УДК 519.21 канд. ф-м. наук доц. Наголкіна З.І.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ УРАХУВАННЯ ЗОВНІШНЬОГО ВПЛИВУ В ЗАДАЧАХ НАДІЙНОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ СПОРУД.

Урахування зовнішнього впливу на надійність будівельних споруд моделюється стохастичним диференціальним рівнянням. Розглядається вплив процесів радіаційно кондуктивного теплообміну.

Ключові слова. Будівельні споруди, стохастичні рівняння, радіаційно–кондуктивний теплообмін, замкнений оператор, функціональний простір, розрішаючий оператор, математичне сподівання. розвязок рівняння, умови існування.

Надійність будівельних споруд обумовлена внутрішніми і зовнішніми факторами. Внутрішні пов'язані з несучою властивістю і залежать від міцності конструктивних матеріалів. Крім того, до внутрішніх факторів можна віднести випадковості, які є наслідком неточності розрахункового методу 1. Друга група факторів враховує зовнішній вплив середовища, в якому знаходиться будівельна споруда. Це динамічні процеси, які моделюються диференціальними рівняннями з відповідними граничними умовами. Випадковий характер впливу описується стохастичним диференціальним рівнянням. Одним із суттєвих є вплив радіаційно-кондуктивного теплообміну. При цьому зовнішні поверхні споруд піддаються не тільки атмосферним перепадам, а і сонячній радіації. Як відомо, тепловий потік, пов'язаний з сонячною радіацією, розподілено за законом Стефана-Больцмана $q_p = CT^4$, де C - коефіцієнт чорноти тіла. Тепловий потік, пов'язаний з сонячною радіацією, може призвести до суттєвих добових коливань температури, що в свою чергу впливає на міцність будівельного матеріалу. В детермінованому випадку процеси теплопровідності описуються рівнянням

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = div(kqradT) + q(T)p \qquad (1)$$

де T - температура, ρ - густина, c_p-питома теплоємність, к-теплопровідність, q -тепловий потік. Якщо тепло виділяється внаслідок хімічної реакції, то $q(T) = Qe^{-H/RT}$ - коефіцієнт Ареніуса 3. $H, R-$величини, пов'язані з хімічними властивостями матеріалу. В данній роботі динаміка переносу тепла, що описується (1) під дією випадкових факторів моделюється стохастичним диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+b(t,T)+B(t,T)w'(t) \qquad (2)$$

де $a^2=\frac{k}{\rho c_p}, b(t,T)=\frac{p}{\rho c_p}q(T).$

Вважаємо, що теплопровідність стала. Розглянемо рівняння теплопровідності в загальному вигляді в функціональному гільбертовому просторі $H=L_2$. Будемо розглядати рівняння в деякому підпросторі D двічі неперервно-диференційованих функцій $D\subset H$. Будемо вважати, що $u(t,x)$ визначає температуру в деякій точці з узагальненою координатою x в момент часу t. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(t,u),\ u(t_0,x)=f(x)\in D. \qquad (3)$$

При виконанні умов існування 2 розвязок рівняння (3) може бути представлений у вигляді

$$u(t)=U(t,t_0)u(t_0,x)+\int_{t_0}^{t}U(t,s)b(s,u(s))ds,\ u(t)=u(t,x). \qquad (4)$$

де $U(t,s)$ - розрішаючий оператор рівняння теплопровідності.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (5)$$

який має оцінку $\|U(t,s)u(s)\|\le e^{\alpha(t-s)}\|u(s)\|$. Розглянемо окремо нелінійне диференціальне рівняння і задачу Коші для нього

$$\frac{\partial v}{\partial t}=b(t,v),\ v(t_0,x)=v_0\in D. \qquad (6)$$

Застосуємо для дослідження рівняння (3), (4) мультиплікативно-різницеву схему. Нехай $t_0,t_1,.....t_i,t_{i+1},...t_n$ - розбиття відрізка $[t_0,T]$ точками і, $n\to\infty$. На кожному з цих відрізків $[t_i,t_{i+1}]$ розглянемо окремо диференціальні рівняння (5) та (6).

Суть методу полягає в послідовному розв’язанні на кожному малому інтервалі простих рівнянь, а потім склеюванні одержаних результатів за неперервністю. При цьому $\max|t_{i+1}-t_i| \to 0$. Коефіцієнти рівнянь вважаються такими, щоб забезпечувалось локальне існування розвязку задачі Коші.

Розвязок рівняння (5) на відрізку $[t_i t_{i+1}]$ буде таким

$$U(t_{i+1},t_i)u(t_i)=u(t_{i+1}). \qquad (7)$$

Відповідно

$u(t)=u(t,x)=U(t,t_0)f(x), t\in[t_0,t_1]$. $f(x)=u(t_0,x)$ - початкове значення. Розглянемо на відрізку $[t_i,t_{i+1}]$ нелінійне рівняння (6). За формулою Тейлора на $[t_i,t_{i+1}]$ виразимо значення $v(t_{i+1})$, обмежуючись двома членами

$$v(t_{i+1})=v(t_i)+\frac{dv(t_i)}{dt}(t_{i+1}-t_i)=v(t_i)+(b(t_i,v(t_i))(t_{i+1}-t_i)$$

Тоді дія оператора $V(t_{i+1},t_i)$ в D визначається співвідношенням

$$v(t_{i+1})=V(t_{i+1},t_i)\circ v(t_i)=V(t_{i+1},t_i,v(t_i)). \qquad (8)$$

Відповідно, при $t_i=t_0$ буде

$$v(t_1)=v(t_0)+b(t_0,v_0)(t_1-t_0).$$

Застосуємо до $v(t_1)$ оператор $U(t_1,t_0)$ за формулою (7). Тоді

$$u(t_1)=U(t_1,t_0)V(t_1,t_0)v_0.$$

Узгоджуючи початкові дані, а також (7),(8) - одержимо наближений розвязок рвіняння (3) і (4) на відрізку $[t_i,t_{i+1}]$ вигляду $\bar{u}(t)=U(t,t_i)V(t,t_i,v_i)$, де $t\in[t_i,t_{i+1}]$. Тоді наближений розвязок рівняння (3) має мультиплікативне представлення наступного вигляду

$$\bar{u}(t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}U(t_{i+1},t_i)V(t_{i+1},t_i)\circ v_0 \qquad (9).$$

У виразі (9) враховується лінійність оператора $U(t,s)$ (7) і не лінійність $V(t,s)$ (8).

Для урахування випадкових факторів розглядають стохастичне диференціальне рівняння

$$du(t)=(Au(t)+b(t,u(t))dt+B(t,u(t))dw(t) \qquad (10)$$

де $A=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ - диференціальний оператор в $D\subset H$. Коефіцієнти $b(t,u),B(t,u)$ задовольняють стандартним умовам існування розвязку стохастичного диференціального рівняння 3. Методом мультиплікативних представлень стохастичного рівняння, узгоджуючи певним чином початкові умови 4 можна побудувати наближений розвязок рівняння (10), який має вигляд

$$u(t) = P - \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n} S(t_{i+1},t_i)U(t_{i+1},t_i)V(t_{i+1},t_i)\circ v_0 \qquad (11)$$

де $S(t_{i+1},t_i)$ - розрішаючий оператор стохастичного рівняння на відрізку $[t_i,t_{i+1}]$

$$S(t,t_i)u(t_i) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t} B(s,S(s,t_i)\circ u(t_i))dw(s) \qquad (12)$$

Користуючись оцінками розрішаючих операторів (7),(8),(12) можна знайти аналогічно 4 оцінку математичного сподівання і дисперсії наближеного розвязку стохастичного рівняння (10). Це дасть змогу, скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити відповідну імовірність, що може бути важливим при аналізі надійности деяких фрагментів будівельних споруд.

Література

1. Усаковский С.Б. Прикладные задачи теории надежности сооружений. О новой парадигме теории расчета сооружений. Монография. Киев 2014.
2. Д. Хенри. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., Мир, 1985г.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория. случайных процессов, т. 3. Изд. Наука, М, 1973г.
4. Белопольская Я.И., Наголкина З.И. О мультипликативных представлениях решений нелинейных стохастических уравнений, сб: Вероятностные распределения в бесконечномерном пространстве, К., Наукова думка, 1978.

Аннотация.

Учет влияния внешних факторов на надежность строительных сооружений моделируется стохастическим дифференциальным уравнением. При этом учитываются процессы радиационно-кондуктивного теплообмена.

Ключевые слова: Строительные сооружения, стохастические уравнения, кондуктивный теплообмен, замкнутый оператор, функциональное пространство, разрешающий оператор, математическое ожидание, решение уравнения, условия существования.

Annotation.

Impact of random factors on the reliability of structures modeled with stohastic differential equation. Were considered the heat transfer processes.