.В.,
Краснеева А.О., Пошивач Д.В.,Чубарев А.Г.,
Шорин О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ЧИСЛЕНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДИЦИРОВАНОГО МЕТОДА ПРЯМЫХ

Важным этапом современных комбинированных методов есть применение численных методов для решения редуцированных задач. Это было недостатком классического метода прямых. Численный метод использовался для снижения разрядности (редукции) исходных уравнений, в результате чего редуцированные уравнения имели сложный вид. Это мешало применению современных численных методов для их решения. Понижение размерности исходных граничных и начально-граничных задач для уравнений теории упругости та термоупругости с помощью проекционного метода [1] сохраняет форму классических граничных и начально-граничных задач математической физики и требует незначительной адаптации к современным численным методам [2-6]. Именно этим вопросом посвящена эта работа. Применение модифицированного метода прямых может быть расширенно на статические задачи теории упругости и стационарные задачи теплопроводности [7], на задачи стационарных колебаний упругих конструкций, на задачи определения динамических характеристик (частот и форм собственных колебаний), задач нестационарной теплопроводности и нестационарных колебаний упругих объектов. Рассмотрим вопросы адаптации современных численных методов на решение соответствующих редуцированных задач. При этом важна форма подачи редуцированных уравнений в зависимости от структуры и особенностей соответствующего численного метода.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние; динамика; термоупругость; проекционный метод; модифицированный метод прямых

doctor of Technical Sciences, Professor Chibiryakov V.K.,
Stankevich A.M.,
Kosheviy O.P., Levkivskiy D.V.,
Krasneeva A.O., Poshivach D.V.,
Chubarev A.G., Shorin O.A.,
Yansons M.O., Sovich Yu.V.,
Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE MODIFIED METHOD OF LINES

An important step in modern combined methods is the application of numerical methods to solve reduced problems. This was the disadvantage of the classical method of lines. The numerical method was used to reduce the measurability (reduction) of the original equations, as a result of which the reduced equations had a complex appearance. This prevented the use of modern numerical methods to solve them. Reducing the measurability of the initial boundary and initial boundary value problems for the equations of the theory of elasticity and thermoelasticity using the projection method [1] retains the form of classical boundary and initial boundary value problems in mathematical physics and requires little adaptation to modern numerical methods [2-6]. This work is devoted to these issues. The application of the modified method of lines can be extended to static problems of elasticity theory and stationary problems of thermal conductivity [7], to problems of steady oscillations of elastic structures, to problems of finding dynamic characteristics (frequencies and forms of natural oscillations), problems of nonstationary thermal conductivity [7] and nonstationary elastic oscillations. objects. Consider the adaptation of modern numerical methods to solve the corresponding reduced problems. It is important in what form it is necessary to present the reduced equations depending on their structure and features of the corresponding numerical method.

Key words: stress-strain state; dymamic; thermoelasticity; projection method; modified method of lines.

REFERENCES

1. Vekua Y.N. Nekotorыe obshchye metodы postroenyia razlychnыkh varyantov teoryy obolochek. – M.: Nauka, 1982. – 288 s. {In Russian}

2. Chybyriakov, V.K. Obobshchennыi metod konechnыkh yntehralnыkh preobrazovanyi v zadachakh statyky y dynamyky massyvnыkh эlementov konstruktsyi: avtoreferat dys. … doktora tekhnycheskykh nauk: 01.02.03 / Mosk. ynzh.-stroyt. yn-t ym. V. V. Kuibыsheva. - Moskva, 1988. - 39 s. {In Russian}

3. Kantorovych L.V. Ob odnom metode pryblyzhennoho reshenyia dyfferentsyalnыkh uravnenyi v chastnыkh proyzvodnыkh. DAN SSSR, 1934 – C. 21-34. {In Russian}

4. Vynokurov L.P. Priamыe metodы reshenyia prostranstvennыkh y kontaktnыkh zadach dlia massyvov y fundamentov. Kharkov. Yzd-vo Khark. un-ta, 1956. {In Russian}

5. Vynokurov L.P. Reshenye prostranstvennoi zadachy teoryy upruhosty v peremeshchenyiakh. «Biulleten Kharkovskoho ynzhenerno-stroytelnoho ynstytuta», 1940, №18. – C.59-73. {In Russian}

6. Shkelёv L.T. Metod priamыkh y eho yspolzovanye pry opredelenyy napriazhennoho y deformyrovannoho sostoianyi plastyn y obolonok. / [L.T. Shkelёv, Yu.A. Morskov, TA. Romanova, y dr.] – K.: Natsyonalnaia akademyia nauk Ukraynы, Ynstytut mekhanyky ym. S.P. Tymoshenko, Tekhnycheskyi tsentr, 2002. – 177 s. {In Russian}

7. Shkelёv L.T. Yspolzovanye metoda priamыkh dlia reshenyia byharmonycheskoho uravnenyia. V. Sb. «Referatyvnaia ynformatsyia o zakonchenыkh nauchno-yssledovatelskykh rabotakh v VUZakh USSR. Stroytelnaia mekhanyka, raschet sooruzhenyi» Vыp 2, Kyev, «Vyshcha shkola» – 1971. – C. 54-66. {In Russian}

8. Shkelёv L.T. Prymenenye metoda priamыkh dlia opredelenyia napriazhennoho y deformyrovannoho sostoianyi prostranstvennыkh y plastynchatыkh konstruktyvnыkh эlementov / [L.T. Shkelёv, A.N. Stankevych, D.V. Poshyvach y dr.]: Monohrafyia. – K.: KNUSA, 2004. -136 s. {In Russian}

9. Hryhorenko Ya.M. O reshenyy zadach statyky sloystыkh obolochek v trekhmernoi postanovke / Ya. M. Hryhorenko, A. T. Vasylenko, N. D Pankratova // Vычyslytelnaia y prykl. matematyka – 1981. – Vыp. 43. – S.123-132. {In Russian}

10. Vlaikov H.H. Nekotorыe osesymmetrychnыe zadachy statyky y dynamyky anyzotropnыkh tel tsylyndrycheskoi formы / H.H. Vlaikov, A.Ia. Hryhorenko; NAN Ukraynы. Tekhn. tsentr. – K., 1998. – 58 c. {In Russian}

11. Vlaikov H.H. Nekotorыe zadachy teoryy upruhosty dlia anyzotropnыkh tsylyndrov s nekruhovыm poperechnыm sechenyem / H.H. Vlaikov, A.Ia. Hryhorenko, S.N. Shevchenko// NAN Ukraynы. Yn-t mekhanyky ym. S.P.Tymoshenko. Tekhn. tsentr. – K., 2001. – 148 c. {In Russian}

12. Chybiriakov V.K. Znyzhennia vymirnosti rivnian statyky tovstoi plastyny zminnoi tovshchyny uzahalnenym metodom priamykh / V.K. Chybiriakov, A.M. Stankevych, A.A. Stashuk // Opir materialiv i teoriia sporud. - 2012. - Vyp. 89. - S. 58-67. {in Ukrainian}

13. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Levkivskyi D.V., Melnychuk V.F. Pro pidvyshchennia tochnosti uzahalnenoho metodu priamykh //

mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: nauk.-tekhn. zbirnyk. kyiv.: knuba, 2014. vyp. 53. S. 565–574. {in Ukrainian}

14. Chybiriakov V.K. Pro odnu rozrakhunkovu model dlia doslidzhennia deformatsii damb ta hrebel ta obhruntuvannia tochnosti heodezychnykh sposterezhen / V.K. Chybiriakov, A.M. Stankevych, V.S. Starovierov, H.S. Akchurina, O.A. Shorin // Inzhenerna heodeziia. - 2016. - Vyp. 63. - S. 21-34. {in Ukrainian}

15. Chybiriakov V.K. Uzahalnenyi metod priamykh v zadachakh teorii pruzhnosti dlia oblastei skladnoi formy / V.K. Chybiriakov, A.M. Stankevych, A.O. Krasnieieva, O.A. Shorin // Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury. - 2017. - Vyp. 67. - S. 71-77. {in Ukrainian}

16. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V. ta in. Modyfikovanyi metod priamykh, alhorytm yoho zastosuvannia, mozhlyvosti ta perspektyvy. // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 70. – Kyiv, KNUBA, 2019. – S. 595-616. {in Ukrainian}

17. A.M. Stankevych, D.V. Levkivskyi. Try varianty reduktsii rivnian ploskoi zadachi teorii pruzhnosti metodom “priamykh”. / A. M. Stankevych, D. V. Levkivskyi // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 49. – Kyiv, KNUBA, 2013. – S. 509-521. {in Ukrainian}

18. Marchuk H.Y. Vvedenye v proektsyonno-setochnыe metodы./ H.Y. Marchuk, V.Y. Ahoshkov. – M.: Nauka. Hlavnaia redaktsyia fyzyko-matematycheskoi lyteraturы, 1981. – 416 s. {In Russian}

19. Burbaky N. Alhebra: Alhebraycheskye strukturы. Lyneinaia y polylyneinaia alhebra. - M.: Fyzmatlyt, 1962. - 516 s. {In Russian}

20. Dzh. Orteha, U. Pul. Vvedenye v chyslennыe metodы reshenyia dyfferentsyalnыkh uravnenyi. M.: Nauka, 1986. - 288 s. {In Russian}