

УДК 539.3

## РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ УНІВЕРСАЛЬНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Ю.В. Максим'юк<sup>1</sup>  
канд. техн. наук

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

Отримані розрахункові співвідношення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) універсального скінченого елемента (СЕ), які дозволяють визначати напружено-деформований стан (НДС) не тільки масивних і тонкостінних тіл, але й вісесиметричних об'єктів складної структури, що поєднують масивні і тонкостінні елементи, з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності. На основі розв'язання контрольних прикладів доведена достовірність результатів, отриманих на основі універсального СЕ і показана його ефективність при розрахунку тіл складної структури.

Ключові слова: моментна схема скінчених елементів, універсальний скінчений елемент, масивні і тонкостінні тіла, вісесиметричні об'єкти складної структури.

**Вступ.** Історично склалися два підходи до розгляду тіл складної структури на основі МСЕ:

- створення набору спеціалізованих СЕ, кожний з яких орієнтований на апроксимацію конкретних об'єктів [1, 2, 3];
- застосування СЕ загального типу, що дозволяють розглядати поведінку конструкції з позицій механіки суцільного середовища [10, 11].

Використання кількох типів СЕ, що базуються на різних вихідних рівняннях (теорія пружності, пластин та оболонок, стержневих систем) ускладнює правильний вибір розрахункової схеми, ускладнює формування умов контакту між окремими конструктивними елементами і крім цього як зазначено в роботі [5], приводить до громіздкості обчислювального комплексу. Тому більш перспективним слід вважати орієнтацію на використання універсальних СЕ.

Безпосереднє використання просторових СЕ, матриці жорсткості (МЖ) яких отримані виходячи із загальних співвідношень теорії пружності, без введення будь-яких припущень та гіпотез, в якості універсального СЕ не економічно. Так використання кількох СЕ по товщині тонкостінних і навіть відносно масивних конструкцій супроводжується невиправданим збільшенням числа невідомих без суттєвого уточнення результатів розрахунку. Ефективнішим є підхід, що передбачає апроксимацію оболонкових конструкцій одним просторовим СЕ по товщині [12]. Як показали дослідження ступінь поліномів, що апроксимують тангенціальні зміщення, в

цьому випадку повинна бути не нижче другого порядку, що, хоча й в меншій мірі, але погіршує економічність даного варіанта СЕ. Зменшення числа невідомих можна досягти зменшенням порядку поліномів до першого ступеня при одночасному корегуванні закону Гука, що базується на умові дорівнювання нулю напружень обтиску [12]. Однак такі елементи вже не можна вважати просторовими, оскільки по одному з напрямків вноситься похибка, що не зникає при згущенні сітки. Огляд робіт, присвячених проблемі універсального СЕ розглянуто в роботі [4].

**1. Статичні гіпотези МССЕ для універсального СЕ.** Висока ефективність МССЕ при розрахунку, як масивних так і тонкостінних тіл, була обґрунтована на основі розв'язку значної кількості контрольних прикладів [7, 8]. Але на відміну від розроблених типів просторових і оболонкових скінчених елементів при побудові розрахункових співвідношень універсального СЕ необхідно, використовуючи методику МССЕ, формулювати закон Гука окремо для нульових і лінійних членів розкладу деформацій і напружень в ряд Маклорена.

На відміну від статичної гіпотези про порівнювання нулю напружень обтиснення по товщині оболонки, прийнятої в роботі [8], тут приймається, що напруження обтиснення постійні в межах СЕ:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(\alpha\alpha)} = 0. \quad (1)$$

Це припущення для тонких оболонок з навантаженням, приведеним до серединної поверхні, відповідає в класичній теорії оболонок умові рівності нулю нормальних напружень на ділянках, паралельних дотичній площині до серединної поверхні.

Застосування моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла, як жорсткого цілого, а також усуває явище “ хибного зсуву ”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Закон Гука, що зв'язує фізичні компоненти нульових членів розкладу напружень тензора напружень і тензора деформацій згідно МССЕ та їх похідні в центрі елемента визначаються формулами:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\gamma\mu} \overset{\circ}{\epsilon}_{\gamma\mu}, \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{C}^{33\gamma\mu} \overset{\circ}{\epsilon}_{\gamma\mu},$$

$$C^{ijkl} = \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$ , які є функціями температури і координат:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Закон Гука для лінійних членів розкладу деформацій і напружень згідно МССЕ буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)}^{\alpha} + \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(33),(3-\alpha)}^{\alpha}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{3333} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} &= \overset{\circ}{C}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} - \frac{(\overset{\circ}{C}^{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)})^2}{\overset{\circ}{C}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{3333} &= \overset{\circ}{C}^{3333} - \frac{(\overset{\circ}{C}^{33(\alpha)\alpha})^2}{\overset{\circ}{C}^{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} &= \overset{\circ}{C}^{\alpha(\alpha)33} - \frac{\overset{\circ}{C}^{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{C}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{C}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{C}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{C}^{33(\alpha)\alpha} \overset{\circ}{C}^{(3-\alpha)(3-\alpha)(\alpha)\alpha}}{\overset{\circ}{C}^{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

**2. Універсальний СЕ.** Розглянемо скінченні елементи (рис. 1). Будемо

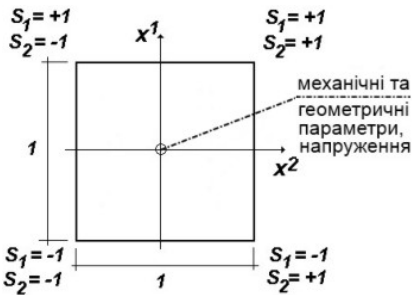


Рис. 1.

вважати, що компоненти тензора пружних сталей та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{ijkl} &\approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{ijkl} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \\ g &= g = g \Big|_{x^{\alpha}=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла, як жорсткого цілого, а

також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Формули для обчислення вузлових реакцій  $r$  і коефіцієнтів матриці жорсткості  $[K]_n$  за формою співпадають з наведеними в роботі [7]:

$$\left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\} = \left[ \overset{\circ}{B} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (5)$$

$$[K]_n = \left\{ \left[ \overset{\circ}{B} \right]^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left[ \overset{\circ}{B} \right] + \frac{1}{12} \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[ \overset{\circ}{D}_1 \right] \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[ \overset{\circ}{D}_2 \right] \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (6)$$

Суттєва відмінність цих виразів полягає в тому, що напруження визначаються за наступними формулами:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (7)$$

де

$$\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix}, \quad \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[ \overset{\circ}{B}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[ \overset{\circ}{B}^{ij33} \right]. \quad (8)$$

## 2. Дослідження збіжності МССЕ при розрахунку комбінованих об'єктів.

Як показали чисельні дослідження проведені на масивних і тонкостінних об'єктах, розглянутих в роботах [7, 8] збіжність універсального СЕ не поступається об'єктно орієнтованим СЕ.

Швидкість збіжності МССЕ при розрахунку конструкцій із неоднорідного матеріалу визначаються шляхом порівнянь з результатами, отриманими на основі інтегрування диференційних рівнянь теорії пружності з високим ступенем точності по методиці, що описана в роботі [6].

В якості об'єкта складної структури розглянуто порожнистий циліндр (рис. 2), торці якого закріплені від зсувів в радіальному напрямку. Товщина циліндра дорівнює 11 см, внутрішній радіус  $R=20$  см, довжина  $H=40$  см. Матеріал конструкцій в напрямку осі  $z^2$  розподілений по двох шарах: зовнішньому товщиною до  $h=1$  см і внутрішньому товщиною  $h_1=10$  см. Модуль пружності зовнішнього шару відноситься до модуля пружності внутрішнього шару як 100:1, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$ . Навантаження, розподілене вздовж твірної по синусоїді, прикладене до зовнішньої поверхні циліндра. Умови контакту забезпечуються рівністю переміщення на стику двох шарів.

Апроксимуюча сітка, один з варіантів якої показаний на розрахунковій схемі, написана таким чином, що по товщині зовнішнього шару приймається завжди один елемент. За товщиною внутрішнього шару і в осьовому напрямку використовується рівномірна розбивка на скінченні елементи.

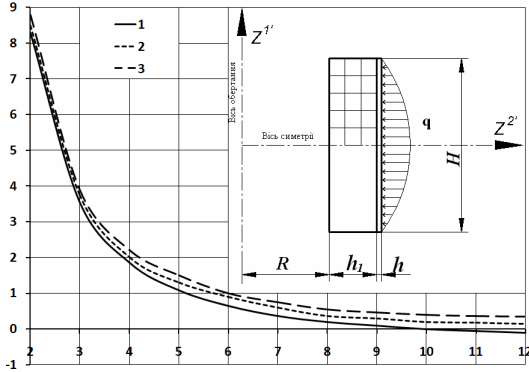


Рис. 2.

Результати розрахунку представлені на рис. 2 у вигляді кривих, що відображають залежність точності визначення переміщення в точці з координатами  $z^1=0$ ,  $z^2=R+h_1+h$  від числа елементів вздовж твірної по відношенню до розв'язку, отриманого за методикою [6]. Номер кривої збігається з кількістю елементів, прийнятих по товщині внутрішнього шару. На рис. 3 зображені епюри кільцевих  $\sigma^{3'3'}$  і осьових  $\sigma^{1'1'}$  напружень на зовнішній поверхні циліндра. Наведені результати наглядно демонструють

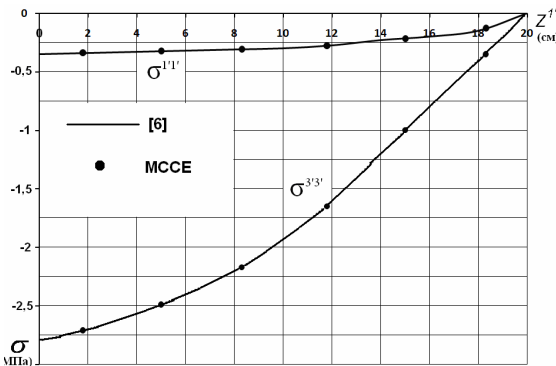


Рис. 3.

практично повне співпадіння результатів, отриманих обома методами.

### 3. Комбіновані вісесиметричні тіла складної структури.

В якості об'єкта складної структури розглянуто конструкцію занурюваного контейнера. На рис. 4 представлена розрахункова схема нероз'ємного з'єднання циліндричної оболонки зі скла з плоскою металевою заглушкою. Елементи з'єднання, включаючи матеріал опорного прошарку, володіють різними механічними характеристиками. Розрахунок проводився в припущенні ідеальної пружності всіх складових частин з'єднання і відсутності взаємного зміщення сполучених деталей на повер-

нях розділу. Оскільки міцність з'єднання в даному випадку цілком визначається міцністю елемента з крихкого матеріалу, руйнування якого починається зазвичай з поверхні, основну увагу було приділено вивченню напружень на бічній поверхні скляної циліндричної оболонки.

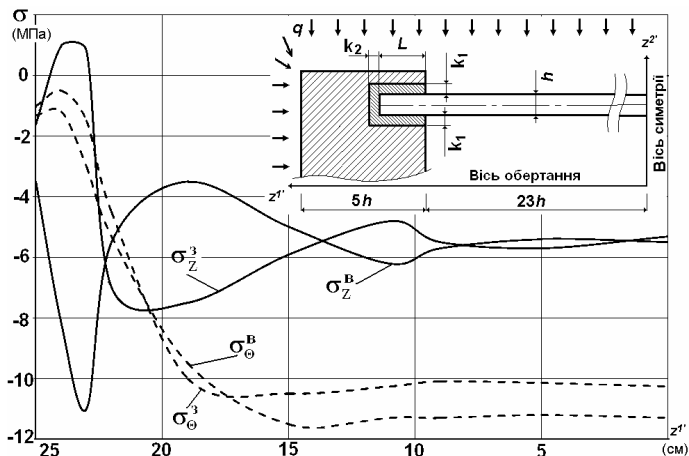


Рис. 4

Конструктивні параметри з'єднання такі: глибина защемлення оболонки  $L=2h$ , товщина бічних прошарків  $k_1=0,25h$ , товщина прошарку на торці  $k_2=0,25h$ , де  $h=1$  см - товщина оболонки. Передбачалося, що механічні властивості елементів з'єднання характеризуються такими даними: модулі пружності: кришки -  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа, прошарків -  $E=0,035 \cdot 10^5$  МПа, оболонки -  $E=0,8 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнти Пуасона: кришки -  $\nu=0,3$ , прошарків -  $\nu=0,34$ , оболонки -  $\nu=0,22$ .

На рис. 4 показане розподілення кільцевих  $\sigma_\theta^3$  і осевих  $\sigma_z^3$  напружень на зовнішній поверхні оболонки та  $\sigma_\theta^B$ ,  $\sigma_z^B$  - на внутрішній поверхні.

**Висновки.** Чисельні дослідження, проведені на контрольних прикладах, показали, що результати, які отримані за допомогою універсального СЕ на основі МССЕ дозволяють визначати НДС не тільки масивних і тонкостінних тіл, але й вісесиметричних об'єктів складної структури, що поєднують масивні і тонкостінні елементи, з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності. Результати розрахунку занурюваного контейнеру дозволяють зробити висновок, що розроблена методика може бути використана при розрахунку відповідальних об'єктів сучасної техніки.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Адясова Н.М.* Исследования упругопластического поведения составной осесимметричной конструкции с помощью комбинации конечных элементов различной мерности – В сб. «Метод конечных элементов в строительной механике», Горький, 1975.
2. *Адясова Н.М., Капустин С.А.* Исследование упругопластических составных конструкций МКЭ – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 2, Горький, 1975.
3. *Адясова Н.М., Капустин С.А., Яблонко Л.С.* Некоторые вопросы расчета нелинейных составных конструкций – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 1, Горький, 1975.
4. *Баженов В. А.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.– К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
5. *Галиев К.С., Гордон Л.А., Розин Л.А.* О построении универсальной матрицы жесткости в МКЭ. «Известия ВНИИГ», 1974, т. 105.
6. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек. Прикладная механика, «наукова думка», 1974, №5.
7. *Гуляр О.І., Солодей І.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.* Ефективність МССЕ в задачах згину та з концентраторами напружень // Опір матеріалів і теорія споруд, № 89, 2012. – С.143-157.
8. *Пискунов С.О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
9. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюкий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
10. *Толок В.А., Кравченко А.А., Шурин В.А., Кибец Ю.И.* К автоматизации программирования и исследования задач прочности ЭВМ – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 1, Горький, 1975.
11. *Толок В.А., Шурин В.А.* Вопросы реализации метода конечных элементов на ЭВМ– В сб. «Метод конечных элементов в строительной механике», Горький, 1975.
12. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thin and thin shells structures by curved finite elements Int. J. Num. Meth. in Eng. V.2, 1970, N3.

## REFERENCES

1. *Adyasova N.M.* Isledovaniya uprugoplasticheskogo povedeniya sostavnoy osesimmetrichnoy konstruktssii s pomoschyu kombinatsii konechnyih elementov razlichnoy mernosti – V sb. «Metod konechnyih elementov v stroitelnoy mehanike», Gorkiy, 1975.
2. *Adyasova N.M., Kapustin S.A.* Issledovanie uprugoplasticheskikh sostavnyih konstruktssiy MKE – V sb. «Prikladnyie problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 2, Gorkiy, 1975.
3. *Adyasova N.M., Kapustin S.A., Yablonko L.S.* Nekotoryie voprosyi rascheta nelineynyih sostavnyih konstruktssiy – V sb. «Prikladnyie problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 1, Gorkiy, 1975.
4. *Bazhenov V. A.* NellInyine deformuvannya ta stlykIst pruzhnhnii obolonok neodnorIdnoYi strukturi / V. A. Bazhenov, O. P. Krivenko, M. O. Solovey.– K. : ZAT «VIpOl», 2010. – 315 s.
5. *Galiev K.S., Gordon L.A., Rozin L.A.* O postroenii universalnoy matritsyi zhestkosti v MKE. «Izvestiya VNIIG», 1974, t. 105.
6. *Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.* K raschetu napryazhennogo sostoyaniya tolstostennyih neodnorodnyih anizotropnyih obolochek. Prikladnaya mehanika, «naukova dumka», 1974, #5.

7. *Gulyar O.I., Solodey I.I., Piskunov S.O., Maksim'yuk Yu.V.* EfektivnIst MSSE v zadachah zginu ta z kontsentratorami napruzhen // Oplr materIallv I teorIya sporud, # 89, 2012. – S.143-157.
8. *Piskunov S.O.* OsoblivostI vikoristannya momentnoYi shemi skInchenih elementIv (MSSE) pri lInylnih rozrahunkah obolonok I plastin / S. O. Piskunov, I. I. Solodey, Yu. V. Maksim'yuk, A. D. Solodenko // Oplr materIallv I teorIya sporud. 2013. – Vip. 91. – S. 59 75.
9. *Saharov A. S.* Metod konechnyih elementov v mehanike tverdyyh tel / A. S. Saharov, V. N. Kislookiy, V. V. Kirichevskiy. – K. : Vischa shk., 1982. – 480 s.
10. *Tolok V.A., Kravchenko A.A., Schurin V.A., Kibets Yu.I.* K avtomatizatsii programirovaniya i issledovaniya zadach prochnosti EVM – V sb. «Prikladnyie problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 1, Gorkiy, 1975.
11. *Tolok V.A., Schurin V.A.* Voprosyi realizatsii metoda konechnyih elementov na EVM– V sb. «Metod konechnyih elementov v stroitelnoy mehanike», Gorkiy, 1975.
12. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thin and thin shells structures by curved finite elements Int. J. Num. Meth. in Eng. V.2, 1970, N3.

*Максимиук Ю.В.*

#### **РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Получены расчетные соотношения моментной схемы конечных элементов универсального конечного элемента, которые позволяют определять напряженно-деформированное состояние не только массивных и тонкостенных тел, но и осесимметричных объектов сложной структуры, объединяющих массивные и тонкостенные элементы, с единых позиций пространственной задачи теории упругости. На основе решения контрольных примеров, доказана достоверность результатов, полученных на основе универсального конечного элемента и показана его эффективность при расчете тел сложной структуры.

**Ключевые слова:** моментная схема конечных элементов, универсальный конечный элемент, массивные и тонкостенные тела, осесимметричные объекты сложной структуры.

*Maksymiuk Y.V.*

#### **the calculated ratio of universal finite element based on moment schemes of finite elements**

The calculated ratio of moment scheme of finite elements for universal finite element is obtained. It allows to determine the stress-strained state not only of massive and thin bodies, but axisymmetric objects and complex structure, combining massive and thin elements with one voice of spatial elasticity problem. On the basis of the control examples solution the reliability of the results, obtained on the basis of universal finite element, and the efficiency of use for combine structure objects was proven.

**Keywords:** moment scheme of finite elements, universal finite element, massive and thin body, axially symmetric objects of combine structures.