УДК 629.017 (07)

І.І. Назаренко, д-р техн. наук, професор КНУБА,
В.І. Лесько, асистент КНУБА

АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОДИ ОЦІНКИ ПОКАЗНИКІВ БЕЗВІДМОВНОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ МАШИН ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ОРДИНАРНИХ ПОТОКІВ ВІДМОВ З ОБМЕЖЕНОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

Поширеною практикою при дослідженні надійності будівельних машин є безпідставне віднесення потоку відмов машин до найпростіших пуассонівських, тоді коли в якості реальних моделей потоків відмов БДМ скоріше слід розглядати потоки відмов з обмеженою післядією. В певній мірі такі грубі припущення іноді себе виправдовують, оскільки значно спрощують методи розрахунку, але з іншого боку це призводить до значних похибок в оцінці показників надійності. Розглянемо існуючі методи та можливості їх використання для реальних потоків відмов БДМ.

В основних роботах по теорії надійності [1, 2] показано, що параметр потоку відмов, якщо величини наробітку між відмовами однаково розподіленні та незалежні і представляють собою ординарні потоки із обмеженою післядією, пов’язаний із густиною розподілу *f(t)* інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду із різничним ядром

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t f(t-\tau)\omega(\tau)d\tau; \tag{1}$$

$$f(t) = \omega(t) - \int_0^t \omega(t-\tau) f(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Рішення інтегрального рівняння (1) не завжди вдається рішити аналітично, в кінцевому вигляді. В деяких випадках, якщо існують перетворення Лапласа $\omega(s)$ та $f(s)$, то в операторській формі параметр потоку відмов та функція густини розподілу наробітку на відмову виражаються через перетворення Лапласа [3, 4]

$$\omega(s) = \frac{f(s)}{1-f(s)}; \quad f(s) = \frac{\omega(s)}{1+\omega(s)}, \tag{3}$$

де $\omega(s) = \int_0^\infty e^{-st}\omega(t)dt; \ f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ - перетворення Лапласа функцій відповідно $\omega(t)$ та $f(t)$.

Рішення рівняння з використанням формули (3) пов’язане з переходом із області зображення до функції $\omega(t)$.

Зворотне перетворення Лапласа в кінцевому вигляді може бути використане тільки для деяких законів розподілу відмов *f*(*t*), таких, як ступеневий та гамма-розподіл з параметром форми $m < 4$. А взагалі, найти рішення для інших законів розподілу $f(t)$ не видається за можливе.

Для визначення параметру потоку відмов використовується також формула

$$\omega(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t), \tag{4}$$

де $f_m(t) - m -$ стисла згортка функції густини розподілу $f(t)$

$$f_m(t) = \int_0^t f_{m-1}(t-\tau) f(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Але m – стислі згортки функцій $f(t)$ за формулою (5) визначаються в кінцевому вигляді лише в деяких випадках, наприклад, при нормальному законі розподілу.

В цьому випадку вони визначаються наступним чином

$$f^m(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(t-mT_0)^2}{2\sigma^2 m}};\qquad(6)$$

$$F^m(t)=\Phi\left[\frac{t-mT_0}{\sigma\sqrt{m}}\right].\qquad(7)$$

де $\Phi(z)$ – функція Лапласа, $z=\dfrac{t-mT_0}{\sigma\sqrt{m}}$, а T_0 та σ – параметри нормального закону розподілу (середній час безвідмовної роботи та середнє квадратичне відхилення).

Математичне очікування числа відмов

$$\Omega(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\Phi\left[\frac{t-mT_0}{\sigma\sqrt{m}}\right].\qquad(8)$$

Параметр потоку відмов при нормальному законі розподілу наробітку до відмов визначається за формулою

$$\omega(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi m}}\exp\left[-\frac{t-mT_0}{2m\sigma^2}\right].\qquad(9)$$

Математичне очікування наробітку до m – ої відмови та дисперсія мають вирази

$$M[t_m]=mT_0;\quad D(t_m)=m\sigma^2.\qquad(10)$$

Значення T_0 рекомендується визначати за формулою

$$T_0=\frac{t_2-t_1}{[\Omega(t_2)-\Omega(t_1)]}=\frac{\Delta t}{\Omega(t+\Delta t/2)-\Omega(t-\Delta t/2)},\qquad(11)$$

У випадку, коли $3\sigma-T_0>0$, то для визначення $\omega(t)$ застосовується зрізаний нормальний закон розподілу

$$\omega(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m}{\sqrt{2\pi m\sigma}}e^{-\frac{(t-mT_0)}{2\sigma^2 m}},\qquad(12)$$

де C_m – стала зрізаного нормального закону розподілу, яка визначається з умови

$$\int_0^{\infty}f^m(t)dt=1,$$

і дорівнює

$$C_m=\frac{\sqrt{0{,}636}}{\sigma\sqrt{m}\left[1+\Phi\left(\sqrt{\frac{m}{2}\cdot\frac{T_0}{\sigma}}\right)\right]}$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція Лапласа.

В деяких роботах доказано, що здатність до операцій згортки має також дифузійний (Diffusive) розподіл, який відповідає немонотонному (No monotonic) марковському процесу (DN – розподіл). Використання цього закону для описування закономірностей відмов дає змогу визначити основні показники надійності за відомими функціями розподілу

$$F^m(t)=\Phi\left(\frac{t-mT_0}{V_0\sqrt{tT_0}}\right)+e^{2m/V_0^2}\Phi\left(-\frac{t+mT_0}{V_0\sqrt{tT_0}}\right).\qquad(13)$$

Математичне очікування та дисперсія часу до m – ої відмови відповідно мають вирази

$$M[t_m]=mT_0;\quad D[t_m]=mV_0^2T_0^2.\qquad(14)$$

Функція відновлення $\Omega(t)$ та параметр потоку відмов $\omega(t)$ визначаються за формулами

$$\Omega(t) = M\left[r(t) = m\right] = \sum_{m=1}^{\infty} F^m(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{t - mT_1}{V_1\sqrt{tT_1}}\right) + e^{2m/V_0^2}\Phi\left(-\frac{t + mT_1}{V_1\sqrt{tT_1}}\right)\right]. \quad (15)$$

$$\omega(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\sqrt{T_1}}{V_1\cdot t\sqrt{2\pi\cdot t}}\exp\left[-\frac{(t - mT_1)^2}{2V_1^2tT_1}\right]. \quad (16)$$

При цьому рекомендується вибирати число m для формули (16) в межах $3 \le m \le 6$.

Імовірність безвідмовної роботи для нормального та DN – розподілу в інтервалі (*t, t* + τ), коли *t* збігається з моментом початку функціонування після чергової відмови (відновлення), можна визначити відповідно за формулами

$$P(t) = 1 - \Phi\left[\frac{t - mT_0}{\sigma\sqrt{m}}\right]. \quad (17)$$

$$P(t) = \Phi\left[\frac{T_0(t) - t}{V_1\sqrt{t\cdot T_0(t)}}\right] - \exp\left[\frac{2m}{V_1^2}\right]\Phi\left[-\frac{T_0(t) + t}{V_1\sqrt{t\cdot T_0(t)}}\right]. \quad (18)$$

Але, якщо припустити, що наробіток між відмовами підпорядковується ступеневому (експоненціальному) закону розподілу, тобто коли процес відновлення є пуассонівським потоком (ординарним без післядії), то для визначення $\Omega(t)$ користуємось такою формулою

$$\Omega(t) = M\left[r(t)\right] = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t} = \lambda t. \quad (19)$$

Параметр потоку відмов $\omega(t)$ при цьому дорівнює інтенсивності відмов

$$\omega(t) = \lambda(t) = \omega = \lambda = const. \quad (20)$$

Імовірність безвідмовної роботи *P(t)* при $\omega(t) = \lambda$ визначаємо за формулою

$$P(t) = \exp\left[-\omega t\right]. \quad (21)$$

В теорії надійності на практиці широко застосовується асимптотична властивість параметра потоку відмов якщо неперервна функція густини розподілу $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то існує усталене значення параметру потоку відмов

$$\overline{\omega}(t) = \overline{\omega}_{уст} = \lim_{t\to\infty}\omega(t) = \frac{1}{T_0}, \quad (22)$$

де T_0 – середнє значення наробітку до першої відмови.

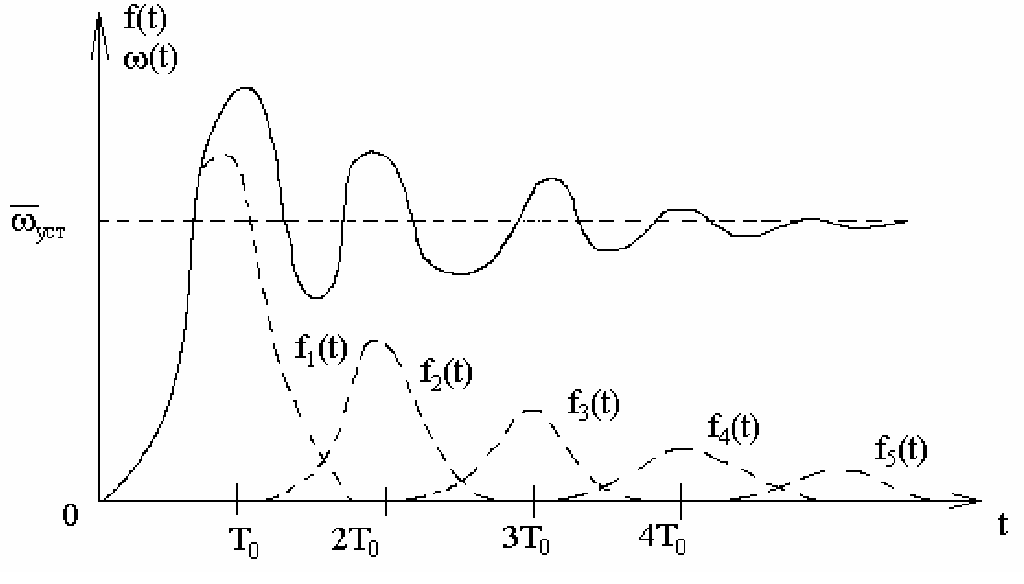

Рис. 1. Параметр потоку відмов

Ця важлива властивість порівняно просто дозволяє визначити усталене значення функції $\overline{\omega}(t)$ (рис. 1), але, вже відмічалося вище, таке припущення не завжди відповідає реальному потоку відмов будівельних машин.

Виходячи з вищесказаного, можна констатувати, що, використовуючи інтегральне рівняння (1), можна лише для деяких з теоретичних законів отримати його аналітичне рішення.

Оскільки для інших законів розподілу отримати аналітичний вираз $\omega(t)$ та $f_m(t)$ неможливо, то при вирішенні практичних задач надійності, в основі яких лежить обробка первісної статистичної інформації і коли не завжди є потреба або можливість встановлення закону розподілу, інтегральне рівняння Вольтерра (1) доцільно інтегрувати чисельними методами.

Для цього функції $\omega(t)$ та $f(t)$ задамо у вигляді дискретного ряду ω_i або f_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Введемо позначення для інтегральної функції

$$F(t,\tau) = \omega(\tau) \cdot f(t-\tau). \qquad (23)$$

В дискретній формі після заміни змінної t на m, а τ на i, вираз (23) запишеться у вигляді

$$F(m,i) = \omega(i) \cdot f(m-i). \qquad (24)$$

При $m = 1$ із рівняння (1) отримаємо $\omega_0 = f_0$.

Якщо $m = 1$, то застосовуючи чисельний метод інтегрування – метод трапецій (рис. 2, а), отримаємо

$$\int_0^t \omega(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau = \frac{\Delta t}{2} \cdot (\omega_0 f_1 + \omega_1 f_0),$$

де Δt - шаг інтегрування.

Рівняння (1) для цього випадку запишеться у вигляді

$$\omega_1 = f_1 + \frac{\Delta t}{2}(\omega_0 f_1 + \omega_1 f_0).$$

При $m = 2$ (рис. 2, б)

$$\int_0^t \omega(\tau) f(t-\tau) d\tau \approx \frac{\Delta t}{2}(\omega_0 f_2 + \omega_1 f_1 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_0).$$

В даному випадку рівняння (1) має вигляд

$$\omega_2 = f_2 + \frac{\Delta t}{2}(\omega_0 f_2 + 2\omega_1 f_1 + \omega_2 f_0).$$

В загальному випадку для довільного числа m маємо (рис. 2, в)

$$\int_0^t \omega(\tau) f(t-\tau) d\tau = \frac{\Delta t}{2}\left[(\omega_0 f_m + \omega_1 f_{m-1}) + \ldots + (\omega_{m-1} f_1 + \omega_m f_0)\right]. \qquad (25)$$

З виразу (25) одержимо

$$\omega_m = f_m + \frac{\Delta t}{2}(\omega_0 f_m + 2\omega_1 f_{m-1} + 2\omega_2 f_{m-2} + \ldots + 2\omega_{m-1} f_1 + \omega_m f_o);$$

або

$$\omega_m = f_m + \frac{\Delta t}{2}\left(\omega_0 f_m - 2\sum_{i=1}^{m-1} \omega_i f_{m-i} + \omega_m f_0\right).$$

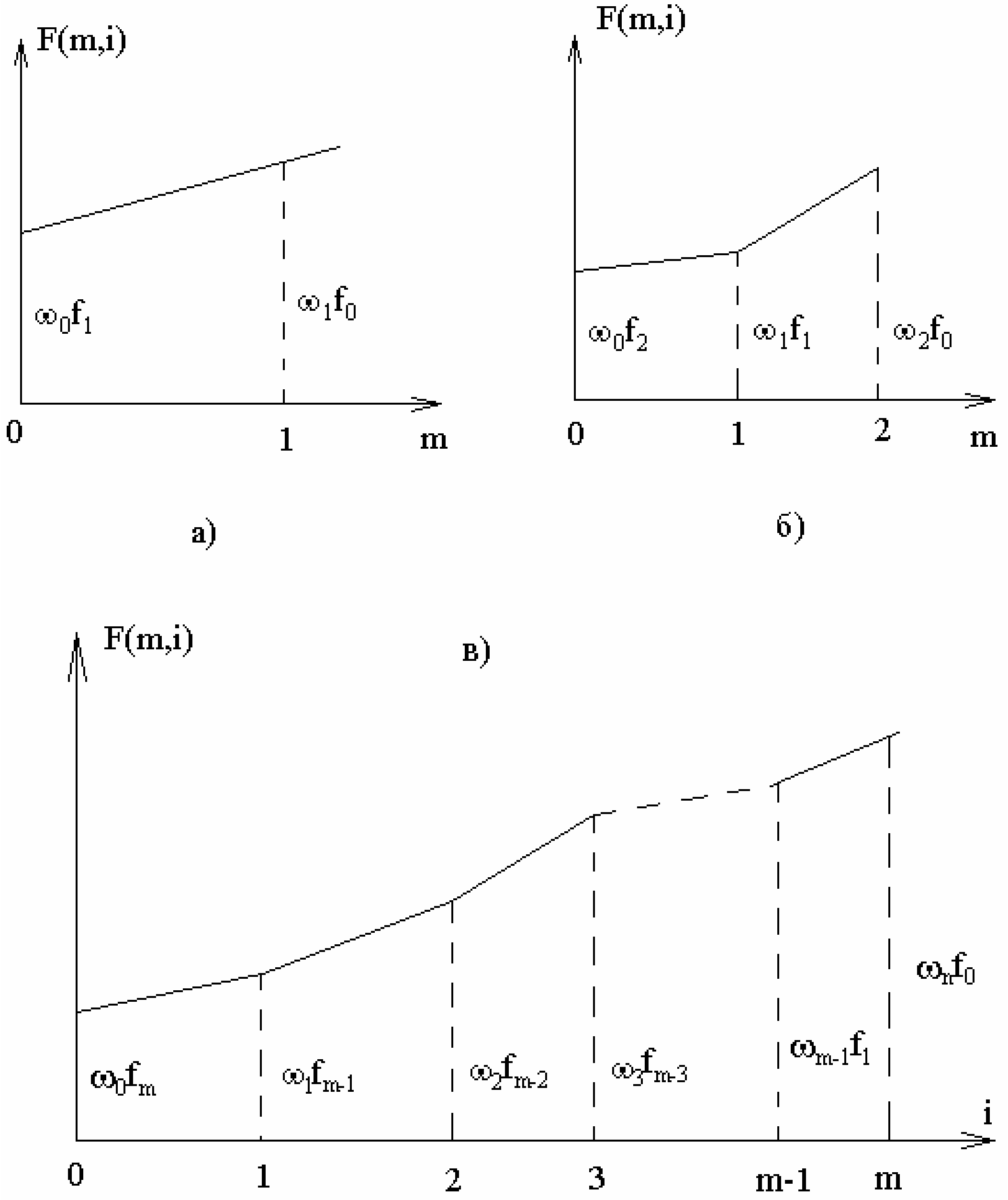

Рис. 2. Чисельне рішення інтегрального рівняння:
а) m = 1; б) m = 2; в) загальний випадок

Таким чином одержуємо наступні співвідношення

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_0 = f_0;\\
&\omega_1 = f_1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\omega_0 f_1 + \omega_1 f_0\right);\\
&\omega_2 = f_2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\omega_0 f_3 + 2\omega_1 f_2 + 2\omega_2 f_1 + \omega_3 f_0\right);\\
&\omega_3 = f_3 + \frac{\Delta t}{2}\left(\omega_0 f_3 + 2\omega_1 f_2 + 2\omega_2 f_1 + \omega_3 f_0\right);\\
&\ldots\\
&\omega_m = f_m + \frac{\Delta t}{2}\left(\omega_0 f_m + 2\sum_{i=1}^{m-1}\omega_i f_{m-1} + \omega_m f_0\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Система дозволяє по відомому дискретному ряду значень густини розподілу наробітків на відмову f_i знайти ряд значень параметру потоку відмов ω_i

$$\left.\begin{array}{l}\omega_0 = f_0;\\ \omega_1 = \left[f_1 + \Delta t\omega_0 f_1/2\right]/\left(1-\Delta t f_0/2\right);\\ \omega_2 = \left[f_2 + \Delta t\left(\omega_0 f_2 + 2\omega_1 f_1\right)/2\right]/\left(1-\Delta t f_0/2\right);\\ \dots\\ \omega_m = \left[f_m + \Delta t\left(\omega_0 f_m + 2\sum\limits_{i=1}^{m-1}\omega_i f_{m-1}\right)/2\right]\Big/\left(1-\Delta t f_0/2\right)\end{array}\right\} \quad (27)$$

Якщо відомий ряд значень параметру потоку відмов ω_i, то по співвідношеннях (26) можна здійснити зворотне рішення інтегрального рівняння (1) та визначити ряд значень густини розподілу f_i наробітку на відмову

$$\left.\begin{array}{l}f_0 = \omega_0;\\ f_1 = \left(\omega_1 - \Delta t\omega_1 f_0/2\right)/\left(1+\Delta t\omega_0/2\right);\\ f_2 = \left[\omega_2 - \Delta t\left(2\omega_1 f_1 + \omega_2 f_0\right)/2\right]/\left(1+\Delta t\omega_0/2\right);\\ \dots\\ f_m = \left[\omega_m\left(1-\Delta t f_0/2\right) - \Delta t\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i f_{m-1}\right]\Big/\left(1+\Delta t\omega_0/2\right)\end{array}\right\} \quad (28)$$

Розраховуючи за статистичними даними про відмови оцінки значення параметру відмов в різних інтервалах наробітку Δt, а по них рішаючи інтегральне рівняння (1) за допомогою рекурентних співвідношень (28) визначаємо густину розподілу наробітку на відмову у вигляді дискретного ряду f_0, f_1, f_2, ... , f_{m}. Інтегруючи функцію $f(t)$ визначаємо імовірність відмов *Q(t)* та знаходимо імовірність безвідмовної роботи *P(t)*

$$Q(t) = \int\limits_0^t f(t)dt; \quad (29)$$

$$P(t) = 1 - Q(t). \quad (30)$$

Тестові порівняння результатів дослідження параметрів потоку відмов $\omega(t)$ та ймовірностей безвідмовної роботи $P(t)$ однокових екскаваторів з гідроприводом, отриманих аналітичними та чисельними методами показали високу точність та узгодженість оцінок (не нижче 2...3%) чисельного методу на всьому діапазоні часу досліджень. При цьому слід відмітити, що чисельний метод має більше переваг, а особливо ефективним він є для тих випадків, коли вид закону розподілу наробітку на відмову невідомий і визначити його неможливо або недоцільно.

Література

1. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. Пер. с англ., под ред. Беляева Ю.К. – М.: Советское радио, 1967. – 300 с.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: ГИТТЛ, 1957. – т. IV. – 522 с.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 218 с.