

УДК 539.3

к.т.н., доцент Станкевич А.М., Левківський Д.В.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури

### ТРИ ВАРІАНТИ РЕДУКЦІЇ РІВНЯНЬ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ “ПРЯМИХ”

*Для зниження вимірності вихідних рівнянь плоскої задачі теорії пружності у роботі запропоновано застосовувати класичний варіант метода “прямих” у поєднанні з узагальненим методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Як координатні функції використовуються кусково-лінійні фінітні функції. На основі даного підходу розроблено 3 варіанти редукованих диференціальних рівнянь: рівняння в моментах, коефіцієнтах, та рівняння мішаного типу. Отримані рівняння пропонується розв’язувати чисельно, за допомогою метода дискретної ортогоналізації С. К. Годунова. На конкретному прикладі показана збіжність отриманих результатів за трьома підходами.*

Для побудови математичної моделі, що описує напружено-деформований стан пластини, використовується метод зниження вимірності вихідних дво- та тривимірних граничних задач теорії пружності. Зниження вимірності виконується за допомогою гіпотез кінематичного та статичного змісту, які можуть бути застосовані переважно для тонких пластин. Теорія тонких пластин використовується вже багато років, однак існує достатня кількість випадків, де ця теорія дає суттєві похибки. Це стосується дослідження напружено-деформованого стану (в подальшому НДС) в зоні локальних навантажень (наприклад, при дослідженні НДС дорожнього покриття під колесами автотранспорту), при локальних ударах та інше. Крім того, товщина пластини може бути одного порядку з іншими габаритними розмірами.

В останні часи зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності для пластин виконується за допомогою різних аналітичних або чисельних методів. Серед аналітичних методів використовуються варіаційні методи (наприклад, метод Рітца) та проєкційні методи (метод Власова-Канторовича, метод Векуа).

Серед чисельних методів можна виділити метод сіток. Ідея підходу полягає в тому, що похідна будь-якого порядку може бути отримана, як границя відношення відповідної «скінченної різниці». В інженерній практиці метод сіток широко застосовується для розрахунку пружних систем і детально розглядався в роботах Г. Маркуса [1], П. М. Варвака [2], Ф. Блейха, Е. Мелана [3], Д. Ю. Панова [4], Л. В. Канторовича, В. І. Крилова [5]. Початок цього напрямку покладено у 1926 році в статті Л. А. Люстерніка [6].

У 1930-1935 роках з'являється ряд робіт, присвячених розв'язанню рівнянь в частинних похідних з двома змінними, в яких скінченно-різницева схема застосовується для однієї змінної, по іншій змінній функція залишається неперервною. Даний підхід іменують методом "ліній" чи "прямих", або диференціально-різницевим методом (ДРМ). Суть методу "прямих" полягає в простому алгоритмі зведення будь-якої дво- чи тривимірної задачі до одновимірної. Л. В. Канторович у роботах [7,8,9] зводив диференціальні рівняння в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. У такій постановці шукана функція залишалась неперервною вздовж однієї змінної, що підвищує точність розрахунку. Паралельно з Л. В. Канторовичем, основні підходи методу прямих були розвинуті М. Г. Слободянським у роботах [10, 11], який запропонував для редукції диференціальних рівнянь в частинних похідних використовувати систему звичайних диференціальних рівнянь (1), яка при приєднанні граничних умов визначає  $n$  невідомих функції  $u_k(x)$ :

$$\frac{5}{6}u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (1)$$

В даній роботі пропонується для зниження вимірності в комбінації з методом "прямих" використовувати проекційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова [12]. Розв'язок отримується, як проекція шуканої функції  $u$  на півпростір базисних функцій  $\varphi_a \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\}$ :

Розв'язок лінійного диференціального рівняння  $L(u) = f$  визначається за допомогою проекційного методу. Тут  $u \in B_1$  і  $f \in B_2$ , де  $B_1$  та  $B_2$  - банахові простори. Пробний розв'язок у  $N$  - вимірному просторі, де  $\varphi_a \subset B_1$ , встановлюється за допомогою лінійної комбінації  $u_a = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i$ .

Обирається також інший  $N$  - вимірний простір,  $\psi_a \subset B_2$ , де  $\psi_a \equiv \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n\}$ . Якщо позначити символом  $Pa$  оператор проекції простору  $B_2$  на півпростір  $\psi_a$ , то схему проекційного методу можна записати у вигляді (2):

$$Pa(L(u_a)) = Pa(f) \quad (2)$$

У випадку метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова ми маємо  $B_1 = B_2 = H$ , тобто гільбертовий простір, а оператор проекцій має форму (3):

$$Pa(v) = (v, \psi_k) = \int_R v \cdot \psi_k dx \quad (3)$$

Із рівняння (2) отримується система рівнянь (4) для визначення невідомих коефіцієнтів  $a_i$ :

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_i, \psi_k) a_i = (f, \psi_k) \quad k = 1, \dots, N \quad (4)$$

Якщо півпростори  $\varphi_i$  та  $\psi_i$  співпадають між собою, то рівняння (4) відповідає звичайному методу Гальоркіна. Детально методи Гальоркіна описані в монографії [13].

Розглянемо плоску деформацію пластини (рис. 1), НДС описується диференціальними рівняннями (5) та (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (6)$$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  - коефіцієнти Ляме,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  - тензори напружень;  $u$ ,  $v$  - тензори переміщень. В подальшому на основі рівнянь (5) та (6) складаються вихідні рівняння.

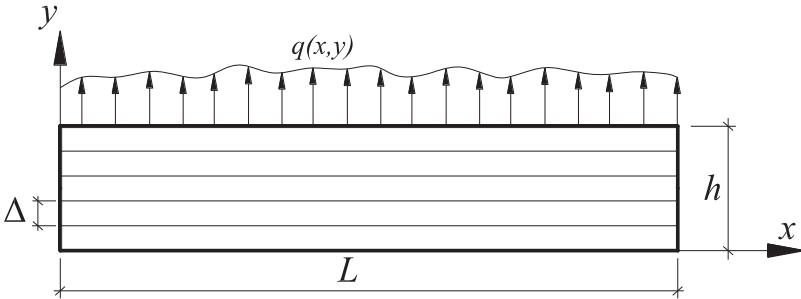


Рис. 1. Плоска деформація пластини.

Невідомі функції системи (5), (6) залежать від двох змінних. Для зниження вимірності розбиваємо пластину по поперечній координаті прямими на  $n-1$  смугу з кроком  $\Delta$  та обираємо базисні кусково-лінійні фінитні функції  $\varphi_i(y)$ , які задовольняють умовам:  $\varphi_i(y) = 1$  на  $i$ -й прямій,  $\varphi_i(y) = 0$  на усіх інших прямих.

Першою особливістю даного варіанта метода прямих є те, що вихідні рівняння, які описують НДС в загальному вигляді зручно записати як систему диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_x \end{array} \right. \quad (7)$$

Тут  $u^* = \mu u$ ,  $v^* = \mu v$ . Знижувати вимірність цих рівнянь по поперечній координаті  $y$  будемо за допомогою проекційного метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова [13]. При цьому невідомі функції розглядаємо як функції однієї координати  $y$ .

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \cdot \varphi_i(y) \quad (8)$$

По змінній  $y$  функції мають задовільняти граничним умовам на ліній  $y=0$  та  $y=h$ . Граничні умови штучно зведемо до природних граничних умов. Для цього кожна точка ліній  $y=0$  та  $y=h$  приєднана двома пружними в'язями заданої жорсткості до відповідної точки оточуючого середовища (рис. 2)

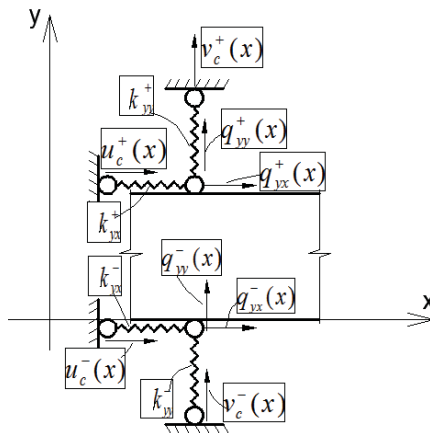


Рис. 2. Моделювання граничних умов на верхній та нижній грані пластини.

Тут  $k_{yx}^+$ ,  $k_{yy}^+$ ,  $k_{yx}^-$ ,  $k_{yy}^-$  - жорсткості пружних в'язей,

$u_c^+(x)$ ,  $v_c^+(x)$ ,  $u_c^-(x)$ ,  $v_c^-(x)$  - задані переміщення оточуючого середовища,  
 $q_{yy}^+(x)$ ,  $q_{yx}^+(x)$ ,  $q_{yy}^-(x)$ ,  $q_{yx}^-(x)$  - компоненти заданого навантаження.

Граничні умови записуються з умов розгляду рівноваги на границі  $y = 0$  та  $y = h$  і тому є природними граничними умовам, що забезпечує можливість застосування узагальненого метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tau_{yx}(x, h^-) &= k_{yx}^-(x)u(x, h^-) - q_{yx}^-(x) - k_{yx}^-(x)u_c^-(x) \\ \sigma_y(x, h^-) &= k_{yy}^-(x)v(x, h^-) - q_{yy}^-(x) - k_{yy}^-(x)v_c^-(x) \\ \tau_{yx}(x, h^+) &= -k_{yx}^+(x)u(x, h^+) + q_{yx}^+(x) + k_{yx}^+(x)u_c^+(x) \\ \sigma_y(x, h^+) &= -k_{yy}^+(x)v(x, h^+) + q_{yy}^+(x) + k_{yy}^+(x)v_c^+(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $h^- = 0$ ,  $h^+ = h$ , щоб підкреслити позначення величин на крайніх прямих.

Оскільки система базисних функцій косокутна і ненормована, потрібно будувати взаємний базис. Використовуючи індексну форму запису, функції основного базису запишемо з нижніми індексами, взаємного з верхніми.

$$\varphi^j(y) = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^n\} - \text{взаємна система базисних функцій.}$$

Будь-яку функцію можна розкласти як по основному базису, так і по взаємному:

$$f(x, y) = f^i(x) \cdot \varphi_i(y) = f_i(x) \cdot \varphi^i(y) \quad (10)$$

$f^i(x)$  - функція записана у вигляді коефіцієнтів, це проекція функції  $f(x, y)$  на основну систему базисних функцій.

$f_i(x)$  - функція записана у вигляді моментів, це площа, утворена функцією  $f(x, y)$  та основною системою базисних функцій.

При застосуванні косокутного базису в тензорній алгебрі обов'язково необхідно розглянути три варіанти компонент метричного тензора.

Двічі коваріантний метричний тензор:

$$g_{ij} = (\bar{e}_i, \bar{e}_j), \quad (11)$$

двічі контраваріантний метричний тензор, компоненти якого можна знаходити обертаючи матрицю  $\{g_{ij}\}$

$$\{g_{ij}\}^{-1} = g^{ij}. \quad (12)$$

Тоді взаємний базис знаходимо за співвідношеннями:

$$\bar{e}^j = g^{ij} \bar{e}_i. \quad (13)$$

Слід зауважити, що всі індекси мають однакові області зміни – від 1 до  $n$ . Має місце обернене співвідношення:

$$\bar{e}_i = g_{ij} e^j \quad (14)$$

У тензорній алгебрі співвідношення (13), (14) називаються операціями піднімання та опускання індексів відповідно. Необхідно також мати на увазі співвідношення

$$(\bar{e}_i, \bar{e}^j) = \delta_i^j = (\bar{e}^j, \bar{e}_i) = \delta_j^i, \quad (15)$$

що визначає мішані компоненти метричного тензора, які використовуються в операції заміни індексу. Тут  $\delta_{i \cdot}^{\bullet j}$ , або  $\delta_{\cdot j}^{i \bullet}$  - символ Кронекера, який = 1, якщо  $i = j$  та 0, якщо  $i \neq j$ . Матриця компонентів  $\{g_{ij}\}$  наведена в роботі [14].

У результаті редукована система диференціальних рівнянь може бути представлена трьома способами:

1) Переміщення і напруження записані у вигляді моментів:

$$\begin{aligned} \frac{du^*}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v^*_{\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xi} \\ \frac{dv^*}{dx} &= -b_{ij} g^{j\alpha} u^*_{\alpha} + \tau_{xyi} \\ \frac{d\sigma_{xi}}{dx} &= [k_{yx}^* (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k_{yx}^{*+} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n} g^{n\alpha}] \cdot u^*_{\alpha} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha} - \\ & [q_{yx}^- (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} + q_{yx}^+ (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n}] - [k_{yx}^- (x) u^*_{\alpha} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} + k_{yx}^{*+} (x) u^*_{\alpha} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n}] - X_i \\ \frac{d\tau_{xyi}}{dx} &= [k_{yy}^* (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k_{yy}^{*+} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n} g^{n\alpha}] v^*_{\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} + \\ & \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\gamma} b_{\gamma\beta} g^{\beta\alpha} v^*_{\alpha} - [q_{yy}^- (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} + q_{yy}^+ (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n}] - \\ & [k_{yy}^* (x) v^*_{\alpha} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} + k_{yy}^{*+} (x) v^*_{\alpha} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n}] - Y_i \end{aligned} \quad (16)$$

2) Переміщення і напруження записані у вигляді коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ik} b_{k\alpha} v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x^i \\ \frac{dv^*}{dx} &= -g^{ik} b_{k\alpha} u^*_{\alpha} + \tau_{xy}^i \\ \frac{d\sigma_x^i}{dx} &= [k_{yx}^- (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k_{yx}^{*+} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n} g^{n\alpha}] u^*_{\alpha} + g^{i\beta} b_{\alpha\beta} \tau_{xy}^{\alpha} - \\ & [q_{yx}^- (x) g^{1\alpha} + q_{yx}^+ (x) g^{n\alpha}] - [k_{yx}^- (x) \cdot u^*_{\alpha} (x) g^{1\alpha} + k_{yx}^{*+} (x) \cdot u^*_{\alpha} (x) g^{n\alpha}] - X^i \\ \frac{d\tau_{xy}^i}{dx} &= [k_{yy}^* (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k_{yy}^{*+} (x) \delta_{i \cdot}^{\bullet n} g^{n\alpha}] \cdot v^*_{\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ik} b_{\alpha k} \sigma_x^{\alpha} + \\ & \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{i\beta} b_{j\beta} g^{j\gamma} b_{\gamma\alpha} v^*_{\alpha} - [q_{yy}^- (x) g^{1\alpha} + q_{yy}^+ (x) g^{n\alpha}] - \\ & [k_{yy}^* (x) \cdot v^*_{\alpha} (x) g^{1\alpha} + k_{yy}^{*+} (x) \cdot v^*_{\alpha} (x) g^{n\alpha}] - Y^i \end{aligned} \quad (17)$$

3) Мішані рівняння – переміщення в коефіцієнтах, напруження в моментах:

$$\begin{aligned} \frac{du^{*i}}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ik} b_{k\alpha} v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} g^{i\alpha} \sigma_{x\alpha}, \\ \frac{dv^{*i}}{dx} &= -g^{ik} b_{k\alpha} u^{*\alpha} + g^{i\alpha} \tau_{xy\alpha}, \\ \frac{d\sigma_{xi}}{dx} &= [k_{yx}^{*-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} \delta_{\bullet\alpha}^{*1} + k_{yx}^{*+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n} \delta_{\bullet\alpha}^{*n}] u^{*\alpha} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha} - \\ & [q_{yx}^{-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} + q_{yx}^{+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n}] - [k_{yx}^{*-}(x) u_c^{*-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} + k_{yx}^{*+}(x) u_c^{*+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n}] - X_i \\ \frac{d\tau_{xy}^i}{dx} &= [k_{yy}^{*-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} \delta_{\bullet\alpha}^{*1} + k_{yy}^{*+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n} \delta_{\bullet\alpha}^{*n}] v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} + \\ & \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\alpha} v^{*\alpha} - [q_{yy}^{-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} + q_{yy}^{+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n}] - \\ & [k_{yy}^{*-}(x) v_c^{*-}(x) \delta_{i\bullet}^{*1} + k_{yy}^{*+}(x) v_c^{*+}(x) \delta_{i\bullet}^{*n}] - Y_i \end{aligned} \quad (18)$$

Тут  $k^* = k / \mu$ . Детально процес редуції описано в роботах [12, 14].

$\sigma_y(x, y)$  - функція, лінійно-залежна від  $v(x, y)$  та  $\sigma_x(x, y)$ , визначається після знаходження  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ , як комбінація

$$\sigma_y^i = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ij} v^{*j} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g_{ij} \sigma_x^j.$$

Граничні умови, які необхідні для знаходження єдиного розв'язку рівнянь отримуємо з розгляду граничних умов на відрізках  $x=0$  та  $x=l$ . Рівняння рівноваги записуємо теж у загальній формі, яка включає всі стандартні граничні умови (рис. 3).

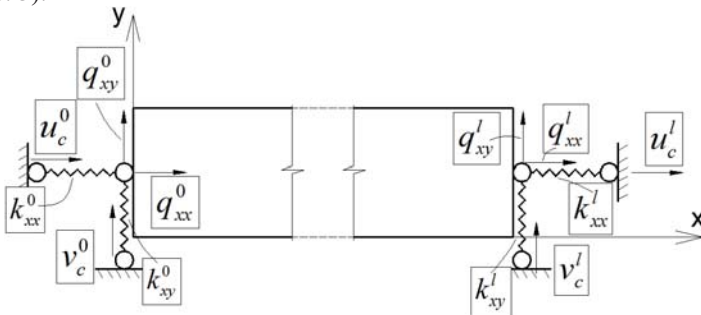


Рис. 3. Граничні умови на бічних гранях

З умов рівноваги на торцевих гранях знаходимо співвідношення:

При  $x = 0$  (19)

$$k_{xx}^{*0} u^*(0, y) - \sigma_x(0, y) = k_{xx}^0 u_c^0(y) + q_{xx}^0(y),$$

$$k_{xy}^{*0} v^*(0, y) - \tau_{xy}(0, y) = k_{xy}^0 v_c^0(y) + q_{xy}^0(y),$$

При  $x = l$

$$k_{xx}^{*l} u^*(l, y) - \sigma_x(l, y) = k_{xx}^l u_c^l(y) + q_{xx}^l(y),$$

$$k_{xy}^{*l} v^*(l, y) - \tau_{xy}(l, y) = k_{xy}^l v_c^l(y) + q_{xy}^l(y).$$

Важливо відзначити, що ці граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями, тому що вихідні рівняння є рівняннями в частинних похідних першого порядку. Ці обставини значно спрощують процедуру зниження вимірності.

На наступному етапі системи (16), (17), (18) диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку розв'язуються чисельно методом дискретної ортогоналізації С. К. Годунова. На алгоритмічній мові фортран розроблено 3 програми визначення НДС пластини для кожного підходу окремо.

Для тестування отриманих результатів розглянемо циліндричний згин пластини (рис 4), жорстко закріпленої зліва та шарнірно зправа. Пластина навантажена розподіленим навантаженням  $q(x, y) = -7 \text{ кН/м}$ , Довжина пластини  $l = 2 \text{ м}$ , висота  $h = 0,5 \text{ м}$ , модуль пружності  $E = 2,4 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,35$ . Потрібно визначити НДС.

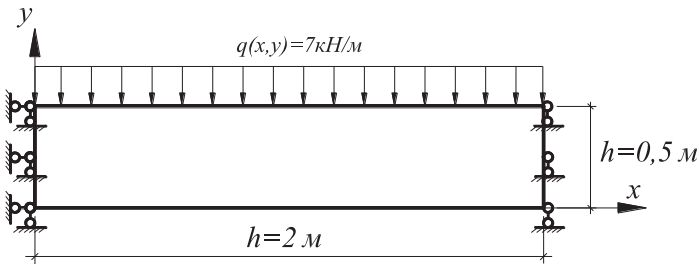


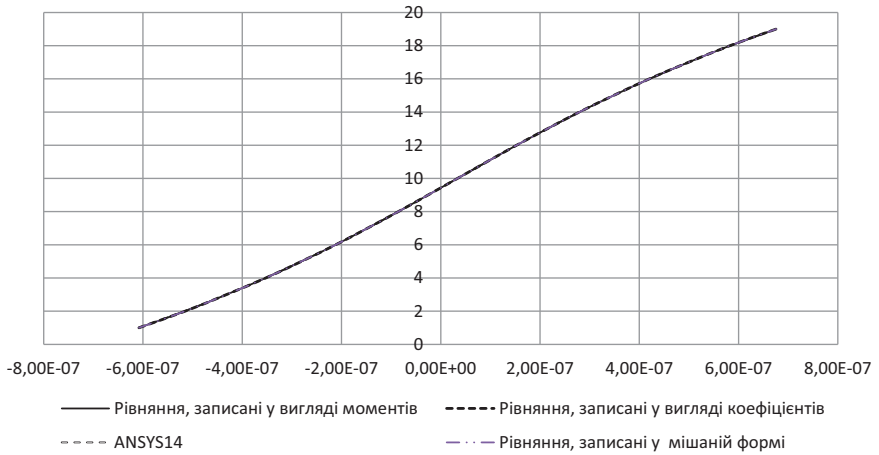
Рис. 3. Шарнірно-закріплена пластина.

Розбиваємо пластину на 19 прямих по координаті  $y$  та встановлюємо 19 точок ортогоналізації по координаті  $x$ .

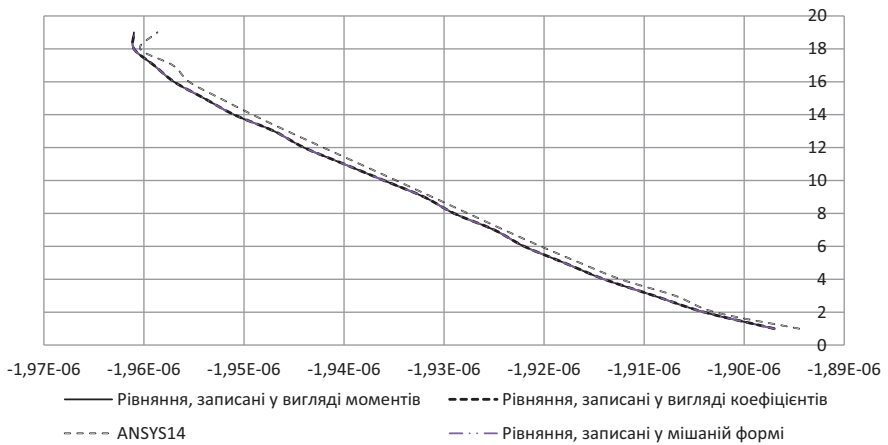
На графіках 1-5 показані переміщення та напруження в перерізі 6-ї точки ортогоналізації. Для порівняння отриманих результатів, дана задача розв'язана методом скінченних елементів у програмному комплексі ANSYS14, використовуючи скінченний елемент "8 node 183". В таблиці 1 приведені результати, отримані за методом "прямих" та в програмному комплексі ANSYS14.



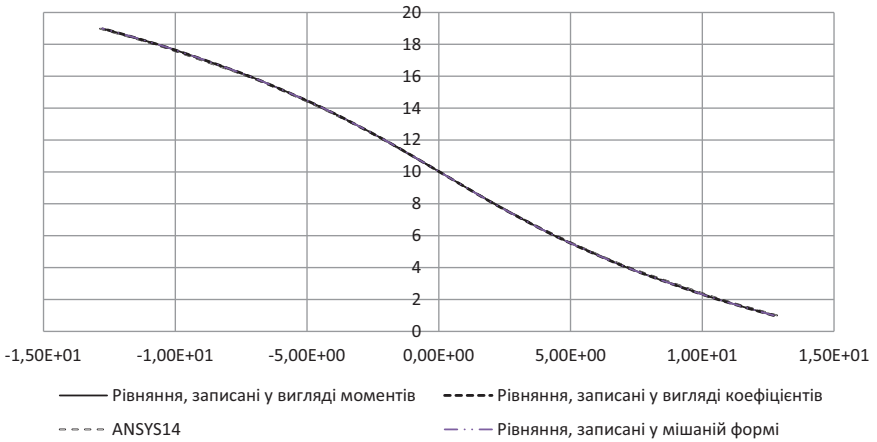
**Графік №1 Горизонтальне переміщення в перерізі 6-ї точки ортогоналізації (м)**



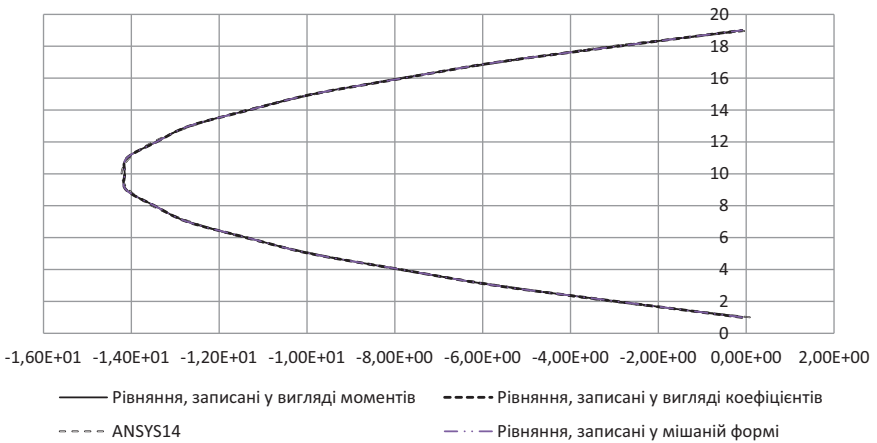
**Графік №2 Вертикальне переміщення в перерізі 6-ї точки ортогоналізації (м)**



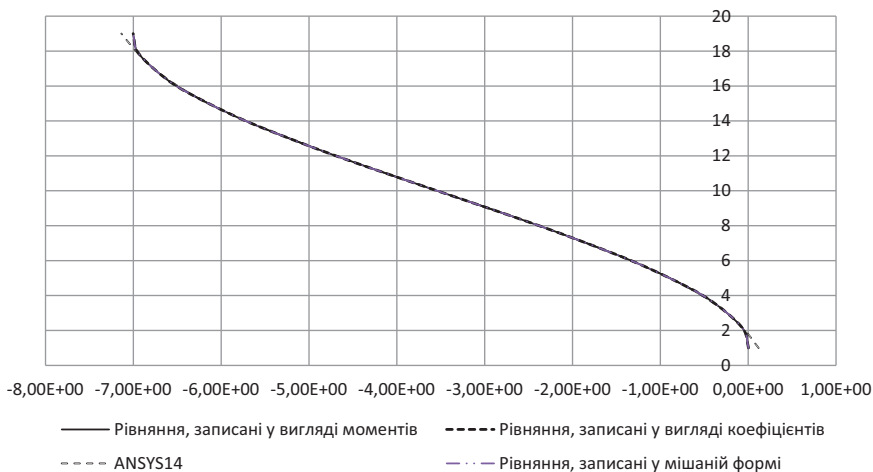
**Графік №3  $\sigma_x$  в перерізі 6-ї точки ортогоналізації  
(кН/м<sup>2</sup>)**



**Графік №4  $\tau_{xy}$  в перерізі 6-ї точки ортогоналізації  
(кН/м<sup>2</sup>)**



**Графік №5  $\sigma_y$  в перерізі 6-ї точки ортогоналізації (кН/м<sup>2</sup>)**



**Таблиця 1**

№ прямої	Вертикальне переміщення (м)			$\sigma_x$ (кПа)			$\sigma_y$ (кПа)		
	ANSYS14	Метод прямих	Похибка %	ANSYS14	Метод прямих	Похибка %	ANSYS14	Метод прямих	Похибка %
1	-1,89451E-06	-1,90E-06	0,13	12,839	12,710	1,00	0,11793	0,0032	97,32
2	-1,9029E-06	-1,90E-06	0,06	10,736	10,600	1,26	-0,03617	-0,0469	29,54
3	-1,9069E-06	-1,91E-06	0,11	8,949	8,808	1,57	-0,23982	-0,2414	0,66
4	-1,91235E-06	-1,91E-06	0,09	7,247	7,147	1,38	-0,52844	-0,5144	2,66
5	-1,91642E-06	-1,92E-06	0,08	5,795	5,724	1,22	-0,88987	-0,8950	0,58
6	-1,92032E-06	-1,92E-06	0,09	4,474	4,393	1,80	-1,33705	-1,3320	0,38
7	-1,92401E-06	-1,93E-06	0,05	3,263	3,221	1,28	-1,83877	-1,8400	0,07
8	-1,9276E-06	-1,93E-06	0,07	2,139	2,102	1,74	-2,38273	-2,3810	0,07
9	-1,93118E-06	-1,93E-06	0,04	1,072	1,060	1,11	-2,95529	-2,9560	0,02
10	-1,93477E-06	-1,94E-06	0,06	0,030	0,033	7,56	-3,54090	-3,5420	0,03
11	-1,93841E-06	-1,94E-06	0,08	-1,015	-0,997	1,79	-4,12439	-4,1240	0,01
12	-1,94205E-06	-1,94E-06	0,10	-2,092	-2,051	1,98	-4,69072	-4,6940	0,07
13	-1,94566E-06	-1,95E-06	0,07	-3,232	-3,185	1,45	-5,22474	-5,2240	0,01
14	-1,94915E-06	-1,95E-06	0,09	-4,463	-4,382	1,81	-5,71393	-5,7210	0,12
15	-1,9524E-06	-1,95E-06	0,08	-5,805	-5,733	1,25	-6,14778	-6,1420	0,09
16	-1,95549E-06	-1,96E-06	0,08	-7,275	-7,182	1,27	-6,49346	-6,5100	0,25
17	-1,95711E-06	-1,96E-06	0,10	-9,005	-8,859	1,62	-6,77091	-6,7690	0,03
18	-1,96037E-06	-1,96E-06	0,03	-10,790	-10,670	1,11	-6,97055	-6,9570	0,19
19	-1,95867E-06	-1,96E-06	0,12	-12,894	-12,770	0,96	-7,13592	-7,0020	1,88

**Висновки:** Комбінація метода “прямих” з узагальненим проєкційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова підвищує точність розрахунку, спрощує процес редукції диференціальних рівнянь. Зникає проблема врахування законтурних прямих (точок), що є недоліком класичного підходу методу “прямих”. Оскільки в роботі використовується косокутна базисна система, то редукція рівнянь можлива трьома способами. При порівнянні з даними, отриманими в програмному комплексі ANSYS14, найбільша відносна похибка не перевищує 3%. На граничних прямих результат дещо відрізняється. Дана методика має великі перспективи при переході до задач динаміки і тривимірних задач.

### Література

1. Маркус Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий. - Киев, ДНТБУ, 1936.
2. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. 1, 1949; ч. II, 1952. – Киев, изд. АН УССР.
3. Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений. - Харьков, ОНТИ ДНТБУ НКТП, 1936.
4. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. 3-е. – М.: Гостехиздат, 1949.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Гостехиздат, 1949.
6. Люстерник Л. А. Ueber einige Anwendungen der direkten Methoden in Variations-rechnung. Матем. сборн., т.33, 1926. – С. 189-200.
7. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, VII серия, 1933.
8. Канторович Л. В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1934.
9. Канторович Л. В., Фрумкин П. В. О применении одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к задаче о кручении призматических стержней. Труды Лен. ин-та инж. пром. ст-ва, вып. 4, 1937.
10. Слободянский М. Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. матем. и мех., т. 3, вып. 1, 1939.
11. Слободянский М. Г. Пространственные задачи теории упругости для призматических тел. Уч. Зап. Моск. Гос. Ун-та, вып. 39 (механика), 1940.
12. Чибіряков В. К., Станкевич А. М., Левківський Д. В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих//

Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – С. 613 – 624.

13. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

14. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – С. 413 – 423.

### **Аннотация**

Для снижения размерности исходных уравнений плоской задачи теории упругости, в работе предложено применять классический вариант метода "прямых" в сочетании с обобщенным методом Бубнова-Галеркина-Петрова. Как координатные функции используются кусочно-линейные финитные функции. На основе данного подхода разработано 3 варианта редуцированных дифференциальных уравнений: уравнения в моментах, коэффициентах, и уравнения смешанного типа. Полученные уравнения предлагается решать численно, с помощью метода дискретной ортогонализации С.К. Годунова. На конкретном примере показана сходимость полученных результатов по трем подходам.

### **Abstract**

To reduce the original equations dimension plane problem of elasticity in the proposed method to use the classic version of "direct" in conjunction with the generalized method of Bubnov-Galerkin-Petrov. As coordinate functions are used piecewise linear finite function. Based on this approach the 3 options reduced types differential equations: the equation at the moment, coefficients and equations of mixed type. The equations proposed to solve numerically using the method of discrete orthogonalization S.K. Godunov. In the particular example shows the convergence of the results for the three approaches.