

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.Б. Калашніков

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ СТІЙКОСТІ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

Порівнюються результати розрахунків пружних тонкостінних конструкцій, що виконані за моментною схемою скінченних елементів, за різними програмними комплексами та за методиками інших авторів. З'ясовані можливості застосування комплексу ЛІРА при розв'язанні геометрично нелінійних задач стійкості тонких оболонок сталої та лінійно-змінної товщини.

У сучасному розвитку методу скінченних елементів (МСЕ) важливе значення мають питання, що присвячені дослідженню властивостей скінченних елементів (СЕ), лінійних і нелінійних методик й алгоритмів розрахунку [1]. Ця проблема вирішується шляхом порівняння розв'язків МСЕ з відомими, що отримані аналітичними, чисельними або експериментальними методами. Вивчення збіжності розв'язків у лінійних задачах дозволяє дослідити основні властивості скінченних елементів і методів розрахунку. Методики розв'язування багатьох нелінійних статичних і динамічних задач звичайно зводяться до багаторазового розв'язання лінеаризованих систем рівнянь. Тому ефективність цих методик у значній мірі визначається ефективністю та точністю лінійного розрахунку тонких пружних пластин і оболонок при дії силових і температурних навантажень [2, 3].

Згин квадратної пластини. Для порівняння збіжності та точності розв'язків лінійних задач, що отримані при застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) за методикою [4-8] та у відомих програмних комплексах (ПК), розглянута задача згину тонкої жорстко затиснутої по контуру квадратної пластини (рис. 1, а). В якості розрахункового фрагмента прийнята чверть конструкції. Для пластини, що навантажена рівномірним нормальним тиском, порівнювалися величини прогину в її центрі u'_{max} (рис. 1, б; де N – кількість невідомих, Δ – відсоток розбіжності з розв'язком [9]). Аналіз результатів виконаний для систем ANSYS [10], NASTRAN [11], COSMOS [12], SCAD [13], ЛІРА [14], ФРОНТ [15]. Також використані дані з праць О.Зенкевича [16] та В.О.Постнова й І.Я.Хархуріма [17]. За точний прийнятий розв'язок С.П.Тимошенка [9], що отриманий за теорією тонких пластин. Прийняті

наступні вихідні дані: $a=200$ см, $h=1$ см, $E=2 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu=0.3$. Задавалася величина інтенсивності тиску $q=u'_{max} Eh^3/[0.01512a^4(1-\nu^2)]$ кг/см², для якої згідно до [9] $u'_{max}=1$ см. Результати розрахунків, що отримані за допомогою МССЕ і ПК ЛІРА, наведені в табл. 1. За МССЕ використовувався просторовий СЕ [8], за ПК ЛІРА – плоский чотирикутний СЕ № 19.

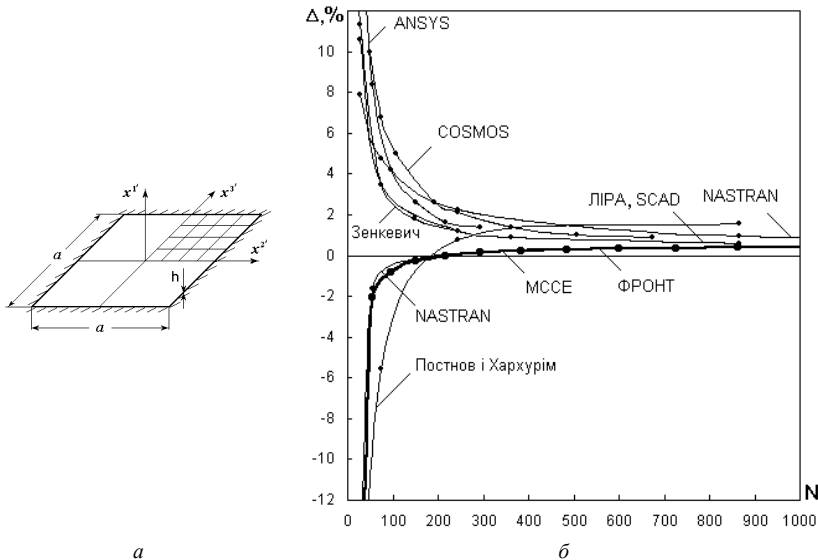


Рис. 1. Порівняння збіжності прогину центра квадратної жорстко затиснутої пластини

Всі порівнювальні розв'язки швидко збігаються й отримуються достатньо точно. За винятком розв'язку [17], для пластинчатих СЕ [10-14, 16] спостерігається збіжність «згори», а для просторових СЕ (ПК NASTRAN, ФРОНТ та даної роботи) – «знизу». Останні результати практично співпадають між собою. Виконане тестування підтверджує, що в області рідких сіток маємо більш швидку збіжність та вищу точність розв'язку за МССЕ, в порівнянні з пластинчатими СЕ у відомих ПК.

Проблемам побудови методик дослідження нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки оболонок з різноманітними конструктивними особливостями та питанням реалізації відповідних обчислювальних алгоритмів присвячена обмежена кількість робіт. У сучасних обчислювальних системах (наприклад ЛІРА, SCAD,

АПРОКС [22], ANSYS) недостатньо представлені та розроблені алгоритми дослідження процесів втрати стійкості гнучких оболонок. У зв'язку зі значною складністю цих алгоритмів вирішення розглядуваних проблем далеке від свого завершення.

Таблиця 1

Сітка CE	Кількість невідомих	Розрахунок за МССЕ		Розрахунок за ПК ЛІРА	
		u'_{max} , см	Δ , %	u'_{max} , см	Δ , %
2×2	54	0.97937	-2.06	1.10591	10.59
3×3	96	0.99180	-0.82	1.05574	5.57
4×4	150	0.99731	-0.27	1.03424	3.42
5×5	216	0.99993	-0.01	1.0237	2.37
6×6	294	1.0014	0.14	1.01797	1.80
7×7	384	1.0022	0.22	1.01504	1.5
8×8	486	1.0028	0.28	1.01202	1.12
9×9	600	1.0032	0.32	1.01073	1.07
10×10	726	1.0034	0.34	1.00923	0.92
11×11	864	1.0037	0.37	1.00852	0.85
12×12	1014	1.0038	0.38	1.00771	0.77
13×13	1176	1.0039	0.39	1.00712	0.71
14×14	1350	1.0040	0.40	1.00645	0.64
19×19	2400	1.0043	0.43	1.00562	0.56
Точний розв'язок		1.000	0	1.0000	0

Вивчення властивостей нелінійних скінченноелементних методик, для яких необхідно досліджувати вплив на збіжність і точність розв'язків великої кількості параметрів, що впливають на напружено-деформований стан (НДС) оболонок, доцільно виконувати на спеціально підбраному наборі як лінійних, так і нелінійних тестових задач. Наповнення такого набору тестів являє собою окрему проблему, яка незважаючи на її практичну важливість, висвітлена у літературі недостатньо. Це пов'язано зі складністю задачі, з математичними та обчислювальними труднощами її розв'язку, трудомісткістю аналізу нелінійного деформування та втрати стійкості оболонок різноманітної форми при дії різних термосилових навантажень.

Нижче на прикладах геометрично нелінійних задач стійкості оболонок сталої та лінійно-змінної товщини наведені чисельні результати

розв'язків, що отримані за розробленою методикою [4-8] та для порівняння за програмним комплексом ЛПА [14].

Скінченноелементна методика дослідження НДС, стійкості та закритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок [4-8] базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях МССЕ. Завдяки такому підходу методика дозволяє на основі єдиної методологічної бази досліджувати тонкі пружні оболонки з різноманітними геометричними особливостями за товщиною та неоднорідностями матеріалу при термосилових навантаженнях. Моделювання оболонки виконується універсальним просторовим СЕ, який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла. Нелінійний розв'язок отримується комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича на кожному кроці навантаження. Достовірність методики обґрунтована великою кількістю чисельних досліджень збіжності та точності лінійних і нелінійних скінченноелементних розв'язків для різних класів задач [2, 3, 7, 18-23].

В ПК ЛПА для розв'язування нелінійних задач застосовується кроковий нелінійний процесор, який організовує процес покрокового навантаження конструкції та забезпечує розв'язок лінійованої системи рівнянь на кожному кроці поточного збільшення вектора вузлових навантажень. Моделювання геометричної нелінійності виконується за допомогою скінченних елементів, що враховують зміну геометрії конструкції при її деформуванні. Момент втрати стійкості конструкції пов'язується з появою від'ємних значень коефіцієнтів на діагоналі матриці жорсткості системи. Розв'язування задачі нелінійного деформування реалізовано лише до верхнього критичного навантаження. Вивчення закритичного стану конструкції зі застосуванням даного алгоритму неможливе.

Стійкість сферичної панелі сталого товщини. Розглянута полога осесиметрична сферична панель, що жорстко затиснута за контуром і навантажена рівномірним тиском інтенсивністю q (рис. 2, а). Результати досліджень подано з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4, \quad \bar{u}^l = \frac{u^l}{h}, \quad k = \frac{H}{h}, \quad (1)$$

де r – радіальна координата точки панелі у плані; a – радіус опорного контуру; h – товщина; H – стріла підйому; k – параметр, що характеризує пологість панелі; R – радіус серединної поверхні сферичної панелі; E, ν –

модуль пружності та коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу; u^I – переміщення вздовж осі декартової системи координат x^I .

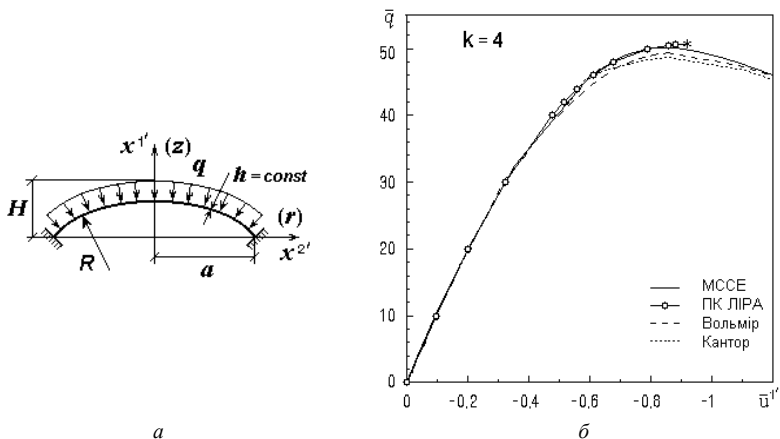


Рис. 2. Порівняння розв'язків для сферичної панелі сталі товщини

У чисельному розрахунку прийняті наступні вихідні данні: $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$, $a = 1$ м, $h = 0.01$ м, $k = 4$, $H = 0.04$ м, $R = 12.52$ м. Ця панель згідно до [25, 26] деформується та втрачає стійкість за осесиметричною формою. Тому за розрахункову модель для МССЕ прийнята чверть сферичної панелі з рівномірним розподілом СЕ вздовж радіуса та за колом.

При розрахунку за ПК ЛПА скінченноелементна модель оболонки (СЕМО) моделювалася двома типами оболонкових елементів: № 344 – нелінійним трикутним СЕ та № 342 – нелінійним чотирикутним СЕ. У полюсі оболонки застосовувався трикутний, а на інших ділянках – чотирикутний елементи.

Точність отриманих за МССЕ розв'язків порівняна з результатами робіт [25, 26] і ПК ЛПА (рис. 2, б). Спостерігається повний збіг розв'язків у докритичній області та незначне розходження у верхній критичній точці (табл. 2). На діаграмах “навантаження-прогин у центрі панелі”, що отримані за ПК ЛПА, зірочкою позначено момент припинення обчислень, що приймається за момент втрати стійкості оболонки.

Таблиця 2

Розв'язки	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{u}_{кр}^{1^e}$	$\Delta, \%$
МССЕ	50.12	1.46	-0.882	2.56
ПК ЛПА	50.70	2.63	-0.920	6.98
Вольмір	49.4	0	-0.860	0
Кантор	48.8	-1.21	0.859	-0.12

Стійкість сферичних панелей лінійно-змінної товщини. Для підвищення несучої спроможності гнучких оболонок їх загальну жорсткість можна збільшити за рахунок більш раціонального розподілу матеріалу (маси) в об'ємі оболонки. Одним із таких способів є проектування оболонки зі змінною товщиною. Цей підхід вимагає застосування відповідних методів розрахунку на стійкість оболонок змінної товщини. Для гнучких оболонок вплив на їхню стійкість законів розподілу гладко-змінної товщини обшивки мало досліджений [25, 26]. Це пояснюється ускладненнями, які вносить змінна товщина в розробку геометрично нелінійних методів розрахунку на стійкість оболонок.

На прикладах жорстко затиснутих вздовж контуру пологих панелей обертання лінійно-змінної товщини (рис. 3, а) виконаний порівняльний аналіз розв'язків з результатами, що наведені в роботі Б.Я.Кантора [26] В ній геометрично нелінійна задача теорії пологих оболонок розв'язана в осесиметричній постановці варіаційним методом. Математична модель пологої панелі представлена як пластина з початковим прогином, а метрика криволінійної поверхні замінена метрикою площини. Технічна теорія побудована на гіпотезі прямих нормалей, у межах якої розглянуті згин, стійкість та закритична поведінка пологих оболонок з лінійним розподілом товщини за меридіаном.

Результати досліджень панелі подані з використанням наступних безрозмірних параметрів, які прийняті в [26]

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h_{\bar{r}=0}} \right)^4, \quad \bar{u}^l = \frac{u^l}{h_{\bar{r}=0}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{h}(\bar{r}) = \frac{h(\bar{r})}{h_{\bar{r}=0}}, \quad k = \frac{H}{h_{\bar{r}=0}}, \quad (2)$$

де $h(\bar{r})$ – функція товщини панелі; $h_{\bar{r}=0}$, $h_{\bar{r}=1}$ – товщини в центрі та на краю панелі.

Розподіл товщини панелі задається лінійною функцією (рис. 3, б)

$$\bar{h}(\bar{r}) = 1 + (b_o - 1)\bar{r}, \quad (3)$$

де безрозмірний параметр $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$ визначає ступінь змінності товщини панелі за меридіаном. На рисунках кожному типу змінної товщини відповідає свій значок.

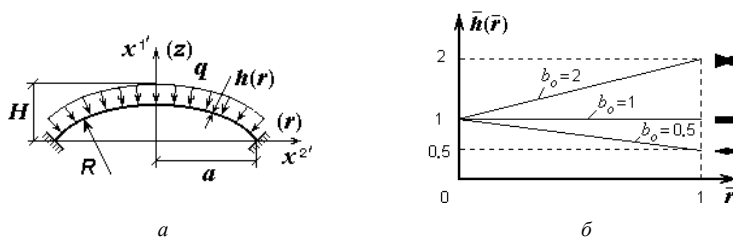


Рис. 3. Сферична панель лінійно-змінної товщини

Оболонки навантажуються рівномірним тиском інтенсивністю q . При дослідженні сферичних панелей лінійно-змінної товщини прийняті наступні вихідні данні: $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$, $a = 1$ м, $h_{\bar{r}=0} = 0.01$ м, $k = 5$, $H = 0.05$ м, $R = 10.025$ м. Збіжність розв'язків для панелей лінійно-змінної товщини подібна до збіжності розв'язків для панелей сталої товщини. Розглядається, як і в роботі [26], осесиметричне деформування оболонок. З врахуванням можливої появи у закритичній області складних форм деформування за розрахункову для чверті оболонки прийнята сітка 20×20 SE.

Виконаний у [21, 22] порівняльний аналіз нелінійних розв'язків МССЕ та роботи [26] показав їх добрий збіг на всіх ділянках діаграм “навантаження-прогин”. Нижче проведено порівняння нелінійних розв'язків МССЕ і ПК ЛПА в діапазоні зміни параметра $1 \leq b_o \leq 2.5$, що відповідає потовщенню оболонки від центра до краю (рис. 4, рис. 5, табл. 3). При розрахунку за ПК ЛПА сферична панель лінійно-змінної товщини, як і в попередній задачі, моделювалася тими же двома типами SE. Через неможливість реалізації в ПК ЛПА лінійної зміни товщини розглядувані оболонки моделювалися, як панелі зі ступінчато-змінною товщиною. Відповідно ступінчато змінювалась і жорсткість оболонок. Точність апроксимації змінної товщини панелі забезпечило застосування достатньо густої сітки.

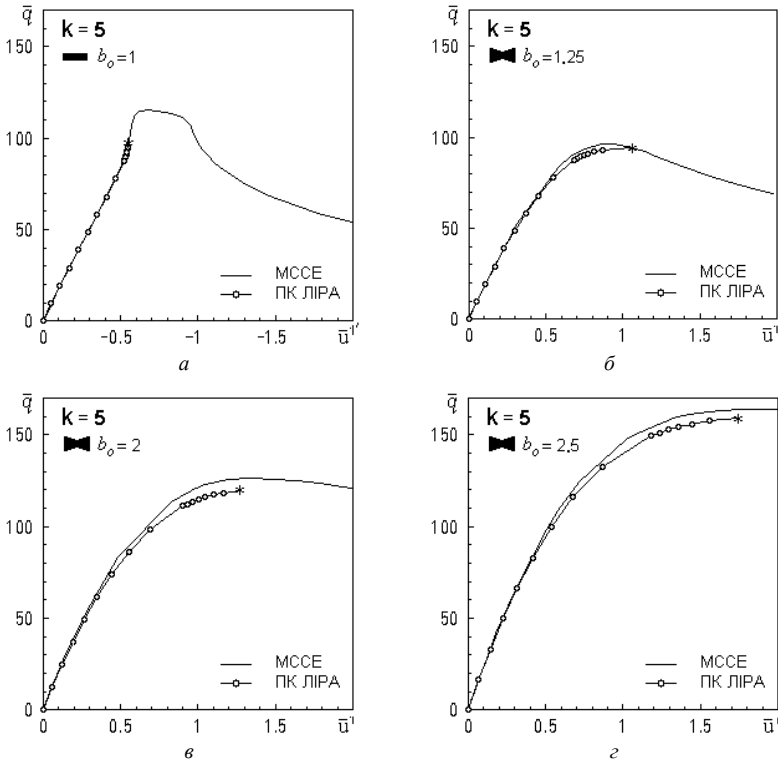


Рис. 4. Порівняння діаграм “навантаження-прогин” для оболонок лінійно-змінної товщини

Спостерігається повний збіг розв'язків у докритичній області та незначне розходження результатів у верхній критичній точці. ПК ЛІРА визначив для панелі сталої товщини ($b_0=1$) кінцеву точку $\bar{q} = \bar{q}^* = 94.9$ (точку можливого розгалуження розв'язку), як критичну. За МССЕ у всіх випадках, за винятком панелі сталої товщини, в докритичній області відсутні точки розгалуження. Для панелі сталої товщини критичне навантаження $\bar{q}_{кр}^g = 115.3$. При цьому при уточненому визначенні точки розгалуження (через внесення збурення у вихідну форму оболонки) отримано величину $\bar{q} = \bar{q}^* = 94.40$, що складає розбіжність Δ у 0.53%.

Таблиця 3

$b_o=1$			$b_o=1.25$		$b_o=2$		$b_o=2.5$	
$\bar{q}_{кр}^6$	\bar{q}^*	\bar{u}^{1*}	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}^{1*6}_{кр}$	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}^{1*6}_{кр}$	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}^{1*6}_{кр}$
МССЕ								
115.3	94.40	0.539	96.37	0.944	126.20	1.343	164.03	1.921
ПК ЛІРА								
94.90	94.90	0.547	94.03	1.062	128.00	1.541	160.84	1.217
$\Delta, \%$								
-17.69	0.53	1.48	-2.43	12.50	1.43	14.74	-1.94	-36.65

Втрата стійкості панелей лінійно-змінної товщини (рис. 5, а) характеризується їх проклацуванням у полюсі. Спостерігається гарний збіг форм деформування. Втрата стійкості панелі сталої товщини відбувається з утворенням кільцевої ум'ятини посередині меридіану (крива $b_o=1$). На рис 5, б демонструється відмінність форм деформування, що отримані за МССЕ, в точці розгалуження ($\bar{q}^*=93.63$) та у верхній критичній ($\bar{q}_{кр}^6=115.3$). Між цими точками відмічається зміна форми деформування.

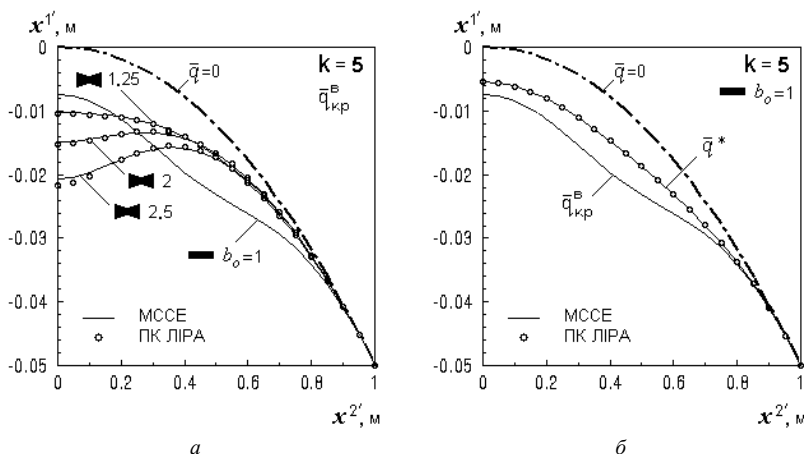


Рис. 5. Порівняння форм деформування

Порівняння результатів розрахунків за МССЕ та ПК ЛПА продемонстрував на розглянутих конструкціях гарний збіг лінійних і нелінійних розв'язків у докритичній області та в момент втрати стійкості. Це засвідчує можливість застосування ПК ЛПА при розв'язанні геометрично нелінійної задачі стійкості для оболонок сталюї та лінійно-змінної товщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюцкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. - 480 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента в задачах нерівномірного нагріву стержнів і балок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006. - Вип. 80. - С. 54-65.
3. *Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Исследование сходимости метода конечных элементов в задачах пластин и оболочек. - В кн.: Пространственные конструкции зданий и сооружений, вып. 3, М., Стройиздат, 1977, с. 10-15.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатощарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
5. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
6. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
7. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности, 1999. - N 5. - С. 96-102.
8. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р. - Вип. 80. - С. 96-113.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
10. ANSYS User's Manual for revision 5.6. Volume I. Procedure; Volume II. Command; Volume III. Elements; Volume IV. Theory.
11. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Window. - М.: ДМК Пресс, 2003. - 448 с.
12. *Алямовский А.А.* SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. - М.: ДМК Пресс, 2004. - 432 с.
13. *Карпиловский В.С., Крикунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. - М.: АСВ, 2004. - 591 с.

14. ЛИРА 9.2. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / Е.Б. Стрелец-Стрелецкий, Ю.В. Гензерский, М.В. Лазнюк, Д.В. Марченко, В.П. Титок. – К.: «Факт», 2005. – 146 с.
15. *Минькович В.И., Кравец В.И.* Комплекс программ "Фронт" для расчета МКЭ тонкостенных подкрепленных пространственных конструкций на ЕС ЭВМ // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. - К.: Киев. инж. строит. ин-т, 1978. - С. 73-76.
16. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир. - 1975. - 541 с.
17. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974. - 344 с.
18. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
19. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гнучких пологих панелей ступінчато-змінної товщини // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наук. праць. - Спец. вип. - Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2001. - С. 7-11.
20. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2002 р. - Вип. 70. - С. 104-109.
21. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
22. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наук. праць. – Вип. 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
23. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.
24. *Гондык А.В., Сахаров А.С.* Программный комплекс для автоматизации прочностных расчетов оболочечных и комбинированных систем "АПРОКС" // XVII Междунар. конф. " Мат. моделирование в механике сплошных сред на основе методов гранич. и конеч. элементов", 22-25 июня, 1999 г., Санкт-Петербург: Тез. докл. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. - С. 56-62.
25. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
26. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.

Отримано 18.05.09

Сравниваются результаты расчетов упругих тонкостенных конструкций, которые выполнены по моментной схеме конечных элементов, по разным программным комплексам и по методикам других авторов. Выяснены возможности использования комплекса ЛИРА при решении геометрически нелинейных задач устойчивости тонких оболочек постоянной и линейно-переменной толщины.

The outcomes of the analyses of elastic thin-walled constructions are compared. These outcomes are carried out by the moment scheme of finite elements, by different programming complexes and by

techniques of other authors. The possibilities of using the complex LIRA have been learned by solving geometrically nonlinear tasks of a stability of thin shells with a constant and linearly-variable thickness.