Підйомно-транспортні машини

УДК 622.647.4

В.С.Ловейкін, д-р техн. наук, професор КНУБА,
Д.О. Міщук

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ЗМІНИ ВИЛЬОТУ МАНІПУЛЯТОРА З ЖОРСТКИМИ ЛАНКАМИ

Актуальність роботи

Маніпулятор – керуємий пристрій або машина для виконання рушійних функцій при переміщенні об’єктів в просторі, оснащений робочим органом. Широке застосування маніпулятори знайшли при виконанні вантажних робіт на транспортних засобах.

Робота маніпуляторів з гідравлічним приводом супроводжується коливальними процесами, що виникають внаслідок зміни навантажень, перерозподілу енергії при зміні напрямку руху, а також різкого гальмування стріли під дією її власної ваги [1]. Отож при зміні вильоту вантажу виникають динамічні навантаження.

Мета статті – дослідження динаміки зміни вильоту маніпулятора з гідравлічним приводом на транспортному засобі (рис.1).

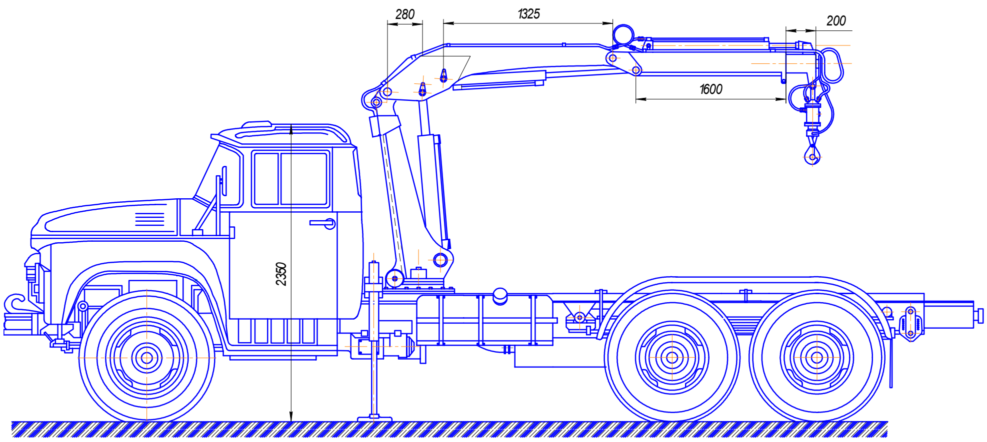

Рис. 1 Загальний вигляд маніпулятора на транспортному засобі

Для дослідження динаміки необхідно побудувати модель даного маніпулятора (рис.2).

Елементами моделі маніпулятора є ланка (стояк) 1, яка не рухається, ланка (підйомна стріла) 2, яка здійснює обертальний рух, ланки 3 (складальна стріла) і 4 (висувна балка), які здійснюють складний плоско-паралельний рух, а також вантаж 5. Рух маніпулятора забезпечується гідроциліндрами підйому стріли, складання стріли і висування балки. Геометричні розміри ланок – OB, BL, KC_0, φ і установчі параметри гідроциліндрів – a, b, c, d – є величинами, які відомі для кожного маніпулятора, конструкція якого подібна даній схемі, або ж задані конструктивно при створені нової машини.

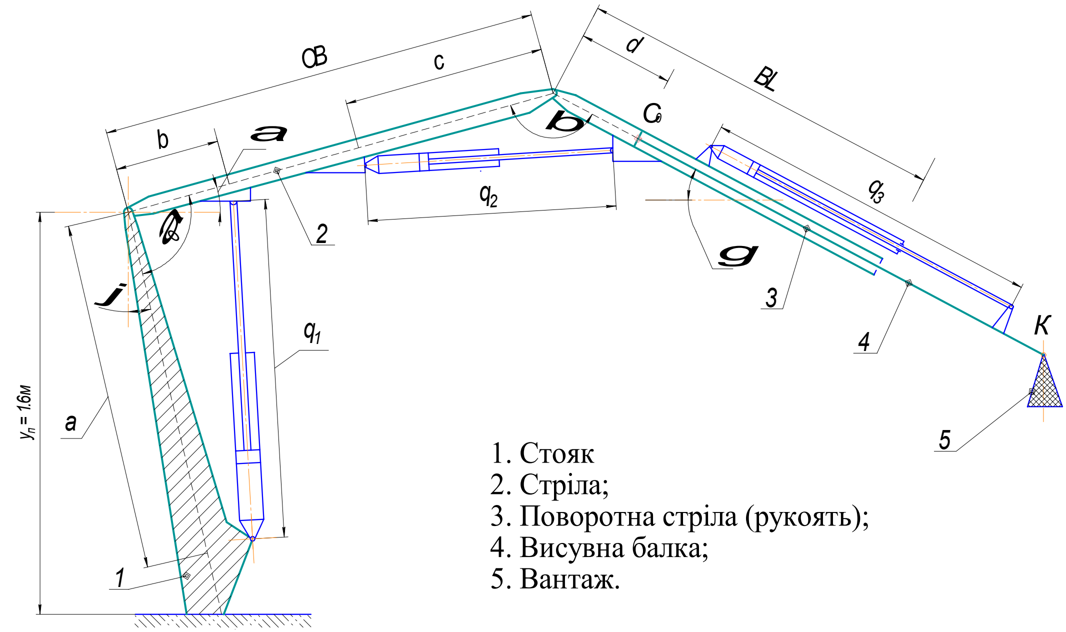

Рис. 2 Динамічна модель маніпулятора

Дана модель має три ступені вільності на площині, позначимо незалежні узагальнені координати як q_1, q_2 і q_3 - координати висування гідроциліндрів. Для опису даної моделі скористаємося рівнянням Лагранжа другого роду [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1;\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2;\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_3}-\frac{\partial T}{\partial q_3}=Q_3, \end{aligned} \tag{1}$$

де T - кінетична енергія системи; Q_1, Q_2, Q_3 - узагальнені сили.

Кінетична енергія такої системи:

$$T=T_2+T_3+T_4=\frac{1}{2}J_2\dot\alpha^2+\frac{1}{2}J_3\dot\gamma^2+\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2+\frac{1}{2}J_4\dot\gamma^2+\frac{1}{2}m_4\upsilon_4^2+\frac{1}{2}m_5\upsilon_5^2, \tag{2}$$

де T_2, T_3, T_4 - відповідно кінетична енергія 2, 3 і 4-ої ланок, кінетична енергія вантажу в спрощеному вигляді включена до енергії 4-ої ланки, яка є зв’язаною з цим вантажем; J_2, J_3, J_4 - моменти інерції рухомих ланок відносно осей їх обертання; $\dot\alpha$, $\dot\gamma$ - кутові швидкості ланок при повороті; υ_3, υ_4, υ_5 - лінійні швидкості руху ланок і вантажу - $\upsilon_3^2=\dot x_3+\dot y_3$, $\upsilon_4^2=\dot x_4+\dot y_4$, $\upsilon_5^2=\dot x_5+\dot y_5$; m_3, m_4 і m_5 - відповідно маси 3-ої, 4-ої ланок і маса вантажу; $x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$ - координати центру ваги ланок і вантажу.

Узагальнюючі сили, що діють в даній системі матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &Q_1=F_1-m_2g\frac{\partial y_2}{\partial q_1}-m_3g\frac{\partial y_3}{\partial q_1}-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_1}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_1};\\ &Q_2=F_2-m_3g\frac{\partial y_3}{\partial q_2}-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_2}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_2};\\ &Q_3=F_3-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_3}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_3}, \end{aligned} \tag{3}$$

де F_1, F_2, F_3 - зусилля створюване гідроциліндрами; g - прискорення вільного падіння, 9.8 м/с^2; $\frac{\partial y_2}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y_3}{\partial q_1}$ $\frac{\partial y_4}{\partial q_1}$ $\frac{\partial y_5}{\partial q_1}$ $\frac{\partial y_3}{\partial q_2}$ $\frac{\partial y_4}{\partial q_2}$ .... $\frac{\partial y_5}{\partial q_3}$ - оператори передачі руху першого порядку, що пов'язують швидкості координат відповідних ланок з узагальненими координатами [3].

Система диференційних рівнянь, які описують динаміку даної моделі маніпулятора в процесі пуску матимуть вигляд:

$$\begin{cases} J_{s2}\ddot{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial q_1}+m_3\ddot{x}_3\frac{\partial x_3}{\partial q_1}+m_3\ddot{y}_3\frac{\partial y_3}{\partial q_1}+(J_{s3}+J_{s4})\ddot{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}+m_4\ddot{x}_4\frac{\partial x_4}{\partial q_1}+m_4\ddot{y}_4\frac{\partial y_4}{\partial q_1}+ \\ +m_5\ddot{x}_5\frac{\partial x_5}{\partial q_1}+m_5\ddot{y}_5\frac{\partial y_5}{\partial q_1}=F_1-m_2g\frac{\partial y_2}{\partial q_1}-m_3g\frac{\partial y_3}{\partial q_1}-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_1}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_1}; \\ J_{s2}\ddot{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial q_2}+m_3\ddot{x}_3\frac{\partial x_3}{\partial q_2}+m_3\ddot{y}_3\frac{\partial y_3}{\partial q_2}+(J_{s3}+J_{s4})\ddot{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial q_2}+m_4\ddot{x}_4\frac{\partial x_4}{\partial q_2}+m_4\ddot{y}_{43}\frac{\partial y_3}{\partial q_2}+ \\ +m_5\ddot{x}_5\frac{\partial x_5}{\partial q_2}+m_5\ddot{y}_5\frac{\partial y_5}{\partial q_2}=F_2-m_3g\frac{\partial y_3}{\partial q_2}-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_2}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_2}; \\ J_{s2}\ddot{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial q_3}+m_3\ddot{x}_3\frac{\partial x_3}{\partial q_3}+m_3\ddot{y}_3\frac{\partial y_3}{\partial q_3}+(J_{s3}+J_{s4})\ddot{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial q_3}+m_4\ddot{x}_4\frac{\partial x_4}{\partial q_3}+m_4\ddot{y}_4\frac{\partial y_4}{\partial q_3}+ \\ +m_5\ddot{x}_5\frac{\partial x_5}{\partial q_3}+m_5\ddot{y}_5\frac{\partial y_5}{\partial q_3}=F_3-m_4g\frac{\partial y_4}{\partial q_3}-m_5g\frac{\partial y_5}{\partial q_3}. \end{cases} \tag{4}$$

Значення параметрів $x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5, \alpha, \gamma$ досить легко виразити через узагальнені координати q_1, q_2, q_3. Зробивши заміни у отриманому диференційному рівнянні кутових і лінійних прискорень ланок через прискорення узагальнених координат, отримаємо нову систему рівнянь, що має в спрощеній формі наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1A_1+\ddot{q}_2C_1+\ddot{q}_3B_1+2\dot{q}_1\dot{q}_2Z_{1.12}+2\dot{q}_1\dot{q}_3Z_{1.13}+2\dot{q}_2\dot{q}_3Z_{1.23}+\dot{q}_1^{\,2}Z_{1.1}+\dot{q}_2^{\,2}Z_{1.2}+\dot{q}_3^{\,2}Z_{1.3}=Q_1; \\ &\ddot{q}_1A_2+\ddot{q}_2C_2+\ddot{q}_3B_2+2\dot{q}_1\dot{q}_2Z_{2.12}+2\dot{q}_1\dot{q}_3Z_{2.13}+2\dot{q}_2\dot{q}_3Z_{2.23}+\dot{q}_1^{\,2}Z_{2.1}+\dot{q}_2^{\,2}Z_{2.2}+\dot{q}_3^{\,2}Z_{2.3}=Q_2; \\ &\ddot{q}_1A_3+\ddot{q}_2C_3+\ddot{q}_3B_3+2\dot{q}_1\dot{q}_2Z_{3.12}+2\dot{q}_1\dot{q}_3Z_{3.13}+2\dot{q}_2\dot{q}_3Z_{3.23}+\dot{q}_1^{\,2}Z_{3.1}+\dot{q}_2^{\,2}Z_{3.2}+\dot{q}_3^{\,2}Z_{3.3}=Q_3, \end{aligned} \tag{5}$$

де A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 , $Z_{1.1}$, $Z_{1.2}$, $Z_{1.3}$, $Z_{1.12}$, $Z_{1.13}$, $Z_{1.23}$, $Z_{2.1}$, $Z_{2.2}$, $Z_{2.3}$, $Z_{2.12}$, $Z_{2.13}$, $Z_{2.23}$, $Z_{3.1}$, $Z_{3.2}$, $Z_{3.3}$, $Z_{3.12}$, $Z_{3.13}$, $Z_{3.23}$ - коефіцієнти диференційних рівнянь [4]. Ці коефіцієнти мають досить складну форму. Як для прикладу приведемо деякі з них:

$$\begin{aligned} A_1 &= J_{s2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_1}\right)^2+(J_{s3}+J_{s4})\left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}\right)^2+m_3\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2+m_3\left(\frac{\partial y_3}{\partial q_1}\right)^2+m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)^2+ \\ &\quad +m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)^2+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)^2+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)^2; \\ C_1 &= (J_{s3}+J_{s4})\left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_2}\right)+m_3\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)+m_3\left(\frac{\partial y_3}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_3}{\partial q_2}\right)+ \\ &\quad +m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_2}\right)+m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_2}\right)+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_2}\right)+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_2}\right); \\ B_1 &= m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_3}\right)+m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_3}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

$$Z_{1.1}=J_{s2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial {q_1}^2}\right)+\left(J_{s3}+J_{s4}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial {q_2}^2}\right)+m_3\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial {q_2}^2}\right)+m_3\left(\frac{\partial y_3}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial {q_2}^2}\right)+$$

$$+m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 x_4}{\partial {q_2}^2}\right)+m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 y_4}{\partial {q_2}^2}\right)+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 x_5}{\partial q_2}\right)+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial^2 y_5}{\partial q_2}\right);$$

$$Z_{1.13}=m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1\partial q_3}\right)+m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1\partial q_3}\right);$$

$$Z_{1.23}=m_4\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_4}{\partial q_2\partial q_3}\right)+m_4\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_4}{\partial q_2\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x_5}{\partial q_2\partial q_3}\right)+m_5\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y_5}{\partial q_2\partial q_3}\right).$$

Для спрощення зробимо наступну заміну:

$$\begin{aligned}
X_1&=F_1-Q_1'-2\dot q_1\dot q_2Z_{1.12}-2\dot q_1\dot q_3Z_{1.13}-2\dot q_2\dot q_3Z_{1.23}-{\dot q_1}^2Z_{1.1}-{\dot q_2}^2Z_{1.2}-{\dot q_3}^2Z_{1.3};\\
X_2&=F_2-Q_2'-2\dot q_1\dot q_2Z_{2.12}-2\dot q_1\dot q_3Z_{2.13}-2\dot q_2\dot q_3Z_{2.23}-{\dot q_1}^2Z_{2.1}-{\dot q_2}^2Z_{2.2}-{\dot q_3}^2Z_{2.3};\\
X_3&=F_3-Q_3'-2\dot q_1\dot q_2Z_{3.12}-2\dot q_1\dot q_3Z_{3.13}-2\dot q_2\dot q_3Z_{3.23}-{\dot q_1}^2Z_{3.1}-{\dot q_2}^2Z_{3.2}-{\dot q_3}^2Z_{3.3}.
\end{aligned}\qquad(7)$$

Підставивши залежності (7) в рівняння (5), отримаємо систему диференційних рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
&\ddot q_1A_1+\ddot q_2C_1+\ddot q_3B_1=X_1;\\
&\ddot q_1A_2+\ddot q_2C_2+\ddot q_3B_2=X_2;\\
&\ddot q_1A_3+\ddot q_2C_3+\ddot q_3B_3=X_3.
\end{aligned}\qquad(8)$$

В матричній формі система рівнянь (8) буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix}A_1&C_1&B_1\\A_2&C_2&B_2\\A_3&C_3&B_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\ddot q_1\\\ddot q_2\\\ddot q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}\qquad(9)$$

Відповідно отримаємо вирази для розрахунку прискорень відповідних поршнів гідроциліндрів $\ddot q_1$, $\ddot q_2$, $\ddot q_3$:

$$\begin{aligned}
\ddot q_1&=\frac{(-B_2X_1C_3+X_2B_1C_3-B_3C_1X_2+B_3X_1C_2+X_3C_1B_2-X_3B_1C_2)}{(-A_1C_3B_2-C_1A_2B_3+C_1B_2A_3+B_3A_1C_2+C_3B_1A_2-A_3B_1C_2)};\\
\ddot q_2&=\frac{(B_2X_1A_3-X_2B_1A_3-B_3X_1A_2+X_3B_1A_2-X_3A_1B_2+B_3A_1X_2)}{(-A_1C_3B_2-C_1A_2B_3+C_1B_2A_3+B_3A_1C_2+C_3B_1A_2-A_3B_1C_2)};\\
\ddot q_3&=\frac{(-X_2A_1C_3-A_2C_1X_3+A_3C_1X_2+X_3A_1C_2+C_3X_1A_2-A_3X_1C_2)}{(-A_1C_3B_2-C_1A_2B_3+C_1B_2A_3+B_3A_1C_2+C_3B_1A_2-A_3B_1C_2)}.
\end{aligned}\qquad(10)$$

Розв’язуючи систему рівнянь чисельним методом Фур’є з застосуванням системи MathCAD, знаходяться швидкість і прискорення поршнів гідроциліндрів маніпулятора в стадії пуску і гальмування при заданому зовнішньому навантаженні, або ж потрібні керуючі сигнали в гідроциліндрах при заданих законах руху приводу. Такі розрахунки дають можливість спроектувати системи автоматичного керування.

Література

1. *Л. А. Гоберман* Основы теории, расчета и проектирования строительных и дорожных машин// М., 1988.
2. *Лойцинский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики: В 2-х т. Т.ІІ.: Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
3. *В. С. Ловейкин* Расчеты опримальных режимов движения механизмов строительных машин. – К.: УМК ВО, 1990.
4. *О. В. Григоров, В. С. Ловейкін* Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин. – К., 1997.