

УДК 539.3

Солодей І.І., канд. техн. наук

МЕТОДИКА АНАЛІЗУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ КОЛИВАНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ТА ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Вступ. Основні положення та залежності теорії пружності, які описують напружено-деформований стан просторових тіл, достатньо повно і широко відображені в монографіях [4, 14, 15]. Великий внесок в розробку теорії пластичності та узагальнення її на випадок динамічних навантажень внесли роботи [3, 8-11].

Розв'язання систем нелінійних рівнянь в двовимірній і просторовій задачах пластичності відбувається різноманітними модифікаціями методів змінних параметрів пружності чи додаткових навантажень. Область ефективного використання кожного з них має свої обмеження, які змінюються в достатньо широкому діапазоні в залежності від специфіки задачі, що розглядається. Аналіз робіт [16-19], які вміщують огляд літератури, класифікацію та співставлення методів розв'язання систем нелінійних рівнянь, посвідчує, що найбільш ефективними є комбіновані алгоритми, які поєднують в собі переваги окремих процедур.

Проблеми нелінійного нестационарного деформування навіть однорідних конструкцій висвітлені в літературі все ще слабо. Питання нелінійної динаміки однорідних оболонок знайшли своє відображення в роботах [20-23].

Тому, не зважаючи на те, що НМСЕ з відомим формулюванням виявився вельми ефективним, клас задач, що вирішується, залишається досить вузьким. В той же час, чисельні результати, що отримані в [1], свідчать про високу швидкість збіжності рішень при апроксимації параметрів напружено-деформованого стану відрізками рядів Фур'є для задач статички в рамках НМСЕ.

Постановка задачі. Розглядаються неоднорідні ізотропні тіла обертання та призматичні тіла з довільними граничними умовами, що знаходяться під дією довільного динамічного навантаження або зміщень, як функції часу.

Опис топологічних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат Z^i , що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-

деформованого стану тіла запроваджується місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з його геометрією.

Рух неоднорідних тіл, описується на основі варіаційного принципу Лагранжа-Даламбера [8]:

$$\int_V \rho \ddot{u}_i^i \delta u_i^i dV + \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V f^i \delta u_i^i dV - \int_{S_p} p^i \delta u_i^i dS = 0, \quad (1)$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i), \quad \dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i), \quad Z^i \in V. \quad (2)$$

Припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^i, t) = \tilde{u}(Z^i, t), \quad Z^i \in S_u, \quad (3)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), \quad Z^i \in S_p. \quad (4)$$

Компоненти тензора напружень обчислюються за компонентами тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука. За межею пружності зв'язок між напруженнями і деформаціями прийнятий у відповідності з рівняннями теорії пластичної течії при умові текучості Мізеса для ізотропно-зміцнюваного матеріала [13]. Припускається, що в процесі навантаження в об'ємі тіла виникають пружні ε_{ij}^e і миттєві пластичні ε_{ij}^p деформації:

1. Матеріал тіла однорідний і ізотропний, зміна його об'єму - лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (5)$$

2. Компоненти тензора приросту деформацій $d\varepsilon_{ij}$ складаються з приросту пружних $d\varepsilon_{ij}^e$ і пластичних $d\varepsilon_{ij}^p$ складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (6)$$

3. Область пружних деформацій обмежена поверхнею текучості, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f(\sigma^{ij}, \chi) = 0, \quad (7)$$

де $\chi = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}$ - міра зміцнення (параметер Одквіста), який характеризує накопичену пластичну деформацію.

4. У відповідності з асоційованим законом пластичної течії пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = d\lambda S_{ij}. \quad (8)$$

Для ізотропно зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса рівняння поверхні текучості має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2(\chi), \quad (9)$$

де τ_s - межа текучості при чистому зсуві, $S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 \delta^{ij}$ - компоненти девіатора напружень, $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ij} \delta^{ij}$, δ^{ij} - функція Кронекера.

Для дискретизації означеного класу об'єктів використовуються універсальні просторові неоднорідні кільцевий незамкнений [5] та прямокутний призматичний [6] скінченні елементи з довільними граничними умовами на торцях. За невідомі приймаються вузлові значення переміщень швидкостей та прискорень.

Розрахункові співвідношення НМСЕ. Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ записана для місцевої системи координат має вигляд:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (10)$$

Відповідно до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ), вираз (10) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (11)$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (12)$$

Використовуючи закон Гука для опису коефіцієнтів розкладу напружень:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (13)$$

запишемо (12) у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (14)$$

Для просторових неоднорідних кругового неземкненого та призматичного скінченних елементів з довільними граничними умовами вираз варіації енергії СЕ може бути записаний у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{ u \}_l^T \right) [K]_{ln} \{ u \}_n, \quad (15)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного призматичного СЕ:

$$[K]_{ln} = \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D \right]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D \right]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D \right]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D \right]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \left[D \right]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \\
& + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \quad (16)
\end{aligned}$$

Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K^e = - \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \ddot{u}^{m'} \delta u_{m'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 . \quad (17)$$

Для просторових неоднорідних кругового неземкненого та призматичного скінченних елементів з довільними граничними умовами отримаємо:

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L \ddot{u}_{m'}^n \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} dx^3 \overset{\circ}{g}{}^{m'm'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \delta u_{m'}^l , \quad (18)$$

або в матричній формі

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L \left(\delta \{u\}_l^T \right) [M]_{ln} \{ \ddot{u} \}_n , \quad (19)$$

де $[M]_{ln}$ - амплітудна “неузгоджена” матриця мас неоднорідного вздовж x^3 скінченного елемента:

$$m_{ln}^{m'} = \frac{1}{4} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \overset{\circ}{g}{}^{m'm'} \sum_{p=1}^P \overset{\circ}{\rho}_p \varphi_p^{(l)} \varphi_p^{(n)} H_p , \quad (20)$$

де ρ_p - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає p -ій точці інтегрування, H_p - вагова функція чисельного інтегрування вздовж x^3 .

Інтегрування рівнянь руху у часі. Для розв’язання задач пружно-пластичного деформування при використанні алгоритмів, заснованих на методі додаткових навантажень, більш раціонально представити енергію деформації системи через вектор реакцій, оскільки коефіцієнти матриці жорсткості стають залежними від поточного напружено-деформованого стану тіла:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [R_\sigma] = \{Q\}. \quad (21)$$

початкові умови записуються у вигляді:

$$\{U\}_{t=t_0} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}\}_{t=t_0} = \{\dot{U}_0\}, \quad (22)$$

де матриця $[M]$ та вектори $[R_\sigma]$, $\{Q\}$ отримані внаслідок обходу скінченно-елементної області та процедури асамблювання відповідних компонент матриці та векторів елементів відповідно. Вектори $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$, $\{\ddot{U}\}$ зкомпоновані з переміщень, швидкостей і прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі. Припускається, що для деяких типів задач коефіцієнти матриці жорсткості можуть змінюватись у часі.

Кожний блок матриці $[M]$ представляє собою стрічкову підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла.

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \dots & [M]_{l_0 m} & \dots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ [M]_{ll_0} & \dots & [M]_{ll} & \dots & [M]_{lL} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{Ll_0} & \dots & [M]_{Lm} & \dots & [M]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\{U\}^T = \{\dot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\dot{U}\}_l^T \dots \{\dot{U}\}_L^T, \quad (24)$$

$$\{\dot{U}\}^T = \{\ddot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\ddot{U}\}_l^T \dots \{\ddot{U}\}_L^T,$$

$$\{\ddot{U}\}^T = \{Q\}_{l_0}^T \dots \{Q\}_l^T \dots \{Q\}_L^T,$$

$$\{Q\}^T = \{R_\rho\}_{l_0}^T \dots \{R_\rho\}_l^T \dots \{R_\rho\}_L^T. \quad (25)$$

Задача інтегрування рівнянь руху у часі згідно процедури метода Н'юмарка [2] зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь:

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} + \{R_\sigma\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (26)$$

де

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0 [M] \{U\}^{t+\Delta t}, \quad (27)$$

$$\{\overline{\overline{R}}_{\rho}\}^t = [M] \{a_0 \{U\}^t + a_2 \{\dot{U}\}^t + a_3 \{\ddot{U}\}^t\}, \quad (28)$$

які визначають собою частини вузлових інерційних реакцій в моменти часу $t + \Delta t$ та t .

$$\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\overline{\overline{R}}_{\rho}\}^t - \quad (29)$$

амплітудний ефективний вектор зовнішніх навантажень.

У випадку розв'язання лінійної задачі теорії пружності стає можливим однозначний перехід (21) до запису через матрицю жорсткості із сталими коефіцієнтами:

$$[\hat{K}]^{t+\Delta t} \{U\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (30)$$

де $[\hat{K}]^{t+\Delta t} = [K]^{t+\Delta t} + a_0 [M]$ - ефективна амплітудна матриця жорсткості.

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \dots & [K]_{l_0 m} & \dots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \dots & [K]_{ll} & \dots & [K]_{llL} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \dots & [K]_{Lm} & \dots & [K]_{LL} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Амплітудні вектори швидкостей та прискорень обчислюються на основі рішення (30), тобто $\{U\}^t$, по формулам:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^t &= a_0 (\{U\}^t - \{U\}^{t-\Delta t}) - a_2 \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} - a_3 \{\ddot{U}\}^{t-\Delta t}, \\ \{\dot{U}\}^t &= \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} + a_6 \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} + a_7 \{\ddot{U}\}^t, \end{aligned} \quad (32)$$

де $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$, $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$, $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$, $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$, $a_7 = \delta \Delta t$ - коефіцієнти методу Н'юмарка.

Розв'язання систем нелінійних рівнянь. Найбільше розповсюдження серед методів розв'язання систем нелінійних рівнянь методом скінченних елементів отримав алгоритм заснований на поєднанні методу додаткових навантажень та ітераційної процедури Н'ютона-Канторовича.

На кожній ітерації n кроку $t + \Delta t$ у часі рішення ситеми подається у вигляді:

$$\{U\}_{n+1}^{t+\Delta t} = \{U\}_n^{t+\Delta t} + [\hat{K}]^{-1} (\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_n^{t+\Delta t}), \quad (33)$$

$$\{R\}_n^{t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_n^{t+\Delta t}. \quad (34)$$

$\{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій, що враховує розвиток пластичних деформацій. Компоненти векторів $\{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t}$ та $\{\bar{R}_\rho\}_n^{t+\Delta t}$ визначаються в результаті обходу скінченноелементної області та асамблювання компонент векторів окремих елементів.

Ітераційний процес закінчується на ітерації $N=n$ кроку $t + \Delta t$ при задоволенні нерівності:

$$\left\| \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_n^{t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon_Q \left\| \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} \right\|, \quad (35)$$

де ε_Q - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи нелінійних рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

Як показано в роботі [7], найбільш універсальним і економічним алгоритмом розв'язання одержаної на ітерації n кроку $t + \Delta t$ за часом лінійної системи рівнянь є алгоритм блокового методу послідовної верхньої релаксації [1].

Клітинна структура систем рівнянь напіваналітичного метода скінченних елементів природньо визначає вибір блоку ітераційного процесу у вигляді підсистеми, що формується для одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{n\ i+1}^{t+\Delta t} = \{U\}_{n\ i}^{t+\Delta t} + \omega [\hat{K}]_{ii}^{-1} (\{P\}_{i\ n}^{t+\Delta t} - \{\bar{R}\}_{i\ i}^{t+\Delta t}), \quad (36)$$

де $\{P\}_{i\ n}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}_i^{t+\Delta t} + \{R\}_{i\ n}^{t+\Delta t}$ - амплітудний вектор навантаження на на ітерації n кроку $t + \Delta t$, отриманий з урахуванням дійсних значень напружень при наявності пластичних деформацій, ω - параметр релаксації ($1 \leq \omega < 2$).

$$\{\bar{R}\}_{i\ i}^{t+\Delta t} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [\hat{K}]_{lm} \{U\}_{i+1}^{m\ t+\Delta t} + \sum_{m=l}^L [\hat{K}]_{lm} \{U\}_i^{m\ t+\Delta t}, \quad (37)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації $I=i$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon_U \left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} \right\|, \quad (38)$$

де $\{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації i ,
 $\{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} = \sum_{i=1}^I \{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t}$ - вектор прирощень амплітудних переміщень,
 ε_U - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи лінійних рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

В загальному випадку ітераційні процеси I /розв'язання лінійної системи рівнянь (36)/, та N /розв'язання нелінійної системи рівнянь задачі пластичності (33)/ будуються послідовно. Кількість ітерацій, що потребує розв'язання задачі, дорівнює добутку кількості ітерацій на цих двох циклах.

В даній роботі пропонується поєднання обох ітераційних процедур, що дозволяє значно зменшити загальну кількість ітерацій:

$$\{U\}_{k+1}^{l+t+\Delta t} = \{U\}_k^{l+t+\Delta t} + \omega [K]_{ll}^{-1} \left(\{Q\}_l^{l+t+\Delta t} - \{R\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} \right), \quad (39)$$

$$\{R\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} \quad (40)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації $K=k$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} \right\|, \quad (41)$$

де $\{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації k ,
 $\{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} = \sum_{k=1}^K \{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t}$ - вектор прирощень амплітудних переміщень,
 ε - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання одержаної системи рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

Розглянемо докладніше процедуру обчислення вектора $\{R_\sigma\}_{l,k}^{l+t+\Delta t}$. На першому етапі кожного кроку розв'язання задачі проводиться визначення

напружено-деформованого стану в припущенні пружного деформування. Напруження $\sigma_k^{ij t+\Delta t}$ на ітерації k обчислюються за формулою:

$$\sigma_k^{ij t+\Delta t} = \sigma^{ij t} + \Delta \sigma_k^{ij t+\Delta t}. \quad (42)$$

Прирошення напружень $\Delta \sigma_k^{ij t+\Delta t}$ визначаються із прирощень деформацій за допомогою закону Гука.

Корекція компонент тензора напружень на кожній ітерації k кроку $t + \Delta t$ здійснюється за умови $\tau_s^{t+\Delta t} < T_k^{t+\Delta t}$ згідно з методикою Уілкінса [12]:

$$\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t} = \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} + S_k^{ij t+\Delta t} \frac{\tau_s^{t+\Delta t}}{T_k^{t+\Delta t}}, \quad (43)$$

де $\sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} = 1/3 \sigma_k^{ij t+\Delta t} \delta^{ij}$ - компоненти шарового тензору напружень,

$S_k^{ij t+\Delta t} = \sigma_k^{ij t+\Delta t} - \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} \delta^{ij}$ - компоненти девіатора напружень,

$T_k^{t+\Delta t} = \sqrt{1/2 S_{ij k}^{t+\Delta t} S_k^{ij t+\Delta t}}$ - інтенсивність дотичних напружень, $\tau_s^{t+\Delta t}$ - границя текучості матеріалу.

Для зручності обчислення можна записати:

$$\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t} = (1-\alpha) \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} \delta^{ij} + \alpha \sigma_k^{ij t+\Delta t}, \quad (44)$$

де $\alpha = \tau_s^{t+\Delta t} / T_k^{t+\Delta t}$.

Далі вектор $\{R_{\sigma J_{tk}}\}^{t+\Delta t}$ обчислюється за допомогою $\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t}$, перевіряється умова (41), в разі задоволення якої ітераційний процес припиняється.

Дійсні значення деформацій пластичності визначаються як:

$$\varepsilon_{ij}^{p t+\Delta t} = \varepsilon_{ij}^{p t} + \Delta \varepsilon_{ij}^{p t+\Delta t} = \varepsilon_{ij}^{p t} + (1-\alpha) \bar{S}^{ij t+\Delta t} / G_1. \quad (45)$$

Тут $\bar{S}^{ij t+\Delta t} = \bar{\sigma}^{ij t+\Delta t} - \bar{\sigma}_{\circ}^{t+\Delta t} \delta^{ij}$

Дослідження ефективності методики. При дослідженні об'єктів з урахуванням незворотніх пластичних деформацій, як правило, найбільший інтерес представляє аналіз утворення та розповсюдження зон

нелінійної роботи матеріалу, а також рівні інтенсивностей пластичних деформацій.

Для обґрунтування вірогідності пружнопластичного деформування тіл з отворами, що порушують осесиметричність форми, отримані рішення для нескінченного циліндра з двома вирізами на внутрішній поверхні (рис.1). Інтенсивність зовнішнього тиску - $q_a = 0.75 \times 10^8$ Па. Матеріал – ідеально пружнопластичний з межею текучості при чистому зсуві $\tau_s = 1.7 \times 10^8$ Па.

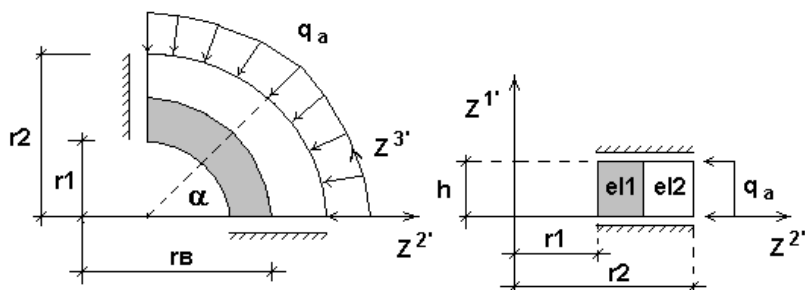


Рис. 1. Розрахункова схема

Навантаження прикладається миттєво та утримується постійним на протязі всього часового інтервалу.

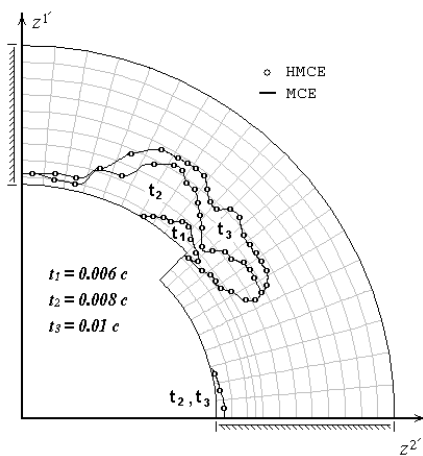


Рис. 2. Зони пластичних деформацій

Вздовж радіуса циліндр апроксимується 14 СЕ двох типів: однорідними – e12 та неоднорідними – e11. Параметри дискретної моделі: крок у часі $\Delta t = 10^{-4}$ с, інтервал розв'язання $t/\Delta t \in [1; 200]$, внутрішній радіус $r_1 = 10$ м, зовнішній радіус $r_2 = 20$ м, радіус вирізу $r_b = 12$ м, кут розвору $2\alpha = 90^\circ$. Фізико-механічні характеристики матеріалу: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³, $\nu = 0.3$. Розв'язання задачі отримано

при апроксимації невідомих 30 базисними функціями вздовж направляючої.

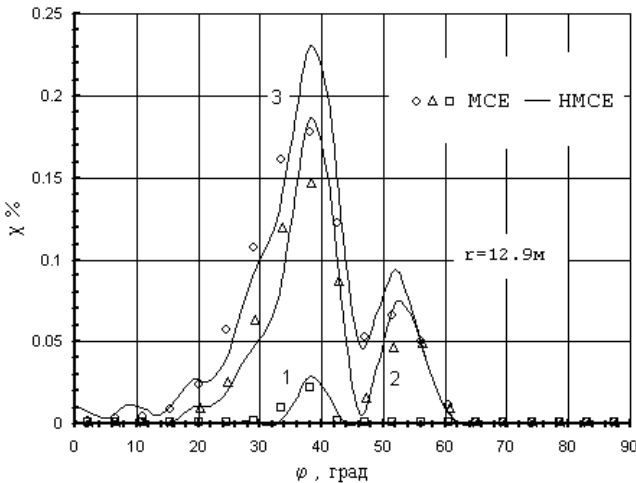


Рис. 3. Інтенсивності пластичних деформацій.
 $t=0.006\text{с}$ (1), $t=0.008\text{с}$ (2), $t=0.01\text{с}$ (3)

Розвиток пластичних деформацій у часі показано на рис.2, 3. Незворотні деформації захоплюють найбільший об'єм матеріалу в області $Z^3 \in [25^\circ ; 40^\circ]$. Як видно з наведених даних, на всьому інтервалі навантаження спостерігається кількісне і якісне узгодження результатів MCE та HMCE.

Достовірність застосування створеного чисельного підходу до дослідження пружнопластичних призматичних просторових об'єктів із змінними фізичними параметрами, підтверджена шляхом розв'язання контрольної задачі про нескінченну полосу (рис. 4) з урахуванням нелінійної роботи матеріалу. Полоса знаходиться під дією рівномірно розподіленого по верхній поверхні навантаження $q_a=0.85 \times 108\text{Па}$. Фізико-механічні параметри аналогічні моделі попереднього дослідження. Крок у часі $\Delta t = 3.2 \times 10^{-6}\text{с}$. Інтервал часу: $t/\Delta t \in [0 ; 100]$. В силу симетричності відносно Z^1 розглядали половину моделі полоси, для якої граничні умови на торцях приймали у вигляді: $u_3(Z^3 = 0) = 0$, $u_1(Z^3 = 0.1) = 0$, $u_2(Z^3 = 0.1) = 0$.

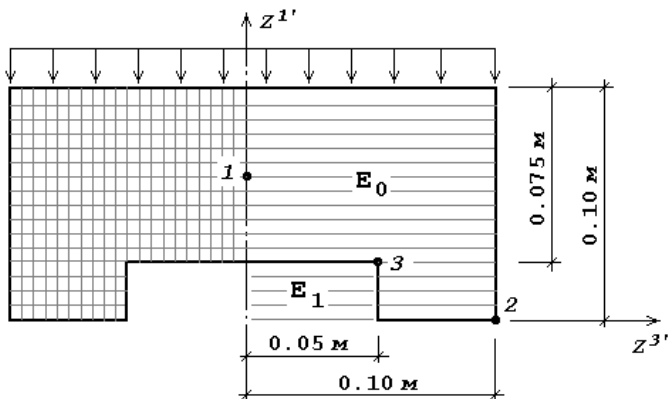
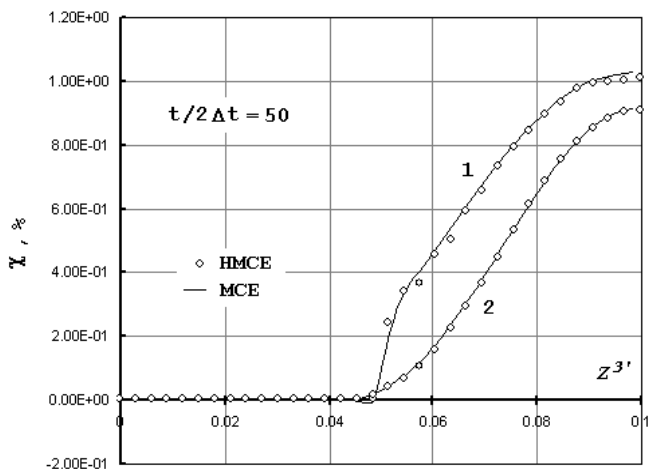


Рис. 4

Дослідження виконані при фіксованій кількості елементів вздовж $Z1'$, що дорівнює 16. За контрольні розглядалися точки: 1 - ($Z1'=0.0625\text{м}$, $Z3'=0.0\text{м}$), 2 - ($Z1'=0.0\text{м}$, $Z3'=0.1\text{м}$) в яких виникають максимальні значення переміщень вздовж $Z1'$ і $Z3'$ відповідно, та особа точка 3 - ($Z1'=0.025\text{м}$, $Z3'=0.05\text{м}$).

Рис. 5. 1 – $Z1'=0.028\text{м}$, 2 – $Z1'=0.097\text{м}$

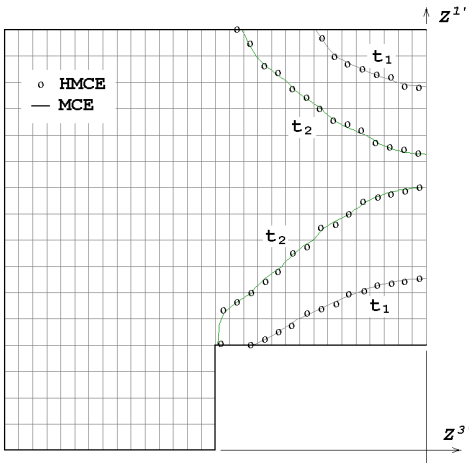


Рис. 6. $t_1=0.96 \times 10^{-4} \text{с}$, $t_2=3.2 \times 10^{-4} \text{с}$

Накопичені в процесі деформування пластичні деформації, в області, де їх інтенсивності досягають максимальних значень, показані на рис. 5 для зовнішньої та внутрішньої (по лінії вирізу) поверхонь полоси. При цьому розподіл зон нелінійної роботи матеріалу виявляє тенденцію до утворення пластичного шарніру (рис. 6).

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Bate K., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
3. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Механика и машиностроение. Изв. АН УССР.- 1961.- №1.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. -483с.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Піскунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 3-29.
6. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матрица жесткости и вектор узловых реакций скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 76. - С. 3-26.
7. *Гуляр А.И., Половец І.В., Сахаров А.С.* "Численное моделирование на основе метода конечных элементов процессов пластического формоизменения тел вращения при наличии сил трения". -Киев, 1984. -27с., Деп. в УкрНИИТИ, №1788 Ук-Деп.
8. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математической теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
9. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Модель и алгоритм // Прикладные проблемы прочности и пластичности.- 1975.- Вып. 1.- С.1-18.
10. *Ильюшин А.А.* Пластичность: основы общей математической теории.- М.: Изд-во АН СССР, 1963.- 248 с.
11. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ.- 1958.- 22, № 1.- С.78-99.
12. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности.- М.: Изд. технико-теоретич. лит., 1963.- 327 с.

13. *Коротких Ю.Г., Белевич С.М.* Основные уравнения термопластичности при сложном нагружении // Методы решения задач упругости и пластичности.- Горький, 1969.- С.134-141.
14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.- М.: Наука, 1980.- 512с.
15. *Лурье А.И.* Теория упругости.- М.: Наука, 1970.- 939с.
16. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения.- М.: Наука, 1980.- 256с.
17. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.- 344с.
18. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения, теория и приложения.- М.: Наука, 1982.- 111с.
19. *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
20. *Akay H.U.* "Dynamic large deflection analysis of plates using mixed finite element." – Computer and Structures, 1980, 11, p.1-11.
21. *Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.* "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis" // Int. J. Numer. Meth. Engng.- 1975.- 5, N 2, PP. 353-386.
22. *Geradin M., Idelson N., Hogge M.* "Computational strategies for the solution of large nonlinear problems via quasi-Newton methods." –Computers and Structures, vol. 13, 1981, p.73-81.
23. *Modkar D.P., Povel G.H.* "Finite element analysis of non-linear static and dynamic response." –Int. J. for Numerical methods in eng., 1977, 11, p.499-520.

Надійшло до редакції 28.11.2006 р.