УДК 539.3

А.М. Станкевич, канд. техн. наук
В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
Л.Т. Шкельов, канд. техн. наук

МЕТОД ПРЯМИХ У ПРОСТОРОВІЙ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Методика зниження вимірності рівнянь плоскої задачі теорії пружності з подальшим розв'язанням одновимірної граничної задачі методом С.К. Годунова, запропонована в роботі [1], поширюється на тривимірну задачу. Всі перетворення суттєво використовують індексну форму запису,термінологію та основні формальні принципи тензорного числення. Отримано систему розв'язувальних одновимірних рівнянь та граничні умови загального вигляду. Поставлена гранична задача розв'язується високоефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Розглядається брус прямокутного поперечного перерізу, що є прямокутним паралелепіпедом, три характерні розміри якого співрозмірні. Брус віднесений до декартової системи координат і займає область тривимірного простору $\Omega=[0,l]\times[0,h_y]\times[0,h_z]$. Напружено-деформований стан бруса описується рівняннями просторової задачі теорії пружності, які можна записати у формі системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку відносно компонентів вектора переміщень U,V,W і тензора напружень $\sigma_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz},\sigma_{yy},\tau_{yz},\sigma_{zz}$.

$$\frac{\partial U^*}{\partial x}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xx}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial V^*}{\partial y}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial W^*}{\partial z};$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial x}=\tau_{xy}-\frac{\partial V^*}{\partial y};\ \ \frac{\partial W^*}{\partial x}=\tau_{xz}-\frac{\partial U^*}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}=-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}-X;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}=-\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}-Y;$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}=-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}-\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}-Z, \tag{1}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial U^*}{\partial x}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial V^*}{\partial y}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial W^*}{\partial z};$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial V^*}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{\partial W^*}{\partial z};$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial W^*}{\partial y} + \frac{\partial V^*}{\partial z}. \qquad (2)$$

Тут $U^* = \mu U$, $V^* = \mu V$, $W^* = \mu W$; λ, μ - коефіцієнти Ламе, X, Y, Z - об'ємні сили, в рівняннях враховується закон парності дотичних напружень.

На кожній з шести граничних площин розглядаються граничні умови загального вигляду (рис. 1), які дозволяють розглядати кінематичні, статичні та мішані умови. Кожна точка зовнішніх граней бруса прикріплена до відповідної точки оточуючого середовища трьома пружніми стержнями заданої жорсткості r . Ця точка оточуючого середовища може зміщуватися на задані переміщення Δ у трьох координатних напрямках. До точки зовнішньої грані бруса може бути прикладене розподілене навантаження $\vec{q}$. Для всіх величин, що увійдуть до граничних умов, прийнято позначення за допомогою трьох індексів, які ідентифікують грань бруса, в точках якої ці величини розглядаються.

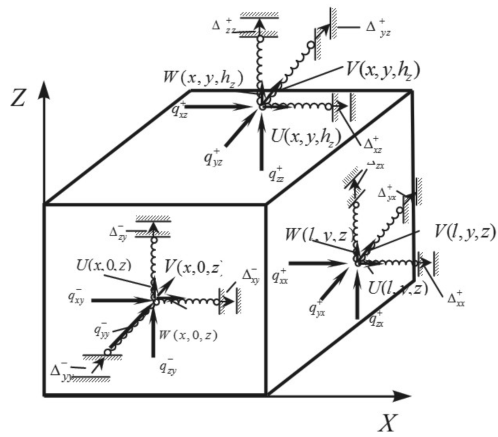

Рис. 1. Умови закріплення та навантаження бруса

Перший нижній індекс визначає вісь, якою визначається ця величина; другий нижній індекс визначає нормаль до відповідної грані, верхній індекс для торцевих граней 0 або l визначає грань за її координатою по осі OX , для бокових граней + або − відповідає знаку зовнішньої нормалі на цій грані. На всіх гранях додатні напрямки навантажень та осадок співпадають з додатними напрямками відповідних осей.

Відповідні граничні умови випливають з рівнянь рівноваги (рис. 2) і тому є природними граничними умовами. Вони мають вигляд:

при $x = 0$

$$r_{xx}^{0}U(0,y,z)-\sigma_{xx}(0,y,z)=r_{xx}^{0}\Delta_{xx}^{0}(y,z)+q_{xx}^{0}(y,z),$$
$$r_{yx}^{0}V(0,y,z)-\tau_{yx}(0,y,z)=r_{yx}^{0}\Delta_{yx}^{0}(y,z)+q_{yx}^{0}(y,z),$$
$$r_{zx}^{0}W(0,y,z)-\tau_{zx}(0,y,z)=r_{zx}^{0}\Delta_{zx}^{0}(y,z)+q_{zx}^{0}(y,z),$$

при $x=l$

$$r_{xx}^{l}U(l,y,z)+\sigma_{xx}(l,y,z)=r_{xx}^{l}\Delta_{xx}^{l}(y,z)+q_{xx}^{l}(y,z),$$
$$r_{yx}^{l}V(l,y,z)+\tau_{yx}(l,y,z)=r_{yx}^{l}\Delta_{yx}^{l}(y,z)+q_{yx}^{l}(y,z), \qquad (3)$$
$$r_{zx}^{l}W(l,y,z)+\tau_{zx}(l,y,z)=r_{zx}^{l}\Delta_{zx}^{l}(y,z)+q_{zx}^{l}(y,z),$$

На бокових гранях:

при $y=0$

$$r_{xy}^{-}U(x,0,z)-\tau_{xy}(x,0,z)=r_{xy}^{-}\Delta_{xy}^{-}(x,z)+q_{xy}^{-}(x,z),$$
$$r_{yy}^{-}V(x,0,z)-\sigma_{yy}(x,0,z)=r_{yy}^{-}\Delta_{yy}^{-}(x,z)+q_{yy}^{-}(x,z),$$
$$r_{zy}^{-}W(x,0,z)-\tau_{zy}(x,0,z)=r_{zy}^{-}\Delta_{zy}^{-}(x,z)+q_{zy}^{-}(x,z),$$

при $y=h_y$

$$r_{xy}^{+}U(x,h_y,z)+\tau_{xy}(x,h_y,z)=r_{xy}^{+}\Delta_{xy}^{+}(x,z)+q_{xy}^{+}(x,z),$$
$$r_{yy}^{+}V(x,h_y,z)+\sigma_{yy}(x,h_y,z)=r_{yy}^{+}\Delta_{yy}^{+}(x,z)+q_{yy}^{+}(x,z),$$
$$r_{zy}^{+}W(x,h_y,z)+\tau_{zy}(x,h_y,z)=r_{zy}^{+}\Delta_{zy}^{+}(x,z)+q_{zy}^{+}(x,z),$$

при $z=0$

$$r_{xz}^{-}U(x,y,0)-\tau_{xz}(x,y,0)=r_{xz}^{-}\Delta_{xz}^{-}(x,y)+q_{xz}^{-}(x,y),$$
$$r_{yz}^{-}V(x,y,0)-\tau_{yz}(x,y,0)=r_{yz}^{-}\Delta_{yz}^{-}(x,y)+q_{yz}^{-}(x,y),$$
$$r_{zz}^{-}W(x,y,0)-\sigma_{zz}(x,y,0)=r_{zz}^{-}\Delta_{zz}^{-}(x,y)+q_{zz}^{-}(x,y),$$

при $z=h_z$

$$r_{xz}^{+}U(x,y,h_z)+\tau_{xz}(x,y,h_z)=r_{xz}^{+}\Delta_{xz}^{+}(x,y)+q_{xz}^{+}(x,y),$$
$$r_{yz}^{+}V(x,y,h_z)+\tau_{yz}(x,y,h_z)=r_{yz}^{+}\Delta_{yz}^{+}(x,y)+q_{yz}^{+}(x,y), \qquad (4)$$
$$r_{zz}^{+}W(x,y,h_z)+\sigma_{zz}(x,y,h_z)=r_{zz}^{+}\Delta_{zz}^{+}(x,y)+q_{zz}^{+}(x,y).$$

Якщо в якомусь із співвідношень (3), (4) покласти $r=0$, то отримаємо статичну граничну умову, а при $r\to\infty$ умова буде кінематичною, якщо ж $r\neq 0$, то це буде мішана гранична умова. При чисельній реалізації граничних умов на торцях граничні умови необхідно перетворити, поділивши кожне із співвідношень (3) на $\sqrt{1+r^2}$, де r розглядається із відповідними індексами, наприклад (5):

$$\frac{r_{xx}^0}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}}U(0,y,z)-\frac{1}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}}\sigma_{xx}(0,y,z)=\frac{r_{xx}^0}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}}\Delta_{xx}^0+\frac{1}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}}q_{xx}^0.$$

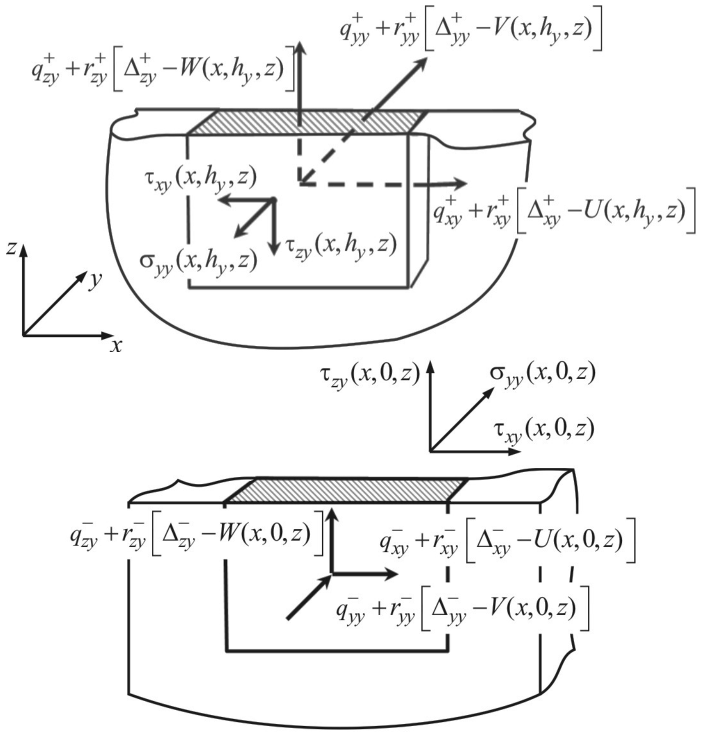

Рис.2. До умов рівноваги на гранях

Саме для граничних умов у такому вигляді не виникає ускладнень при граничному переході $r_{xx}^0 \to \infty$.

Для розв’язання граничної задачі (1) – (4) пропонується скористатися комбінованим підходом: на першому етапі знижується вимірність граничної задачі по двох координатах, а на другому - редуковану задачу, яка буде граничною задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь, розв’язувати чисельно за допомогою ефективного чисельно стійкого методу дискретної ортогоналізації С.К.Годунова. Для зниження вимірності вихідних рівнянь по двох координатах, а саме по y та z, скористаємося ідеєю методу прямих, узагальненого в роботі [1].

Розбиваючи відрізок $[0,h_y]$ на $(m-1)$ однакових ділянок, отримуємо m точок, включно з двома граничними і через кожну таку точку проведемо m площин, паралельних координатній площині XOZ. Аналогічно через n точок на відрізку $[0,h_z]$ проведемо n площин, паралельних координатній площині XOZ. У перетині цих площин утворюється сукупність $m\times n$ прямих, паралельних осі OX.

У кожному поперечному перерізі бруса маємо сітку з $m\times n$ точок. Це дає змогу визначити $m\times n$ базисних функцій, кожна з яких є добутком $\psi_{ik}(y,z)=\varphi_i(y)\cdot\varphi_k(z)$, де функції $\varphi_i(y)$ визначені в роботі [1], а функції $\varphi_k(z)$ - аналогічні функції, тільки залежні від координати z. Оскільки функції $\psi_{ik}(y,z)$ визначені на прямокутнику $[0,h_y]\times[0,h_z]$ і є добутками двох функцій однієї змінної, то розглядаючи подвійні інтеграли з цими функціями, як добутками двох множників у підінтегральних виразах, необхідно зазначити, що ці подвійні інтеграли обчислюються як двократні – спочатку по одній змінній (наприклад y), а потім по іншій. Оскільки застосування методики зниження вимірності, розвиненої в роботі [1] пов’язане з індексною формою запису, а тут зниження вимірності буде по двох змінних, то для індексів, пов’язаних з базисними функціями по координаті y, будемо використовувати індекси i,j,α,β,γ, які змінюються від 1 до m, а для індексів, пов’язаних з базисними функціями по координаті z – індекси $k,l,\varepsilon,\eta,\theta$, що змінюються від 1 до n. Оскільки базисні функції не ортогональні, то необхідно використовувати метричні тензори, причому це можна робити по координатам y та z окремо. Тому визначимо ці тензори:

двічі коваріантний метричний тензор

$$g_{ij}=(\varphi_i(y),\varphi_j(y))=\int_0^{h_y}\varphi_i(y)\cdot\varphi_j(y)dy,$$

та двічі контраваріантний метричний тензор g^{ij}, що визначається співвідношенням

$$(g^{ij}\cdot g_{j\alpha})=\delta^{i\cdot}_{\cdot\alpha},$$

де $\delta^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ - символ Кронекера, або мішаний метричний тензор. Аналогічно:

$$g_{kl}=(\varphi_k(z),\varphi_l(z))=\int_0^{h_z}\varphi_k(z)\cdot\varphi_l(z)dz,\ g^{kl}:(g^{kl}\cdot g_{l\varepsilon})=\delta^{k\cdot}_{\cdot\varepsilon}.$$

Тут і далі по індексах, що повторюються, передбачається підсумування. Будемо також використовувати матриці:

$$\left\{b_{ij}\right\} = (\varphi_i(y), \varphi_j^{'}(z)),\ \left\{b_{kl}\right\} = (\varphi_k(z), \varphi_l^{'}(z)),$$

де штрихом позначено похідну по відповідній координаті.

Використовуючи далі поняття коефіцієнтів та моментів відносно вибраних базисних функцій будемо розрізняти їх по координаті y та координаті z і позначати відповідно розташованими індексами – коефіцієнти (контраваріантні компоненти) позначаємо індексами вгорі, моменти (коваріантні компоненти) позначаємо індексами унизу і так окремо по координаті у та координаті z .

Помноживши скалярно перше рівняння системи (1) на базисну функцію $\psi_{ik}(y,z)$ за правилом:

$$(f(x,y,z), \psi_{ik}(y,z)) = \int_0^{h_z}(\int_0^{h_y} f(x,y,z)\cdot\varphi_i(y))\cdot\varphi_k(z)dz = f^{ik}(x),$$

помічаємо, що ці викладки еквівалентні послідовному застосуванню перетворень по одній координаті, які досліджені в [1]. У результаті отримуємо:

$$\frac{dU_{ik}^*}{dx} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xik} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ij}V^{*j\cdot}_{\cdot k} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{kl}W^{*\cdot l}_{i\cdot}. \tag{6}$$

Оскільки при інтегруванні виразів з похідними по y та z з’являються індекси різного рівня, то необхідно побудувати рівняння з невідомими, які мають однакову структуру. Оскільки ліворуч $U_{ik}^*(x)$ отримане в моментах по y (нижній індекс i) та z (нижній індекс k), то необхідно, щоб усі невідомі були в моментах по обох індексах. З цією метою застосуємо операцію опускання індексів за допомогою двічі контраваріантного метричного тензора. У результаті отримаємо:

$$\frac{dU_{ik}^*}{dx} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xik} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ij}g^{j\alpha}V_{\alpha k}^* - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{kl}g^{l\varepsilon}W_{i\varepsilon}^*. \tag{7}$$

Аналогічно отримаємо ще два рівняння

$$\frac{dV_{ik}^*}{dx} = \tau_{xyik} - b_{ij}g^{j\alpha}U_{\alpha k}^*, \tag{8}$$

$$\frac{dW_{ik}^*}{dx} = \tau_{xzik} - b_{kl}g^{l\varepsilon}U_{i\varepsilon}^*. \tag{9}$$

Наступні три рівняння системи (1) статичні. Зниження вимірності цих рівнянь має деякі особливості – до них входять похідні від напружень по координатах y та z (за якими іде редукування), тому безпосереднє обчислення відповідних інтегралів так, як зроблено для похідних по y та z від переміщень, неприпустиме. Тут необхідно застосувати інтегрування частинами, щоб похідна по y або z під інтегралом бралася від базисної функції, а потім для обчислення інтеграла відповідне напруження можна розкласти по базисних функціях. У результаті таких дій отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx}=-[\tau_{xyk}\varphi_i(y)\Big|_0^{h_y}-b_{ji}\tau_{xy\cdot k}^{j\cdot}]-[\tau_{xzi}\varphi_k(z)\Big|_0^{h_z}-b_{lk}\tau_{xzi\cdot}^{\cdot l}]-X_{ik}. \qquad (10)$$

Оскільки:

$$\tau_{xyk}(x,y)\cdot\varphi_i(y)\Big|_0^{h_y}=\tau_{xyk}(x,h_y)\cdot\varphi_i(h_y)-\tau_{xyk}(x,0)\cdot\varphi_i(0),$$

а

$$\varphi_i(h_y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } i=m\\ 0, \text{ при інших } i\end{cases}, \quad \varphi_i(0)=\begin{cases}1, \text{ якщо } i=1\\ 0, \text{ при інших } i\end{cases}$$

і відповідні співвідношення мають місце для $\varphi_k(n)$ та $\varphi_k(0)$, то

$$\tau_{xyk}(x,y)\cdot\varphi_i(y)\Big|_0^{h_y}=\begin{bmatrix}-\tau_{xy\cdot k}^{1\cdot}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \tau_{xy\cdot k}^{m\cdot}\end{bmatrix}, \quad \tau_{xyi}(x,z)\cdot\varphi_k(z)\Big|_0^{h_z}=\begin{bmatrix}-\tau_{xzi\cdot}^{\cdot 1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \tau_{xzi\cdot}^{\cdot m}\end{bmatrix},$$

де позначимо $\tau_{xy\cdot k}^{1\cdot}=\tau_{xyk}(x,0)$, $\tau_{xy\cdot k}^{m\cdot}=\tau_{xyk}(x,h_y)$, $\tau_{xzi\cdot}^{\cdot 1}=\tau_{xzi}(x,0)$, $\tau_{xzi\cdot}^{\cdot n}=\tau_{xzi}(x,h_z)$.

З граничних умов (4), домножуючи їх на $\varphi_i(y)$ або $\varphi_k(z)$ та інтегруючи по відповідній координаті, знаходимо:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xy\cdot k}^{1\cdot}(x)=r_{xy}^{-}U_{\cdot k}^{1\cdot}(x)-r_{xy}^{-}\Delta_{xyk}^{-}(x)-q_{xyk}^{-}(x),\\
&\tau_{xy\cdot k}^{m\cdot}(x)=-r_{xy}^{+}U_{\cdot k}^{m\cdot}(x)+r_{xy}^{+}\Delta_{xyk}^{+}(x)+q_{xyk}^{+}(x),\\
&\tau_{xzi\cdot}^{\cdot 1}(x)=r_{xz}^{-}U_{i\cdot}^{1\cdot}(x)-r_{xz}^{-}\Delta_{xzi}^{-}(x)-q_{xzi}^{-}(x),\\
&\tau_{xzi\cdot}^{\cdot n}(x)=-r_{xz}^{-}U_{i\cdot}^{n\cdot}(x)+r_{xz}^{+}\Delta_{xzi}^{+}(x)+q_{xzi}^{+}(x).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що $r\cdot U=r^*\cdot U^*$ та $r\cdot\Delta=r^*\cdot\Delta^*$, якщо позначити $r^*=\dfrac{r}{\mu}$, а $U^*=\mu\cdot U$, $\Delta^*=\Delta\cdot\mu$ аналогічно для всіх переміщень, то остаточно рівняння (10) буде таким:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{xy}\cdot U^{*1\cdot}_{\cdot k}+r^{*-}_{xz}\cdot U^{*\cdot 1}_{i\cdot} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{xy}\cdot U^{*m\cdot}_{\cdot k}+r^{*+}_{xz}\cdot U^{*\cdot n}_{i\cdot} \end{bmatrix}+b_{ji}\tau_{xy\cdot k}^{\,j\cdot}+b_{lk}\tau_{xzi\cdot}^{\,\cdot l}-X_{ik}-$$
$$-\begin{bmatrix} r^{*-}_{xy}\cdot\Delta^{*-}_{xyk}+r^{*-}_{xz}\cdot\Delta^{*-}_{xzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{xy}\cdot\Delta^{*+}_{xyk}+r^{*+}_{xz}\cdot\Delta^{*+}_{xzi} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} q^{-}_{xyk}+q^{-}_{xzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q^{+}_{xyk}+q^{+}_{xzi} \end{bmatrix}.$$

Опускаючи верхні індекси у всіх невідомих, остаточно отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{xy}\cdot g^{1j}\cdot U^{*}_{jk}+r^{*-}_{xz}\cdot g^{1l}\cdot U^{*}_{il} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{xy}\cdot g^{mj}\cdot U^{*}_{jk}+r^{*+}_{xz}\cdot g^{nl}\cdot U^{*}_{il} \end{bmatrix}+b_{ji}g^{j\alpha}\tau_{xy\alpha k}+b_{lk}g^{l\varepsilon}\tau_{xzi\varepsilon}-\bar{X}_{ik},\quad (11)$$

де $\bar{X}_{ik}$ позначено суму вільних членів.

Аналогічно з двох останніх рівнянь системи (1) отримаємо два тензорних рівняння:

$$\frac{d\tau_{xyik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{yy}\cdot g^{1j}\cdot V^{*}_{jk}+r^{*-}_{yz}\cdot g^{1l}\cdot V^{*}_{il} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{yy}\cdot g^{mj}\cdot V^{*}_{jk}+r^{*-}_{yz}\cdot g^{nl}\cdot V^{*}_{il} \end{bmatrix}+b_{ji}g^{j\alpha}\sigma_{y\alpha k}+b_{lk}g^{l\varepsilon}\tau_{yzi\varepsilon}-\bar{Y}_{ik},$$

$$\frac{d\tau_{xzik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{zy}\cdot g^{1j}\cdot W^{*}_{jk}+r^{*-}_{zz}\cdot g^{1l}\cdot W^{*}_{il} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{zy}\cdot g^{mj}\cdot W^{*}_{jk}+r^{*+}_{zz}\cdot g^{nl}\cdot W^{*}_{il} \end{bmatrix}+b_{ji}g^{j\alpha}\tau_{yz\alpha k}+b_{lk}g^{l\varepsilon}\sigma_{zi\varepsilon}-\bar{Z}_{ik},$$

де позначено:

$$\bar{Y}_{ik} = Y_{ik} + \begin{bmatrix} r^{*-}_{yy} \cdot \Delta^{*-}_{yyk} + r^{*-}_{yz} \cdot \Delta^{*-}_{yzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{yy} \cdot \Delta^{*+}_{yyk} + r^{*+}_{yz} \cdot \Delta^{*+}_{yzi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q^{-}_{yyk} + q^{-}_{yzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q^{+}_{yyk} + q^{+}_{yzi} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Z}_{ik} = Z_{ik} + \begin{bmatrix} r^{*-}_{zy} \cdot \Delta^{*-}_{zyk} + r^{*-}_{zz} \cdot \Delta^{*-}_{zzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{zy} \cdot \Delta^{*+}_{zyk} + r^{*+}_{zz} \cdot \Delta^{*+}_{zxi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q^{-}_{zyk} + q^{-}_{zzi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q^{+}_{zyk} + q^{+}_{zzi} \end{bmatrix}..$$

До цих двох рівнянь алгебраїчно входять моменти напружень σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{yz}, які можна виключити з цих рівнянь і тоді ми отримаємо замкнену систему. З цією метою проінтегруємо перші два співвідношення (2), як це робилось для побудови рівнянь (7), (8), (9):

$$\sigma_{yyik} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{dU^*_{ik}}{dx} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V^*_{\alpha k} + \frac{\lambda}{\mu} b_{kl} g^{l\varepsilon} W^*_{i\varepsilon},$$

$$\sigma_{zzik} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{dU^*_{ik}}{dx} + \frac{\lambda}{\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V^*_{\alpha k} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} b_{kl} g^{l\varepsilon} W^*_{i\varepsilon}.$$

Виключаючи з цих рівнянь $\frac{dU^*_{ik}}{dx}$, за допомогою рівняння (7) отримаємо алгебраїчні співвідношення:

$$\sigma_{yyik} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{xik} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V^*_{\alpha k} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} b_{kl} g^{l\varepsilon} W^*_{i\varepsilon},$$

$$\sigma_{zzik} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{xik} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V^*_{\alpha k} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{kl} g^{l\varepsilon} W^*_{i\varepsilon}. \qquad \text{(а)}$$

Відповідне співвідношення для τ_{yz} отримується безпосередньо:

$$\tau_{yzik} = b_{ij} g^{j\alpha} W^*_{\alpha k} + b_{kl} g^{l\varepsilon} V^*_{i\varepsilon}. \qquad \text{(в)}$$

Виключаючи σ_{yyik}, σ_{zzik}, τ_{yzik} з останніх двох тензорних диференціальних рівнянь, отримаємо:

$$\frac{d\tau_{xyik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{yy}\cdot g^{1j}\cdot V^*_{jk}+r^{*-}_{yz}\cdot g^{1l}\cdot V^*_{jk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{yy}\cdot g^{mj}\cdot V^*_{jk}+r^{*+}_{yz}\cdot g^{nl}\cdot V^*_{il} \end{bmatrix}+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}V^*_{\gamma k}+$$

$$+b_{lk}g^{\eta l}b_{\eta\varepsilon}g^{\varepsilon\theta}V^*_{i\theta}+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{\alpha j}b_{kl}g^{l\varepsilon}W^*_{\alpha\varepsilon}+ \tag{12}$$

$$+b_{lk}g^{l\varepsilon}b_{ij}g^{j\alpha}W^*_{\alpha\varepsilon}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{\alpha j}\sigma_{x\alpha k}-\overline{Y}_{ik},$$

$$\frac{d\tau_{xzik}}{dx}=\begin{bmatrix} r^{*-}_{yy}\cdot g^{1j}\cdot W^*_{jk}+r^{*-}_{yz}\cdot g^{1l}\cdot W^*_{jk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{*+}_{yy}\cdot g^{mj}\cdot W^*_{jk}+r^{*+}_{yz}\cdot g^{nl}\cdot W^*_{il} \end{bmatrix}+b_{ji}g^{j\alpha}b_{kl}g^{l\varepsilon}V^*_{\alpha\varepsilon}+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}b_{lk}g^{l\varepsilon}b_{ij}g^{j\alpha}V^*_{\alpha\varepsilon}+$$

$$+b_{ji}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}W^*_{\gamma k}+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}b_{lk}g^{l\varepsilon}b_{\varepsilon l}g^{l\theta}W^*_{i\theta}+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}b_{lk}g^{l\varepsilon}\sigma_{xi\varepsilon}-\overset{*}{Z}_{ik}. \tag{13}$$

Система розрахункових рівнянь (7) – (13) є замкненою системою $m\times n\times 6$ звичайних диференціальних рівнянь. Вона отримана в загальній формі, що не залежить від вибору конкретної кількості прямих по координаті y та координаті z. Така форма рівнянь дозволяє побудувати ефективний алгоритм побудови їх розв'язків.

Щоб виділити єдиний розв'язок цієї системи, необхідно задати граничні умови. Граничні умови в загальній формі отримаємо з вихідних граничних умов на границях $x=0$, та $x=l$. Оскільки ці умови є алгебраїчними співвідношеннями, то побудова відповідних редукованих умов виконується досить просто. Для цього кожна з граничних умов (3) множиться на $\varphi_i(y)$ та на $\varphi_k(z)$ та інтегрується по області $[0,h_y]\times[0,h_z]$. У результаті отримуємо $m\times n\times 3$ граничні умови на кожному кінці відрізка визначення рівнянь (7) – (13):

при $x=0$

$$\begin{aligned} &r^0_{xx}U^*_{ik}(0)-\sigma_{xxik}(0)=r^{*0}_{xx}\Delta^{*0}_{xxik}+q^0_{xxik},\\ &r^0_{yx}V^*_{ik}(0)-\tau_{yxik}(0)=r^{*0}_{yx}\Delta^{*0}_{yxik}+q^0_{yxik},\\ &r^0_{zx}W^*_{ik}(0)-\tau_{zxik}(0)=r^{*0}_{zx}\Delta^{*0}_{zxik}+q^0_{zxik} \end{aligned} \tag{14}$$

при $x=l$

$$r_{xx}^{l}U_{ik}^{*}(l)+\sigma_{xxik}(l)=r^{*l}_{xx}\Delta^{*l}_{xxik}+q_{xxik}^{l},$$
$$r_{yx}^{l}V_{ik}^{*}(l)+\tau_{yxik}(l)=r^{*l}_{yx}\Delta^{*l}_{yxik}+q_{yxik}^{l},\qquad(15)$$
$$r_{zx}^{l}W_{ik}^{*}(l)+\tau_{zxik}(l)=r^{*l}_{zx}\Delta^{*l}_{zxik}+q_{zxik}^{l}$$

Розроблено алгоритм побудови розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (7) – (13) з граничними умовами (14), (15) за допомогою високоефективного стійкого чисельного методу С.К.Годунова, реалізований у вигляді програми, написаної алгоритмічною мовою FORTRAN для ПЕОМ. Розв'язано тестові задачі, які показали високу точність та ефективність розробленого комбінованого методу. Деякі результати показані на рис. 3 - 6.

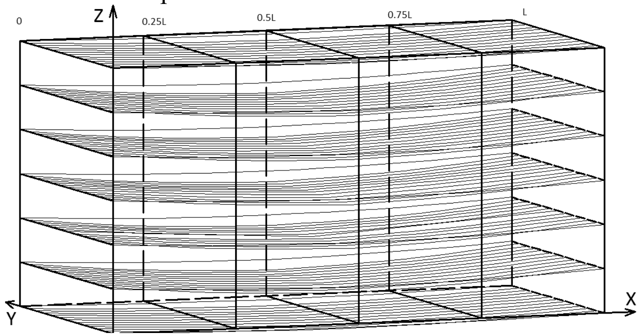

Рис.3. Деформація бруса розміром 1×0.5×0.5*м*

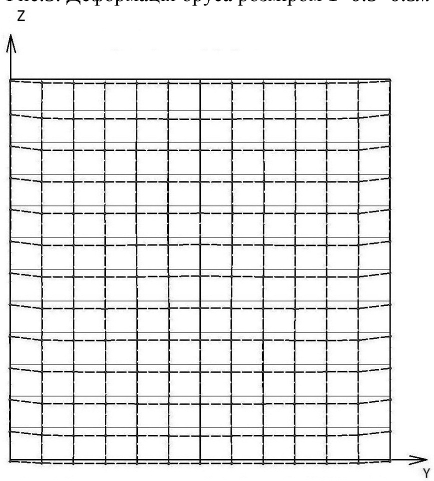

Рис. 4. Переміщення в перерізі 0.25*L* (переміщення в напрямку осі Z, збільшені в 20000 разів)

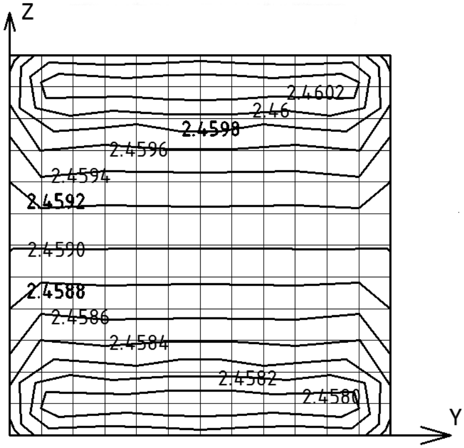

Рис.5. Переміщення в перерізі 0.25*L* (ізолінії перемішення в напрямку осі X)

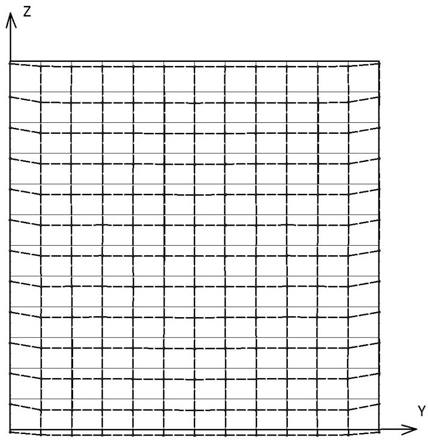

Рис.6. Переміщення в перерізі 0.5*L* (переміщення в напрямку осі Z, збільшені в 20000 разів)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36 – с. 413 – 423.
2. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.

3. *Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини. // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2010 - випуск №85, - с.109 – 117.
4. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* Один варіант методу прямих в задачах динаміки товстих пластин // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 38 – с.399-407.

Стаття надійшла до редакції 09.03.2011 р.

Станкевич А.Н., Чибиряков В.К., Шкелёв Л.Т.

МЕТОД ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методика понижения размерности уравнений плоской задачи теории упругости с последующим решением одномерной граничной задачи методом С.К. Годунова, предложенная в работе [1], распространяется на трехмерную задачу. Все преобразования существенно используют индексную форму записи, терминологию и основные формальные принципы тензорного исчисления. Получена система решающихся одномерных уравнений и граничные условия общего вида. Поставленная граничная задача решается высокоэффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Stankevich A.M. Chybiryakov V.K. Shkelov L.T.

METHOD OF LINES IN SPATIAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

Method`s of reducing equations dimensional plane problem of elasticity theory with subsequent one-dimensional solution of the boundary problem by SK Godunov suggested in [1] applies to three-dimensional problem. All conversions essentially use an index entry form, terminology and basic principles of formal tensor calculus. A system of decision-dimensional equations and boundary conditions of general form is obtained. Posed boundary problem is solved with a highly efficient numerical method of discrete orthogonalization SK Godunov.