

УДК 539.376

О.В. Доля, О.П. Червинко

## О ВОЗМОЖНОСТЯХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ В ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Контактные задачи механики твердого тела имеют важное практическое значение при моделировании качения и скольжения деформируемых тел, технологических процессов обработки материалов, взаимодействия фундаментов строений с основанием и т.п.

Основы теории контактных взаимодействий твердых тел заложены в классических работах Герца [1] и Буссинеска [2]. Обзор современных достижений в этой области дается в монографиях [3, 4].

Необходимость учета реальной геометрии контактирующих тел, а также их реологических характеристик ограничивает возможности получения аналитических решений практических задач, повышая важность численных методов.

При использовании метода конечных элементов в контактных задачах для бесконечных областей возникают два вопроса: выбор размера большой, но конечной области, моделирующей бесконечную, а также оценка точности расчета контактных напряжений.

В настоящей работе оценивается возможность применения конечно-элементного подхода для описания напряженно-деформированного состояния тел, возникающего при вдавливании жесткого прямоугольного штампа. В качестве основания рассматривается упругое полупространство (рис. 1). Принимаются условия плоской деформации. Участок контакта  $|x| \leq a$ ,  $y = 0$  остается плоским и штамп не испытывает перекоса.

На границе полупространства  $y = 0$  задаются следующие граничные условия

$$u_y = u_0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } |x| \leq a; \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad (2)$$

где  $u_x$ ,  $u_y$  – компоненты вектора перемещений,  $u_0$  – заданное нормальное перемещение.

Нагрузка на единицу длины штампа в направлении оси  $Oz$  определяется как

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_{yy}(x,0) dx. \quad (3)$$

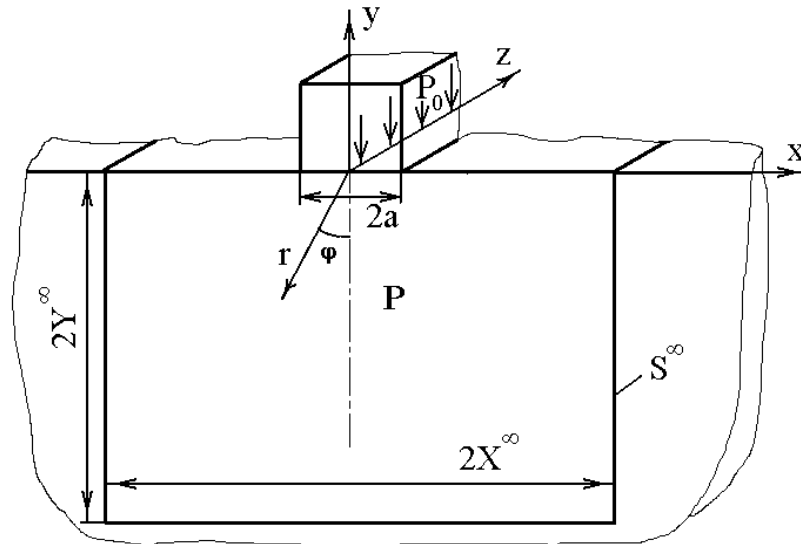


Рис. 1. Схема штамп – полупространство. Плоская деформация

Аналитическое решение задачи представлено в работах [3, 4, 5] и других. Распределение давления на поверхности нагружения дается соотношением

$$p(x) = -\sigma_{yy}(x,0) = \frac{P}{\pi a(1 - x^2/a^2)^{1/2}}, \quad |x| \leq a. \quad (4)$$

На краях штампа ( $x = \pm a$ ) давление в рамках принятой постановки задачи принимает бесконечное значение.

Для построения численного решения МКЭ необходимо перейти от бесконечной области (полупространства) к области с конечной границей  $S^\infty$ . Следуя методике, развитой в работе [5], такой переход осуществляется путем постановки на удаленной поверхности  $S^\infty$  граничных условий, отвечающих перемещениям в задачах о сосредоточенных силах или моментах, эквивалентных главным вектору нагрузки и моментам на поверхности нагружения исходной задачи. При численном решении задачи о вдавливании штампа перемещения на удаленной границе принимаются равными перемещениям, которые создаются сосредоточенной нормальной нагрузкой интенсивности  $P$ , определяемой уравнением (3).

Характерные линейные размеры  $X^\infty$  и  $Y^\infty$  “большой” области, ограниченной поверхностями  $y=0$  и  $S^\infty$ , удовлетворяют условию  $2a/X^\infty, 2a/Y^\infty \ll 1$ . Конкретные значения определяются в процессе решения задачи из условия практической сходимости по критерию выполнения равенства (4).

В полярной системе координат  $(r, \varphi)$  выражения для перемещений, вызванных сосредоточенной силой, для плоского деформированного состояния имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
 u_r &= -\frac{P}{2\pi G} \left[ 2(1-\nu) \cos \varphi \ln \frac{r}{r^*} + (1-2\nu) \varphi \sin \varphi \right]; \\
 u_\varphi &= -\frac{P}{2\pi G} \left[ 2(1-\nu) \sin \varphi \ln \frac{r}{r^*} + (1-2\nu) \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \right],
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $r^*$  – значение радиуса  $r$  при  $\varphi=0$ , для которого принимается  $u_r(r^*, 0) = 0$ .

Задача решается в декартовой системе координат ( $Oxyz$ ). Перемещения и напряжения вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 u_x &= -u_r \sin \varphi - u_\varphi \cos \varphi; \\
 u_y &= -u_r \cos \varphi + u_\varphi \sin \varphi;
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_r \sin^2 \varphi = \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4}; \\
 \sigma_{yy} &= \sigma_r \cos^2 \varphi = \frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{r^4}; \\
 \sigma_{xy} &= \sigma_r \cos \varphi \sin \varphi = \frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{r^4};
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Для расчета используется восьмиугольный четырехугольный изопараметрический конечный элемент. Соответствующая методика изложена в работе [7].

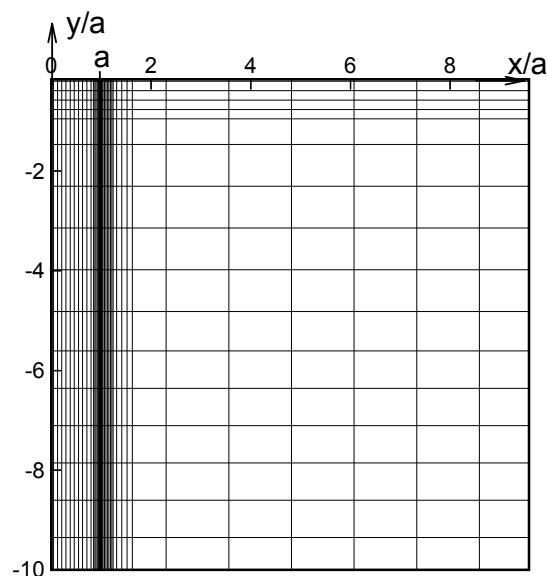


Рис. 2. Разбивка «большой» области на конечные элементы

Граница «большой» области определяется значениями  $X^\infty = Y^\infty = 10a$ . Разбивка области на конечные элементы показана на рис. 2. В ней использовано 1188 четырехугольных изопараметрических элементов.

В качестве упругих характеристик материала (полиэтилен) принимается  $\nu = 0.32$ ;  $G = 794 \text{ МПа}$ .

На рис. 3а и 3б сравниваются решение задачи для штампа, полученное с помощью МКЭ (сплошные линии), и аналитическое решение, отвечающее сосредоточенной силе  $P$  (3) (штриховые линии). Принимается  $a = 0.01 \text{ м}$ ,  $u_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Соответствующие распределения нормированных нормальных напряжений показаны на рис. 4а и 4б. Здесь  $\bar{\sigma}_0 = -P/2a$  – усредненная нагрузка на штамп. Результаты свидетельствуют об асимптотическом соответствии в дальнем поле решений указанных граничных задач.

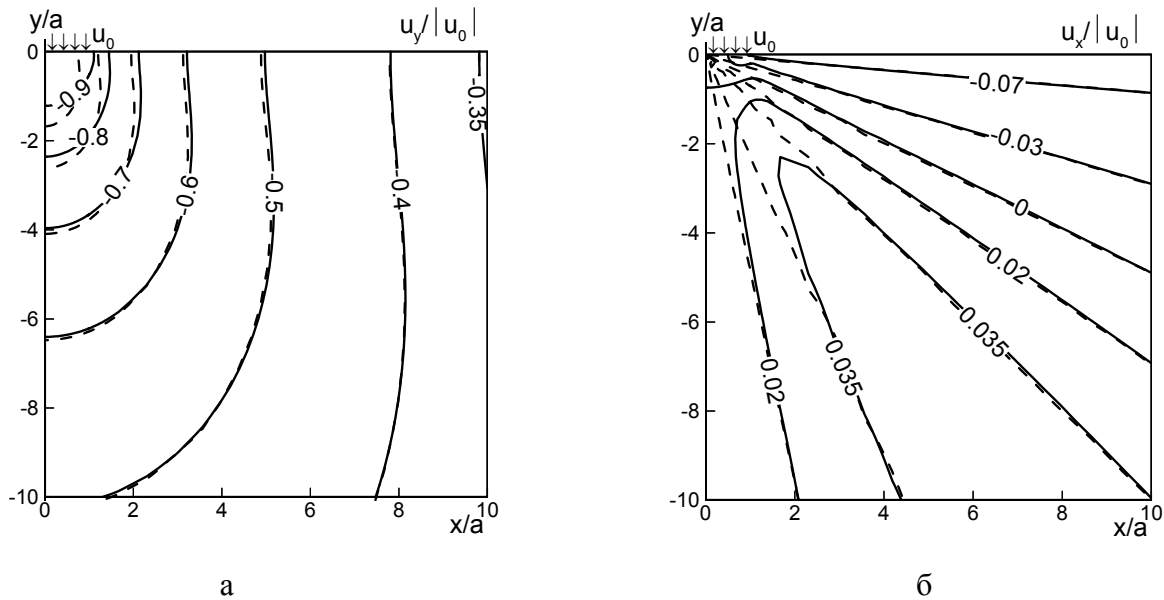


Рис. 3. Поля перемещений.

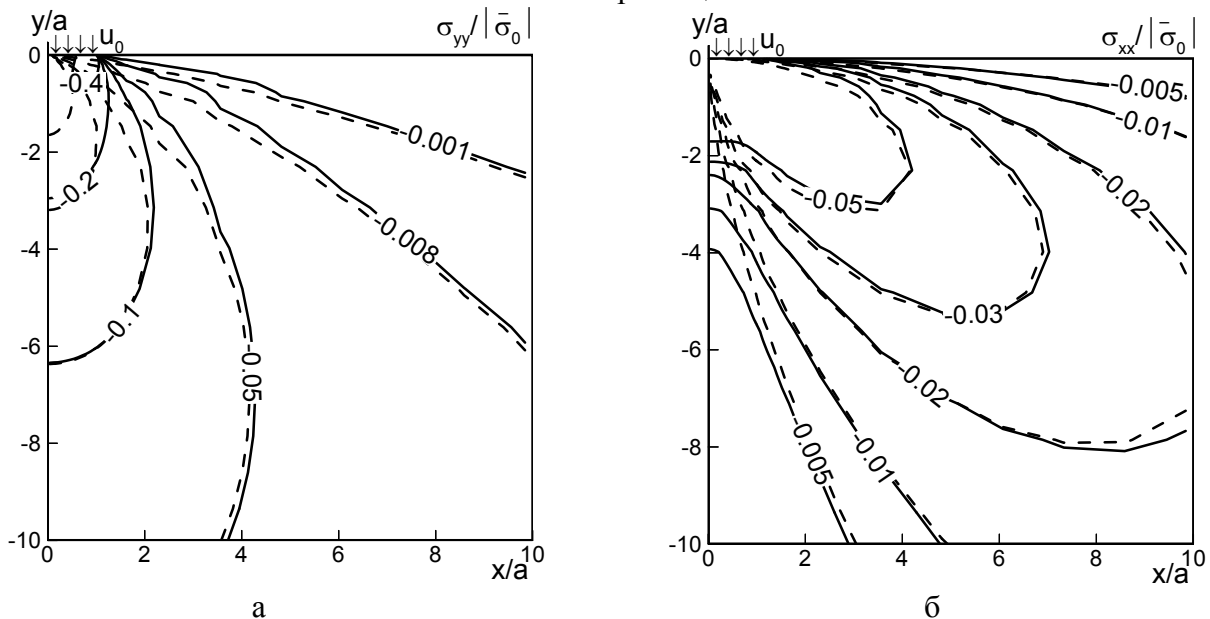


Рис. 4. Поля напряжений

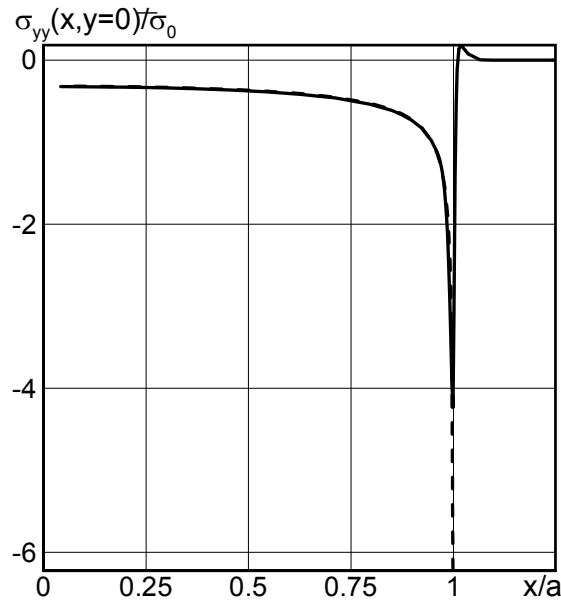


Рис. 5. Контактные напряжения на поверхности полуплоскости, нагруженной штампом

Наиболее важную количественную информацию дает сопоставление распределений нормального напряжения  $\sigma_{yy}$  в области контакта (рис. 5), полученного МКЭ (сплошная линия) и рассчитанного по формуле (4) (штриховая линия). Анализ числовых данных показывает, что в области  $|x/a| \leq 0.9$  точность аппроксимации напряжения  $\sigma_{yy}$  не ниже 2%. Следовательно, за исключением малой окрестности  $|1 - x/a| \leq 0.1$ , решение задачи МКЭ обеспечивает высокую точность определения напряженно-деформированного состояния тела, в частности, и в окрестности площадки нагружения.

### Список литературы

1. Hertz Н. Uber die Berührung fester elastischer Körper // *Jornal fur die reine und angewandte Mathematik*. – 1882. –92. – S. 156-171.
2. Boussinesq J. *Application des potentiels a l'étude l'équilibre et du mouvement des solideselastiques*. – Paris: Gauthiers. – Villars, 1885.
3. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. – М.: Мир, 1989. – 510с.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. *Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости*. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
5. Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2*. – М.: Мир, 1969. – 863с.
6. Сенченков И.К., Савченко В.Г., Червинко О.П., Бобырь В.И. *Напряженно-деформированное состояние полупространства при касательном смещении и*

вращении частично погруженного в него жесткого шара // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 11. – С. 24–31.

7. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость/ Мотовиловец И.А., Козлов В.И. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 264 с.

### **Анотація**

На прикладі класичної задачі про вдавлювання плоского жорсткого штампу з гладкою основою в пружний півпростір дається оцінка точності скінченно-елементної методики. Для переходу від нескінченної області до скінченної використано рішення задачі Буссинеска для нормальної зосередженої сили.

### **Аннотация**

На примере классической задачи о вдавливании плоского штампа с гладким основанием в упругое полупространство дается оценка точности конечно-элементной методики. Для перехода от бесконечной области к конечной используется решение задачи Буссинеска для нормальной сосредоточенной силы.

### **Summary**

The classic problem of half-space stressed by plane punch is used to evaluate on accuracy of finite element approach. The Boussinesq problem solution is used for transition to finite size region.