

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
О.С. Русанова**АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО КОЛИВАННЯ
МАСИВІВ З ТРИЩИНАМИ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

На основі співвідношень методу потенціалу побудовані граничні інтегральні рівняння та чисельний алгоритм для розв'язання задачі про антиплоскі гармонічні коливання пружних масивів, послаблених плоскими тріщинами. Розв'язана тестова задача про динамічний напружений стан пружного простору поблизу тріщини поздовжнього зсуву.

В деяких практичних випадках напружено-деформований стан масивного об'єкту можна вважати двовимірним, причому, якщо пружний елемент конструкції являє собою достатньо довге циліндричне тіло, навантажене по боковій поверхні зусиллями, що орієнтовані і рівномірно розподілені вздовж твірних, то в такому елементі реалізується стан антиплоскої деформації. При цьому відмінними від нуля є тільки переміщення в осьовому напрямку $u=u(x_1, x_2)$, а серед компонент тензора напружень відмінними від нуля є компоненти σ_{j3} , σ_{3j} , $j=1,2$.

Розглянемо з позицій методу потенціалу усталені гармонічні антиплоскі коливання циліндричного масиву з поздовжньою плоскою тріщиною. Переміщення у внутрішніх точках двовимірної розрахункової області V знаходяться за формулою Соміліани

$$u(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau(\vec{y}) U(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\vec{y}) T(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (1)$$

де $\vec{x}\{x_1, x_2\} \in V$; $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ - контур перерізу циліндру; τ - дотичне напруження на площинці границі з нормаллю $\vec{n}\{n_1, n_2\}$:

$$\tau(\vec{y}) = \sigma_{3j}(\vec{y}) n_j(\vec{y}) = \mu \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial y_j} n_j(\vec{y}); \quad (2)$$

$U(\vec{x}, \vec{y})$ - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1]

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{iH_0^{(1)}(\varphi)}{4\mu}; \quad (3)$$

$\varphi = k_2 r$; $k_2 = \frac{\omega}{C_2}$; $C_2^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; ρ - щільність матеріалу; ω - кругова частота

коливань; μ - модуль зсуву матеріалу; $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$;

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n} = -\frac{iH_1^{(1)}(\varphi)k_2}{4} \frac{\partial r}{\partial n}; \quad (4)$$

$H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k .

Формула Соміліани для визначення напружень у внутрішніх точках розрахункової області має наступний вигляд:

$$\sigma_{j3}(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x} \in V, \quad \bar{y} \in \Gamma, \quad (5)$$

де

$$D_j(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \frac{iH_1^{(1)}(\varphi)k_2}{4} r_{,j}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}; \quad j=1,2;$$

$$S_j(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \frac{i\mu k_2}{4} \left[\frac{n_j}{r} H_1^{(1)}(\varphi) - k_2 r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} H_2^{(1)}(\varphi) \right]. \quad (6)$$

Спрямовуючи точку \bar{x} до гладкої ділянки контуру Γ та здійснюючи граничний перехід, отримуємо з виразу (1) граничне інтегральне рівняння (ГІР) відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень в точках поверхні [2]:

$$\frac{1}{2} u(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\bar{y}) T(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma, \quad (7)$$

де інтеграли у правій частині є невласними і розуміються за Коші.

Нажаль, системи, які базуються на використанні (7) для масивів, послаблених тріщинами, є виродженими [3], тому для таких об'єктів застосовують ГІР на основі інтегрального подання напружень (5). Щоб отримати таке ГІР, зробимо наступне [4, 5]. За допомогою виключення з розрахункової області V малого кругового сектору радіусу ε з центром в полюсі \bar{x}_0 утворимо допоміжну розрахункову підобласть V_0 (рис.1).

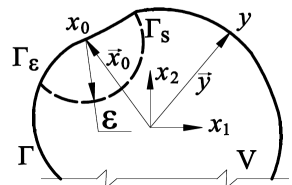


Рис. 1. Утворення допоміжної підобласті

По відношенню до області V_0 точка \vec{x}_0 є зовнішньою, тому формула Соміліани для напружень набуває вигляду

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u(\vec{y}) S_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = 0, j=1,2. \quad (8)$$

Зауважимо, що яким би малим не був радіус сектору ε , полюс \vec{x}_0 лежить поза межами V_0 , і тому тотожність (8) лишається справедливою:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u(\vec{y}) S_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (9)$$

Частина контуру Γ_ε вважається настільки гладкою, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ границю сектору Γ_s можна вважати півколом. Припустимо, що переміщення $u(\vec{y})$ поблизу точки \vec{x}_0 можна представити у вигляді

$$u(\vec{y}) = u(\vec{x}_0) + \frac{\partial u(\vec{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (10)$$

В свою чергу

$$\sigma_{3j}(\vec{y}) = \sigma_{3j}(\vec{x}_0) + O(r^\alpha). \quad (11)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (9):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &+ \left. \int_{\Gamma_s} [\sigma_{3m}(\vec{x}_0) n_m(\vec{y}) + O(r^\alpha)] D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ &= \int_{\Gamma} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + \\ &+ \sigma_{3m}(\vec{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} [\sigma_{3m}(\vec{x}_0) n_m(\vec{y}) + O(r^\alpha)] D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (12)$$

В місцевій полярній системі координат елемент контуру Γ_s може бути поданий у вигляді $d\Gamma = r d\theta$, а крім того

$$r_{,j}(\vec{x}_0, \vec{y}) = n_j(\vec{x}_0) \sin \theta + s_j(\vec{x}_0) \cos \theta, \quad (13)$$

з урахуванням чого пряме інтегрування по півколу дає:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,m} r_{,j} d\Gamma_y = r \frac{\pi}{2} \delta_{mj}. \quad (14)$$

Зважимо на те, що при $r \rightarrow 0$

$$D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y})}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} + O(r), \quad (15)$$

а для точок на контурі Γ_s справедливо:

$$r = \varepsilon; \quad r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -1. \quad (16)$$

З урахуванням наведених залежностей (14-16) можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = -\frac{\delta_{mj}}{4}, \quad (17)$$

і далі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (18)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (9). Враховуючи (10), запишемо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &\left. + u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (19). Враховуючи (14), (16) та зважаючи на те, що при $r \rightarrow 0$

$$(y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{\mu r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y})}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} \left[n_j(\bar{y}) - 2r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y}) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + O(r), \quad (20)$$

отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \mu \frac{\delta_{mj}}{4}, \quad (21)$$

після чого

$$\frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \mu \frac{\delta_{mj}}{4} = \frac{\sigma_{3j}(\bar{x}_0)}{4}. \quad (22)$$

Тепер розглянемо другий інтеграл з тих, що містяться в правій частині виразу (19). Перш за все за допомогою (13), інтегруючи по півколу, одержимо:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} d\Gamma_y = -2rn_j(\bar{x}_0). \quad (23)$$

Далі, помітимо, що при $r \rightarrow 0$

$$r(\bar{x}_0, \bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{\mu}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} \left[n_j(\bar{y}) - 2r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y}) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + O(r), \quad (24)$$

тому при малому радіусі ε справедливо

$$u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = -\mu u(\bar{x}_0) \frac{n_j(\bar{x}_0)}{\pi\varepsilon} + O(r). \quad (25)$$

Підставимо (22) і (25) в (19) і отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (26)$$

де

$$\oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \mu u(\bar{x}_0) \frac{n_j(\bar{x}_0)}{\pi\varepsilon} \right\}, \quad (27)$$

тобто це – скінченна за Адамаром [6] частина гіперсингулярного інтеграла з ядром S_j .

За допомогою (18) і (26) рівність (9) перетворюється на граничний аналог формули Соміліани для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{3j}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j=1,2, \quad (28)$$

який можна використовувати в якості ГР відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень.

Розглянемо як приклад коливання нескінченного простору, послабленого тріщиною поздовжнього зсуву, до різних берегів якої в різні боки в напрямку твірної прикладене дотичне рівномірно розподілене навантаження з амплітудою q . Нехай тріщина лежить в площині $x_1 \theta x_3$ (рис. 2). При цьому внаслідок симетрії рівняння (28) спрощується і набуває вигляду:

$$2 \int_{\Gamma^+} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = q, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma^+, \quad q = \text{const}, \quad (29)$$

де Γ^+ – це верхній берег тріщини,

$$S_2(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{i\mu k_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(\varphi)}{r}, \quad r = |y_1 - x_1|. \quad (30)$$

Для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень контур Γ^+ розбивається на граничні елементи (ГЕ), і на кожному з них приймається кусково квадратична апроксимація шуканих функцій. За колокаційною схемою на границі обирається сукупність полюсів \bar{x}_{0i} , в яких повинна виконуватись рівність (29), що дозволяє звести систему ГР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень $u(\bar{x}_{0i})$. Найбільш складною при такому алгоритмі є процедура обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташований полюс.

Перенесемо початок координат в полюс \bar{x}_{0i} та подамо шукану функцію переміщень на ГЕ, якому належить полюс, у вигляді:

$$u(y_1) = u(\bar{x}_{0i}) + \frac{\partial u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} y_1^2. \quad (31)$$

Тепер скінченна за Адамаром частина гіперсингулярного інтегралу по симетричному відрізьку Γ_c довжиною $2c$ може бути записана так:

$$\int_{\Gamma_c} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u(y_1) S_2(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u(y_1) S_2(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi \varepsilon} \right\} =$$

$$= -\frac{i\mu k_2}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c \frac{H_1^{(1)}(\varphi)}{y_1} dy_1 - \frac{4}{ik_2} \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon} + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1 H_1^{(1)}(\varphi) dy_1 \right\}. \quad (32)$$

Інтеграл в правій частині рівності (32) можуть бути визначені в замкненому вигляді [7]:

$$\int \frac{H_1^{(1)}(t)}{t} dt = tH_0^{(1)}(t) - H_1^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int tH_1^{(1)}(t) dt = \Phi(t), \quad (33)$$

де $\Phi(t) = \frac{\pi t}{2} [H_1^1 L_0(t) - H_0^1 L_1(t)]$, $L_n(t)$ – функція Струве n -го порядку [7].

Крім того необхідно зауважити, що при малих t

$$H_1^{(1)}(t) = -\frac{2i}{\pi t} + O(t), \quad tH_0^{(1)}(t) = t \frac{\pi + 2i[\ln(0.5t) + \gamma]}{\pi} + O(t^3),$$

$$\Phi(t) = -\frac{2it}{\pi} + O(t^3). \quad (34)$$

З урахуванням (33) і (34) вираз (32) набуває вигляду:

$$\oint_{\Gamma_c} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_{0i}, \bar{y}) d\Gamma_y =$$

$$= \frac{i\mu}{2} \left\{ k_2 u(\bar{x}_{0i}) [H_1^{(1)}(k_2 c) - k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) - \Phi(k_2 c)] - \frac{1}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c) \right\}. \quad (35)$$

Отже, отримано замкнений компактний вираз (35) для обчислення скінченної за Адамаром частини гіперсингулярного ГР. Оскільки інтегрування по решті границі не викликає труднощів, можна вважати питання регуляризації розрахункових співвідношень та алгебраїзації системи ГР вирішеним. Зауважимо, що отримати рівність (35) вдалося тільки після того, як було прийнято гіпотезу про кусково квадратичний характер поведінки шуканих функцій $u(\bar{y})$.

Існує також інший підхід, який виходить з припущення, що переміщення поблизу точки \bar{x}_0 є диференційованими функціями. Інтегрування частинами в цьому випадку дозволяє надати другому інтегралу у правій частині формули (8) наступного вигляду [8]:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \rho \omega^2 \mu u(\bar{y}) n_j(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y +$$

$$+ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (36)$$

де e_{jk} – альтернуючий символ; $\bar{t} \{-n_2, n_1\}$ – одиничний вектор напрямку дотичної в точці \bar{y} контуру Γ .

Значимо, що перший з інтегралів в правій частині виразу (36) має слабку сингулярність, внаслідок чого при зменшенні радіусу ε дуги Γ_s

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_j(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad (37)$$

і тому з урахуванням (10) маємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \rho \omega^2 \mu u(\bar{y}) n_j U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \rho \omega^2 \mu \int_{\Gamma} u(\bar{y}) n_j U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (38)$$

причому інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Другий інтеграл в правій частині виразу (36) має сингулярність типу r^{-1} . Враховуючи залежності (14)-(17), а також той факт, що

$$\frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} = -n_2(\bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} + n_1(\bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_2},$$

отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu}{4} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_j} = \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (39)$$

і отже

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \end{aligned} \quad (40)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Підставляючи (38) і (40) в (36), а останнє – в (9), отримуємо альтернативну форму ГІР для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{3j}(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y -$$

$$-\rho\omega^2\mu \int_{\Gamma} u(\bar{y})n_j U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y, \quad (41)$$

причому всі інтеграли в правій частині ГІР (41) слід розуміти за Коші.

Рівність (41) так само, як і (28) може використовуватись в якості алгоритмічної основи чисельної методики, спрямованої на розв'язання за методом потенціалу задачі про коливання масивного пружного об'єкту, що знаходиться в стані антиплоскої деформації. Якщо знову розглядається симетричний напружений стан в нескінченному циліндрі, послабленому тріщиною поздовжнього зсуву, то рівняння (41) спрощується і набуває вигляду:

$$2\mu \left[\rho\omega^2 \int_{\Gamma^+} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y \right] = -q. \quad (42)$$

Знову для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень розіб'ємо контур Γ^+ на граничні елементи (ГЕ) і вважатимемо, що на кожному з них шукана функція $u(\bar{y})$ змінюється за квадратичним законом. Дослідимо процедуру обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташована точка колокації \bar{x}_{0i} . За умови перенесення початку координат в полюс \bar{x}_{0i} та використання для функції переміщень виразу (31) головні за Коші значення сингулярних інтегралів з лівої частини рівняння (42) можуть бути записані в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u(y_1)U(0, y_1)dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u(y_1)U(0, y_1)dy_1 \right\} = \\ &= \frac{i}{4\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c H_0^{(1)}(\varphi)dy_1 + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1^2 H_0^{(1)}(\varphi)dy_1 \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

причому згідно [7]:

$$\int H_0^{(1)}(t)dt = tH_0^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int t^2 H_0^{(1)}(t)dt = t^2 H_1^{(1)}(t) - \Phi(t). \quad (44)$$

З урахуванням (34) і (44) вираз (43) набуває вигляду:

$$\rho\omega^2\mu \int_{\Gamma_c} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y = \frac{i\mu}{2} k_2 u(\bar{x}_{0i}) \left[k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) + \Phi(k_2 c) \right] +$$

$$+ \frac{i\mu}{4} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \left[k_2 c^2 H_1^{(1)}(k_2 c) - \frac{1}{k_2} \Phi(k_2 c) \right]. \quad (45)$$

Далі

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(0, y_1) dy_1 \right\} = \\ &= \frac{ik_2}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1 H_1^{(1)}(\varphi) dy_1 \right\} = \frac{i}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c). \quad (46) \end{aligned}$$

Нарешті, за допомогою (45) і (46) отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} -\mu \left[\rho \omega^2 \oint_{\Gamma_c} u(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - u(\bar{y}) D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) \Big|_{\Gamma_c} \right] = \\ = \frac{i\mu}{2} \left\{ k_2 u(\bar{x}_{0i}) \left[H_1^{(1)}(k_2 c) - k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) - \Phi(k_2 c) \right] - \frac{1}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c) \right\}, \quad (47) \end{aligned}$$

яке повністю співпадає з виразом (35) для визначення скінченної за Адамаром частини відповідного гіперсингулярного інтеграла. Крім того, чисельні експерименти показали, що наближене розв'язання задачі як за допомогою системи гіперсингулярних ГІР (28), так і на основі системи регуляризованих ГІР (41) дає практично однакові результати при майже ідентичних комп'ютерних витратах. Це свідчить про еквівалентність застосованих в роботі підходів до регуляризації ГІР на основі формули Соміліани для напружень в разі дослідження антиплоского напруженого стану біля тріщини поздовжнього зсуву.

Необхідно також зазначити, що наявність останнього третього доданку в лівій частині рівності (47) є наслідком інтегрування частинами. Його відсутність у рівняннях (41) і (42) пояснюється тим, що контур Γ на відміну від Γ_c є замкненим, тоді як амплітуда переміщень $u(\bar{y})$ є неперервною функцією.

Співвідношення (29) і (35) були застосовані в якості алгоритмічної основи для розв'язання за методом граничних елементів задачі про антиплоскі гармонічні коливання пружного простору, послабленого плоскою тріщиною, до берегів якої прикладене рівномірно розподілене дотичне навантаження. Результати розв'язку у вигляді амплітуд переміщень $u(\bar{x}_{0i})$ в точках колокації використовувались для визначення коефіцієнту

інтенсивності напружень (КІН). Графіки залежності нормованого КІН K_{III} від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рисунку 2. Лінія, позначена трикутниками, відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [9]. Лінією, позначеною ромбами, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на досить розрідженій сітці граничних елементів (8 елементів на контурі тріщини). Лінія, позначена прямокутниками, побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (20 ГЕ вздовж контуру).

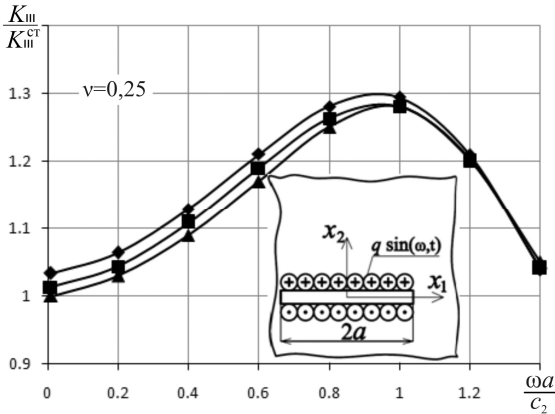


Рис. 2

Наведені результати наочно свідчать про досить швидку збіжність розрахункових даних до точних значень. Так, при $\omega a C_2^{-1} = 1$ (величина параметру частоти, близько якої K_{III} досягає максимуму) похибка визначення КІН на розрідженій сітці становила 3,3 %, а на більш густій – 2,1 %. Так само приблизно в півтора рази зменшується похибка і в інших точках частотного діапазону, що характеризує роботоспроможність розробленої методики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Cruse T.A. Recent advances in boundary element analysis methods // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 62 (1987), pp. 227-244

4. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
5. *Ворона Ю.В., Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
6. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – 830 с.
8. *Ворона Ю.В., Чан Дик Тинь.* Динаміка пружних хвиль в анізотропному середовищі з порожнинами // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2001. – Вип. 69.– С.147–154
9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 20.08.10

Vorona Yu.V., Rusanova E.S.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ МАССИВОВ С ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

На основе соотношений метода потенциала построены граничные интегральные уравнения и численный алгоритм для решения задачи про антиплоские гармонические колебания упругих массивов, ослабленных трещинами. Решена тестовая задача о динамическом напряженном состоянии упруго пространства вблизи трещины продольного сдвига.

Vorona Yu.V., Rusanova O.S.

THE PROCEDURE FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SOLIDS WITH LONGITUDINAL SHEAR CRACKS VIBRATIONS

The boundary integral equations and numerical technique for analysis of out-of-plane shearing harmonic vibration of elastic solids with cracks are developed. The numerical dynamic analysis of elastic medium with tearing shear crack is presented to illustrate the technique.