



УДК 531 + 539.3

Ю.В. Човнюк, к.т.н., доцент, КНУБА

ОСОБЛИВОСТІ ВІБРАЦІЙНИХ ТА ВІБРОУДАРНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРЕСОВАНИХ „ЗВ’ЯЗАНИХ” СТРУКТУРАХ ПОРОШКОВИХ МАТЕРІАЛІВ

Використання дії вібрації суттєво підвищує ефективність таких технологічних процесів, у котрих об’єктами обробки є порошкові матеріали (ПМ). Загальні тенденції поведінки цих матеріалів під дією вібрації [1-4] наступні: збільшується густина й рівноцільність готових виробів по усьому об’єму, знижуються ефективні коефіцієнти тертя між часточками ПМ й оточуючими поверхнями, наприклад, у прес-формах; значно, у десятки разів, зменшуються зусилля у порівнянні зі статичним пресуванням за рахунок зниження сил бічного та внутрішнього тертя, а також збільшення рухливості часточок ПМ у напрямку прикладеного зусилля пресування за так званого „уявного (псевдо-) ожигнення”. Пластичні монолітні та ПМ (металеві) знаходяться, головним чином, у полі обробки тиском (пресуванні). Властивості таких матеріалів досить детально досліджені, а процеси деформування описуються математичними виразами теорії пластичності. Непластичні матеріали – керамічні, вогнетривкі, фарфоро-фаянсові прес-порошки – у процесі ущільнення чи формоутворення не деформуються у пластичній зоні (явище пластичного деформування може спостерігатись у ПМ такого типу тільки у випадку введення пластифікуючих чи зв’язуючих домішок); для цих матеріалів небажані навантаження, які перевищують границю/межу пружності й викликають руйнування вихідних часточок ПМ. Такі матеріали мають реологічні властивості і для них характерні релаксаційні явища.

Метою даної роботи є встановлення особливостей та основних закономірностей вібраційних, ударних, віброударних процесів у ПМ.

Умовний поділ основних об’єктів обробки за вказаних вище технологічних процесів на пластичні й непластичні може бути замінений відповідним поділом на металеві та неметалеві ПМ й сипучі матеріали. Застосування металевих та неметалевих вихідних матеріалів визначене специфікою виробництва. У порошковій металургії переважають металеві чи ті, що мають металеву основу ПМ, у промисловості вогнетривких матеріалів і при виробництві керамічних виробів застосовують, наприклад, неметалеві ПМ на основі карбіду кремнію (МПК, С-2), шамотні матеріали та ін.

До неметалевих відносяться й сипучі матеріали, котрі є об’єктами обробки вібраційних та віброударних технологічних процесів у будівництві, а також абразивні матеріали, що застосовуються у процесах остаточної обробки деталей.

Такий поділ визначив аналогії з достатньо вивченими процесами пластичного деформування металів (для об’єктів обробки, що мають властивості металів) й з особливостями ущільнення ґрунтів і бетонів – для неметалевих ПМ й сипучих матеріалів. Цими аналогіями можна пояснити і розмаїття у термінах для однотипових технологічних процесів пресування, ущільнення, формування.

Згідно [4], з поняттям „пресування” зазвичай зв’язують процеси стискування (всєбічного) об’єктів обробки під тиском, близьким чи перевищуючим межі пружності й текучості матеріалу, а під процесом „ущільнення” розуміють тільки збільшення щільності укладання часточок сипучого матеріалу без значного їх деформування, оскільки хрупке руйнування часточок знижує щільність заготовленого виробу чи напівфабрикату. Процес „формування” визначається ущільненням ПМ під впливом прикладеного тиску й збереженням заданої форми після зняття навантаження. В умовах виробництва з урахуванням такої термінології складно дати визначення цілому ряду вібраційних та віброударних процесів, наприклад, процесам отримання напівфабрикатів виробів з неметалевих ПМ, у яких є хрупкі основні часточки, котрі небажано руйнувати, і часточки зв’язуючих та пластифікуючих домішок, які деформуються у широких межах. Тому у подальшому буде використана термінологія, що прийнята для конкретної галузі, де застосовуються такі однотипові технологічні процеси, а при розгляді загальнотеоретичних питань – поняття „ущільнення”.

1. Особливості статичного пресування ПМ у межах моделі „зв’язаної” порової структури.

У випадку найпростішої схеми (вібраційного, статичного) пресування у вихідній позиції на робочому столі вібропресу закріплюють циліндричну матрицю прес-форми з ПМ, вільна поверхня якої навантажена через пуансон незначним вісьовим статичним зусиллям N від рухомої траверси. Якщо розглядати тільки непластичний ПМ, позбавлений пластифікуючих та зв’язуючих домішок, то під дією питомого статичного зусилля $p_N = N/S_k$, де S_k – сумарна площа контактів між пуансоном й часточками ПМ на вільній поверхні, у замкненому об’ємі прес-форми утворюється „зв’язана” порова структура, яка складається з

часточок ПМ, взаємодіючих між собою й з оточуючими стінками. Величина деформацій у зонах контактів часточок обмежена пружними властивостями самого ПМ, а форми контактів й зчеплення часточок ПМ визначені, головним чином, їх конфігурацією.

Рівняння динаміки часточок „зв’язаної” структури ущільненого ПМ за умови, що на систему діють поряд з відновлюючими консервативними силами (пружності) ще й дисипативні сили, які описуються функцією Релея, можуть бути записані у вигляді:

$$\sum_{k=1}^n [m_{ik} \cdot \ddot{y}_k + b_{ik} \cdot \dot{y}_k + c_{ik} \cdot y_k] = 0, \quad (i, k) = \overline{(1, n)}, \quad (m_{ik}, b_{ik}, c_{ik}) > 0, \quad (1)$$

де m_{ik} – тензор маси, $m_{ik} \equiv m_{ii} \equiv m_i, m_{ik} = 0, i \neq k$; b_{ik} – дисипативні коефіцієнти, що враховують ефекти в’язкого тертя у середовищі ПМ; c_{ik} – пружний коефіцієнт зв’язку між i -ою та k -ою часточками ПМ; y_k – переміщення k -ої часточки у ПМ;

$$\dot{y}_k \equiv \frac{dy_k}{dt}, \quad t \text{ – час}; \quad \ddot{y}_k \equiv \frac{d^2 y_k}{dt^2}.$$

Розв’язок рівнянь (1) знаходимо у вигляді:

$$y_k = A_k \cdot e^{mt}; \quad \dot{y}_k = A_k \cdot m \cdot e^{mt}; \quad \ddot{y}_k = A_k \cdot m^2 \cdot e^{mt}. \quad (2)$$

Підставляючи вирази (2) у рівняння (1), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^n [m_{ik} \cdot m^2 + b_{ik} \cdot m + c_{ik}] \cdot A_k = 0. \quad (3)$$

Позначимо визначник з коефіцієнтів системи (3) $\Delta(m)$ у вигляді:

$$\Delta(m) = \left\| m_{ik} \cdot m^2 + b_{ik} \cdot m + c_{ik} \right\|. \quad (4)$$

Однорідна система алгебраїчних рівнянь (3) має ненульові рішення відносно величин, що до неї входять A_1, A_2, \dots, A_n , тільки у тому випадку, коли її визначник:

$$\Delta(m) = 0. \quad (5)$$

Корені характеристичного рівняння (5) можуть бути дійсними чи комплексними. Можна довести, що у першому випадку всі корені будуть від’ємними, а у другому будуть мати від’ємні дійсні частини (доведення цього можна знайти у книзі Л.Г. Лойцянского та О.І. Лурье „Теоретична механіка” (рос. мовою). – М.: ОНТИ, 1934. – Ч. III).

Розглянемо рух системи часточок ПМ у кожному із вказаних випадків.

Випадок 1. Нехай усі корені рівняння (5) дійсні і від’ємні. Позначимо їх

$\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_n$. Підставляючи який небудь з коренів $\tilde{m}_s, s = \overline{(1, n)}$ у рівняння (3), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \cdot \tilde{m}_s^2 + b_{ik} \cdot \tilde{m}_s + c_{ik}) \cdot A_k^{(s)} = 0, \quad (6)$$

де $A_k^{(s)}$ – амплітуда коливань k -ої часточки за наявності \tilde{m}_s – кореня (6).

Визначник системи (6) при $m = \tilde{m}_s$ перетворюється у нуль, і система має ненульові розв’язки, які визначаються згідно формул:

$$A_1^{(s)} = C_s \cdot \Delta_1(\tilde{m}_s), A_2^{(s)} = C_s \cdot \Delta_2(\tilde{m}_s), \dots \quad (7)$$

$$\dots, A_n^{(s)} = C_s \cdot \Delta_n(\tilde{m}_s),$$

де $\Delta_1(\tilde{m}_s), \Delta_2(\tilde{m}_s), \dots, \Delta_n(\tilde{m}_s)$ – мінори першого, другого і т.д. стовпчиків останнього рядка визначника $\Delta(\tilde{m}_s)$.

Приймаючи до уваги знайдені значення $A_k^{(s)}$, згідно з формулою для y_k (2) знаходимо:

$$y_k^{(s)} = C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) \cdot \exp(\tilde{m}_s \cdot t), \quad (k, s) = \overline{(1, n)} \quad (8)$$

Приймаючи до уваги, що $\tilde{m}_s < 0$, робимо висновок про аперіодичний затухаючий рух часточок ПМ.

Загальний розв’язок системи (1) отримаємо, складаючи у суму частинні розв’язки (8):

$$y_k = \sum_{s=1}^n C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) \cdot \exp(\tilde{m}_s \cdot t). \quad (9)$$

Випадок 2. Нехай тепер усі корені визначника $\Delta(\tilde{m}_s) = 0$ комплексні числа:

$$\tilde{m}_s = -n_s + j \cdot \lambda_s, \quad \tilde{m}_s^* = -n_s - j \cdot \lambda_s, \quad j = +\sqrt{-1}. \quad (10)$$

Тоді амплітуди $A_k^{(s)}$ у цьому випадку будуть також комплексними:

$$A_k^{(s)} = C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s), \quad A_k^{(s)*} = C_s^* \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s^*). \quad (11)$$

У цьому випадку частинний розв’язок системи (1) знаходиться у вигляді:

$$y_k^{(s)} = C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) \cdot \exp(\tilde{m}_s \cdot t) + C_s^* \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s^*) \cdot \exp(\tilde{m}_s^* \cdot t) = \exp(-n_s \cdot t) \left[C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) \cdot \exp(j \cdot \lambda_s \cdot t) + C_s^* \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s^*) \cdot \exp(-j \cdot \lambda_s \cdot t) \right] \quad (12)$$

Представимо $\Delta_k(\tilde{m}_s)$ і $\Delta_k(\tilde{m}_s^*)$ у вигляді:

$$\Delta_k(\tilde{m}_s) = \Delta_{ks}^* + j \cdot \bar{\Delta}_{ks}, \quad \Delta_k(\tilde{m}_s^*) = \Delta_{ks}^* - j \cdot \bar{\Delta}_{ks}. \quad (13)$$

Нехай:



$$C_s = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s + j \cdot \hat{C}_s) \cdot C_s^* = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s - j \cdot \hat{C}_s) \quad (14)$$

Неважко показати, що вираз (12) є дійсним. Добутки $C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s)$ і $C_s^* \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s^*)$ з урахуванням формул (13) і (14) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) &= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s + j \cdot \hat{C}_s) \cdot (\Delta_{ks}^* + j \cdot \bar{\Delta}_{ks}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s \cdot \Delta_{ks}^* - \hat{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks}) + \frac{1}{2} \cdot j \cdot (\tilde{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks} + \hat{C}_s \cdot \Delta_{ks}^*); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C_s^* \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s^*) &= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s - j \cdot \hat{C}_s) \cdot (\Delta_{ks}^* - j \cdot \bar{\Delta}_{ks}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{C}_s \cdot \Delta_{ks}^* - \hat{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks}) - \frac{1}{2} \cdot j \cdot (\hat{C}_s \cdot \Delta_{ks}^* + \tilde{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks}). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставляючи отримані вирази (15) і (16) у розв'язок (12) та приймаючи до уваги, що:

$$\begin{aligned} \exp(j \cdot \lambda_s \cdot t) &= \cos(\lambda_s \cdot t) + j \cdot \sin(\lambda_s \cdot t), \\ \exp(-j \cdot \lambda_s \cdot t) &= \cos(\lambda_s \cdot t) - j \cdot \sin(\lambda_s \cdot t), \end{aligned} \quad (17)$$

отримуємо:

$$y_k^{(s)} = \exp(-n_s \cdot t) \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{C}_s \cdot \Delta_{ks}^* - \hat{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks}) \cdot \cos(\lambda_s \cdot t) \\ &-(\tilde{C}_s \cdot \bar{\Delta}_{ks} + \hat{C}_s \cdot \Delta_{ks}^*) \cdot \sin(\lambda_s \cdot t) \end{aligned} \right\}, \quad k = \overline{(1, n)}. \quad (18)$$

Тоді y_k можна знайти як суму розв'язків (18):

$$y_k = \sum_{s=1}^n y_k^{(s)}. \quad (19)$$

Нехтуючи в'язким тертям часточок ПМ ($b_{ik} \rightarrow 0$ у (1) для всіх значень (i, k)) матимемо розв'язок (1) у вигляді гармонічних коливань з частотою ω_s й початковою фазою φ_s :

$$y_k^{(s)} = A_k^{(s)} \cdot \sin\{\omega_s \cdot t + \varphi_s\}, \quad \omega_s \equiv \lambda_s, \quad (20)$$

де додатні корені характеристичного рівняння (5) утворюють спектр можливих власних частот „зв'язаної” структури ПМ, $A_k^{(s)}$ – амплітуда коливання k -ої часточки ПМ на частоті ω_s , що знаходиться зі співвідношення:

$$A_k^{(s)} = C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s). \quad (21)$$

Тоді y_k матиме вигляд:

$$y_k = \sum_{s=1}^n C_s \cdot \Delta_k(\tilde{m}_s) \cdot \sin\{\omega_s \cdot t + \varphi_s\}. \quad (22)$$

Цей розв'язок має $2n$ довільних констант $C_1, C_2, \dots, C_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, котрі визначаються за заданими початковими умовами, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \dot{y}_1^{(0)}, \dot{y}_2^{(0)}, \dots, \dot{y}_n^{(0)}$,

з рівнянь:

$$\begin{cases} y_i^{(0)} = \sum_{v=1}^n C_v \cdot \Delta_i(\omega_v^2) \cdot \sin \varphi_v, \\ \dot{y}_i^{(0)} = \sum_{v=1}^n C_v \cdot \omega_v \cdot \Delta_i(\omega_v^2) \cdot \cos \varphi_v. \end{cases} \quad (23)$$

Слід зазначити, що дослідження вільних коливань часточок ПМ зводиться до визначення власних частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ з рівнянь типу (5) та власних форм, тобто до визначення мінорів $\Delta_1(\omega_v), \Delta_2(\omega_v), \dots, \Delta_n(\omega_v), v = \overline{(1, n)}$ відношень:

$$\frac{\Delta_1(\omega_v)}{\Delta_n(\omega_v)} = \frac{A_1^{(v)}}{A_n^{(v)}}, \quad \frac{\Delta_2(\omega_v)}{\Delta_n(\omega_v)} = \frac{A_2^{(v)}}{A_n^{(v)}} \quad \text{і т.д.}$$

Якщо прийняти $A_n^{(v)} = 1$, то можна обчислити у скільки разів амплітуди $A_1^{(v)}, A_2^{(v)}, \dots, A_n^{(v)}$ більше чи менше $A_n^{(v)}$. При цьому:

$$A_1^{(v)} = \frac{\Delta_1(\omega_v)}{\Delta_n(\omega_v)}, \dots, A_{n-1}^{(v)} = \frac{\Delta_{n-1}(\omega_v)}{\Delta_n(\omega_v)}. \quad (24)$$

Власні частоти ω_v коливань часточок ПМ у межах моделі „зв'язаної” структури, створеної у замкненому об'ємі прес-форми у результаті силової взаємодії з пуансоном, утворюють весь спектр частот системи.

Процес вібраційного пресування можна представити як попадання у резонанс головних коливань системи, коли усі часточки „зв'язаної” структури коливаються з однією і тією ж власною частотою, що відповідає частоті зовнішнього коливного впливу. У ряді робіт [3,4] зазначена наявність резонансної частоти ущільнюваного матеріалу та ефективність виконання умов резонансного режиму навантаження у процесі пресування. У випадку попадання системи у резонанс між часточками „зв'язаної” структури порушуються первинно встановлені зв'язки, контакти та зачеплення. Під дією сил тяжіння, інерційних сил та вісьових сил статичного навантаження часточки ПМ намагаються переорієнтуватись і більш щільно укластись між собою у заданому об'ємі, що супроводжується займанням більш стійких положень рівноваги. При цьому спостерігається руйнування початкових структурних утворень типу „арок” та „містків” з наступним рівномірним укладанням утворюючих їх часточок, що мають підвищену рухливість у напрямку статичного зусилля навантаження за рахунок зниження практично до нуля ефективних коефіцієнтів внутрішнього та бічного тертя.

Зміцнення напівфабрикату виробу з ПМ відбувається у процесі ущільнення „зв’язаної” структури та збільшення площі контактів між часточками, а також за рахунок заклинювання й зачеплення часточок ПМ між собою у положенні стійкої рівноваги. При цьому ущільнення та зміцнення непластичних ПМ відбувається практично без руйнування часточок у зонах контактів при деформаціях, що не перевищують границі пружності. У загальному випадку для розглядуваної „зв’язаної” структури ПМ, рух котрої описується системою рівнянь (1), число резонансів відповідає числу власних частот, а впорядкована сукупність останніх і утворює спектр власних частот $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n$.

Визначення спектру власних частот „зв’язаної” структури шляхом розв’язку системи n рівнянь (1) засноване на теорії матриць і наведено вище. Однак цей шлях розв’язку може бути значно спрощений. У пресованій „зв’язаній” структурі ПМ виділяють деяке елементарне з’єднання, наприклад, у вигляді ланцюга часточок, орієнтованих вповдовж лінії пресування по вісі Oy (рис. 4, [4]). Силова взаємодія між часточками виділеного ланцюга та оточуючого середовища може умовно не розглядатись. Це припущення засноване на відомому віброреологічному ефекті [4], коли на ланцюг часточок, що переміщуються, наприклад, вздовж вісі Oy під дією зовнішнього коливного впливу та вісьового статичного зусилля, не впливають сили бічного тиску, які визначають опір цьому переміщенню у вигляді сил тертя. У розглядуваному ланцюгу часточки ПМ масою m_i умовно є сферичними, первинні відстані a між часточками визначені конфігурацією та розмірами (r – радіусом) останніх; взаємодія між часточками по умовним лініям пружних зв’язків визначається жорсткістю:

$$\frac{N_i}{a} = \frac{p_N \cdot S_k}{h} = \frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max} + 1) \cdot a}, \quad (25)$$

де h – відстань від нижньої поверхні пуансона до дна прес-форми у початковий момент пресування, $h = (n_{\max} + 1) \cdot a$, n_{\max} – ланцюг максимальної довжини з часточок ПМ має саме таку кількість елементів (у початковий момент пресування). Тоді величина N_i має вигляд:

$$N_i = \frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max} + 1)}. \quad (26)$$

Слід відзначити, що відхилення y_i часточки

масою $m_i = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ (де ρ – щільність матеріалу ПМ у твердій фазі) від положення

рівноваги не перевищує величини пружної деформації матеріалу та значно менше a .

Характерна (кругова) частота „товщинного” резонансу у „зв’язаній” структурі ω_0 визначається із співвідношення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{N_i}{m_i \cdot a}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max} + 1) \cdot a \cdot m_i}}, \quad a \geq 2r. \quad (27)$$

Оскільки початкова товщина виробу $h_{\text{поч.}} = h = (n_{\max} + 1) \cdot a$, а $h_{\text{ущ.}}$ – товщина виробу з ПМ при максимальному його ущільненні ($a = 2r$), то:

$$a = \frac{h}{(n_{\max} + 1)} = \frac{h}{(h_{\text{ущ.}} / 2r)} = 2 \cdot r \cdot \frac{h}{h_{\text{ущ.}}}. \quad (28)$$

Тоді $\omega_0^{(\min)}$ визначається з (27) при $a > 2r$, а

$\omega_0^{(\max)}$ наступним чином:

$$\omega_0^{(\max)} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max} + 1) \cdot 2r \cdot m_i}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{h_{\text{ущ.}} \cdot m_i}}. \quad (29)$$

Зазначимо, що:

$$\omega_0^{(\min)} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max} + 1) \cdot a \cdot m_i}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{h \cdot m_i}}. \quad (30)$$

Автори [4] у межах розглядуваної моделі визначили спектр „зв’язаної” структури, який після простих перетворень набуває виду:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \left\{ \frac{s \cdot \pi}{(n_{\max} + 1)} \right\} \right)} = \\ &= \omega_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \left\{ \frac{s \cdot \pi \cdot a}{h} \right\} \right)} = \\ &= \omega_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \left\{ \frac{s \cdot \pi \cdot 2r}{h_{\text{ущ.}}} \right\} \right)}, \\ s &= (1, n_{\max}). \end{aligned} \quad (31)$$

Величина $\omega_s^{(\max)} \approx 2 \cdot \omega_0$, а точне значення знаходимо з виразу:



$$\omega_s^{(\max)} = \omega_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \left\{ \frac{s \cdot \pi}{(n_{\max} + 1)} \right\} \right)} \Bigg|_{s=n_{\max}} = \xi \cdot a = \arccos \left[1 - \left(\omega \cdot \sqrt{\frac{m_i \cdot a}{2 \cdot N_i}} \right) \right]. \quad (39)$$

$$= \omega_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \left\{ \frac{n_{\max} \cdot \pi}{(n_{\max} + 1)} \right\} \right)}. \quad (32)$$

При $n_{\max} \gg 1$ $\omega_s^{(\max)} \rightarrow 2\omega_0$. Саме така максимальна частота коливань характерна для всіх коливних систем, утворених з однакових часточок (ПМ) з масою m_i кожної.

Ширина спектру частот $\Delta\omega$ „зв’язаної” структури визначається з умови:

$$\Delta\omega = 2 \cdot \omega_0 \cdot \left\{ \sin \left[\frac{n_{\max} \cdot \pi}{2 \cdot (n_{\max} + 1)} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (33)$$

Для $n_{\max} \gg 1$ з (33) маємо:

$$\Delta\omega \approx 2 \cdot \omega_0 \cdot \left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\} = 2 \cdot \omega_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \quad (34)$$

Мінімальною шириною спектру частот $\Delta\omega$ „зв’язаної” структури буде на початку процесу пресування ПМ:

$$\Delta\omega^{(\min)} = 2 \cdot \omega_0^{(\min)} \cdot \left\{ \sin \left[\frac{n_{\max} \cdot \pi}{2 \cdot (n_{\max} + 1)} \right] - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad (35)$$

а максимальною – у фінальній стадії процесу:

$$\Delta\omega^{(\max)} = 2 \cdot \omega_0^{(\max)} \cdot \left\{ \sin \left[\frac{n_{\max} \cdot \pi}{2 \cdot (n_{\max} + 1)} \right] - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\}. \quad (36)$$

Використовуючи підхід [5,6], можна встановити дисперсійне співвідношення для хвиль, які можуть розповсюджуватись у „зв’язаній” структурі ПМ за її статичного навантаження. Для цього будемо розшукувати розв’язок рівняння моделі „ближнього порядку” (квазіодновимірної ґратки), нехтуючи дисипативними ефектами:

$$m_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{N_i}{a} \cdot [(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})], \quad (37)$$

у вигляді:

$$y_i = A_i \cdot \exp \{ j \cdot \xi \cdot i \cdot a - j \cdot \omega \cdot t \}, \quad (38)$$

де ξ – хвильовий вектор, ω – частота хвилі (кругова), яка „підтримується” (розповсюджується) у „зв’язаній” структурі.

Дисперсійне співвідношення матиме наступний вигляд:

Зазначимо, що довжина хвилі $\Lambda_\xi = \frac{2 \cdot \pi}{\xi}$

може змінюватись у межах $2 \cdot a \leq \Lambda_\xi < +\infty$,

оскільки $0 \leq \xi \cdot a \leq \pi$. Фізична причина цього обмеження полягає у тому, що ми маємо можливість спостерігати рух лише у тих точках ПМ, де знаходяться матеріальні часточки [6].

Розглянемо модель „зв’язаної” структури ПМ, в якій рух одновимірної квазіґратки, що складається з часточок двох сортів з масою m_1 (непарні номери) та масою m_2 (парні номери), а також при взаємодії тільки між найближчими сусідніми часточками, описується системою рівнянь [6]:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d^2 y_{2i-1}}{dt^2} = \frac{N_i}{a} \cdot (y_{2i-2} - 2 \cdot y_{2i-1} + y_{2i}), \\ m_2 \cdot \frac{d^2 y_{2i}}{dt^2} = \frac{N_i}{a} \cdot (y_{2i-1} - 2 \cdot y_{2i} + y_{2i+1}). \end{cases} \quad (40)$$

У якості маси m_2 можна взяти масу об’єму порового (заповненого повітрям) простору між часточками ПМ, який має форму сфери еквівалентного радіусу

$$r_{\text{екв.}} (m_2 = \rho_{\text{повітря}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{екв.}}^3).$$

Розв’язок системи (40) розшукуємо у вигляді:

$$\begin{cases} y_{2i-1} = A_1 \cdot \exp \{ j \cdot \xi \cdot (2i-1) \cdot a - j \cdot \omega \cdot t \}, \\ y_{2i} = A_2 \cdot \exp \{ j \cdot \xi \cdot (2i) \cdot a - j \cdot \omega \cdot t \}. \end{cases} \quad (41)$$

Тоді, підставляючи (41) у (40), прийдемо до однорідної системи рівнянь відносно постійних A_1 й A_2 :

$$\begin{cases} A_1 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) + A_2 \cdot \cos(\xi \cdot a) = 0, \\ A_1 \cdot \cos(\xi \cdot a) + A_2 \cdot \left(\frac{m_2 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

З умови нетривіального розв’язку цієї однорідної системи випливає дисперсійне рівняння:

$$\cos\{2 \cdot \xi \cdot a\} = 2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) \cdot \left(\frac{m_2 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) - 1 \equiv b_2. \quad (43)$$

Розв'язок рівняння (43) у зонах пропускання хвиль такою „зв'язаною” структурою ПМ має вид [6]:

$$\xi \cdot a = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \arccos b_2, & 0 < \omega \cdot \sqrt{\frac{M \cdot a}{2 \cdot N_i}} < \frac{M}{m_1}, \text{ I зона пропускання;} \\ \pi - \frac{1}{2} \cdot \arccos b_2, & \frac{M}{m_2} < \omega \cdot \sqrt{\frac{M \cdot a}{2 \cdot N_i}} < \frac{M}{m_1} + \frac{M}{m_2}, \text{ II зона пропускання,} \end{cases} \quad (44)$$

де M – деякий параметр, розмірність котрого співпадає з розмірністю m_p , $p = (1, 2)$.

Слід підкреслити про суттєву властивість розв'язку (44), яка полягає у тому, що він призводить до додатніх значень групової швидкості хвиль $v_g = \frac{d\omega}{d\xi}$ у обох зонах їх пропускання через ПМ (I, II).

$$\text{Довжина хвилі } \Lambda_\xi = \frac{2 \cdot \pi}{\xi} \text{ змінюється і у}$$

цьому випадку у межах $2 \cdot a \leq \Lambda_\xi < +\infty$, оскільки $0 < \xi \cdot a < \pi$.

2. Особливості ударного пресування ПМ у межах моделі діючих періодичних миттєвих імпульсів [7].

У процесі ударного пресування ПМ зазвичай мають справу з короткотривалими силами, дія котрих повторюється через відносно великі однакові проміжки часу. У цих випадках часто використовують ідеалізоване уявлення про миттєві імпульси й зводять задачу до дослідження дії періодично прикладуваних, рівних один одному миттєвих імпульсів S . У подальшому використаємо саме цей підхід [7] для аналізу ударного методу пресування ПМ.

Нехай T – період прикладання імпульсів, тоді $0, T, 2T, \dots$ – моменти прикладання нульового (початкового), першого, другого й т.д. імпульсів.

Розглянемо спочатку дію тільки одного початкового імпульсу. У цьому випадку диференціальне рівняння руху:

$$m_i \cdot \ddot{y}_i + c_i \cdot \dot{y}_i = 0, \quad i = (1, n_{\max}), \quad (45)$$

де c_i – еквівалентна жорсткість (пружний коефіцієнт зв'язку для i -ої часточки ПМ з іншими), яка може бути знайдена із залежності:

$$\frac{1}{c_i} = \sum_{j=1}^{n_{\max}} \frac{1}{c_{ij}}, \quad (46)$$

де c_{ij} – пружний коефіцієнт зв'язку між i -ою та j -ою часточками ПМ.

(У рівнянні (45) нехтуємо дисипативними ефектами у зв'язку з їх малістю).

Умови виникнення руху часточки ПМ безпосередньо після зникнення початкового імпульсу S (у розрахунку на 1 часточку ПМ):

$$y_{i0} = 0, \quad \dot{y}_{i0} = \frac{S}{m_i}. \quad (47)$$

Частота вільних коливань часточки ПМ визначається наступним чином:

$$\Omega = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}. \quad (48)$$

Рух, який викликаний тільки початковим імпульсом, описується наступним чином:

$$y_i = \frac{S}{m_i \cdot \Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \quad 0 < t < T. \quad (49)$$

Розглянемо далі будь-який один з періодів T , прийнявши за початок відліку часу момент зникнення останнього імпульсу S . На протязі розглядуваного періоду коливання є вільними та описуються рішенням:

$$y_i = A_i \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B_i \cdot \sin(\Omega \cdot t), \quad 0 < t < T. \quad (50)$$

Якщо \tilde{y}_{i0} – початкове зміщення та $\dot{\tilde{y}}_{i0}$ – початкова швидкість, тоді постійні A та B дорівнюють:

$$A_i = \tilde{y}_{i0}, \quad B_i = \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega}, \quad (51)$$

розв'язок (50) можна записати у виді:

$$y_i = \tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \quad 0 < t < T. \quad (52)$$

Диференціюючи по часу t , знаходимо швидкість:

$$\dot{y}_i = -\tilde{y}_{i0} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot t). \quad (53)$$

У кінці цього періоду, безпосередньо перед прикладанням чергового імпульсу (тобто при $t = T$), маємо:

$$\begin{cases} y_{i1} = \tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot T), \\ \dot{y}_{i1} = -\Omega \cdot \tilde{y}_{i0} \cdot \sin(\Omega \cdot T) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T). \end{cases} \quad (54)$$



Одразу після прикладання чергового імпульсу зміщення y_i збереже своє значення (54):

$$y_{i2} = y_{i1} = \tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot T), \quad (55)$$

але швидкість миттєво зміниться на величину $\frac{S}{m_i}$ й при врахуванні виразу \dot{y}_{i1} з (54) складе:

$$\dot{y}_{i2} = -\Omega \cdot \tilde{y}_{i0} \cdot \sin(\Omega \cdot T) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{S}{m_i}. \quad (56)$$

Оскільки існує періодичність процесу, то величини y_{i2} й \dot{y}_{i2} повинні бути рівні відповідно величинам \tilde{y}_{i0} й $\dot{\tilde{y}}_{i0}$, тобто:

$$\tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot T), \quad (57)$$

$$\dot{\tilde{y}}_{i0} = -\Omega \cdot \tilde{y}_{i0} \cdot \sin(\Omega \cdot T) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{S}{m_i}. \quad (58)$$

Таким чином, ми отримали систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими \tilde{y}_{i0} й $\dot{\tilde{y}}_{i0}$; розв'язавши її ((57), (58)), знайдемо:

$$\tilde{y}_{i0} = \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right), \quad \dot{\tilde{y}}_{i0} = \frac{S}{2 \cdot m_i}. \quad (59)$$

Тому закон руху (50) приймає вид:

$$y_i = \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \cdot \left[\sin(\Omega \cdot t) + \cos(\Omega \cdot t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \right], \quad 0 < t < T. \quad (60)$$

Періодичність у розв'язку (60) досягнута внаслідок ігнорування заданих початкових умов (тобто умов, що відносяться до початкового моменту, безпосередньо перед прикладанням першого імпульсу S); у результаті впливу внутрішнього та зовнішнього видів тертя (яке у (45) не враховане) в кінці кінців реалізується саме такий періодичний рух.

Дійсно задані початкові умови можна відобразити у розв'язку наступним чином. Нехай у початковий момент часу задані зміщення та швидкість відповідно складають y_{i0}^* й \dot{y}_{i0}^* , що співпадають з (47). Запишемо тотожності:

$$\begin{cases} y_{i0}^* = \tilde{y}_{i0} + \left(y_{i0}^* - \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \right), \\ \dot{y}_{i0}^* = \dot{\tilde{y}}_{i0} + \left(\dot{y}_{i0}^* - \frac{S}{2m_i} \right). \end{cases} \quad (61)$$

Перші складові правих частин відповідають періодичному (з періодом T) руху (60), а другі складові слугують причиною вільних коливань (з періодом $\frac{2 \cdot \pi}{\Omega}$):

$$y_i^* = \left(y_{i0}^* - \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \right) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \left(\frac{\dot{y}_{i0}^*}{\Omega} - \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \right) \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (62)$$

Тут, на відміну від (60), час t відраховується від істинного початку процесу. Отже, остаточно рух часточки ПМ (при дії n – ударних імпульсів S) описується наступним чином:

$$y_i(t) = \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \left(-\frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \right) \times \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{S}{2m_i \cdot \Omega} \times \left\{ \sin[\Omega \cdot (t - k \cdot T)] + \cos[\Omega \cdot (t - k \cdot T)] \right\} \times \sum_{k=0}^n \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \right] \quad 0 < t < (n+1) \cdot T. \quad (63)$$

Проаналізуємо результат, що зосереджений у виразі (60).

Перш за все зазначимо, що якщо:

$$\frac{\Omega \cdot T}{2} = n \cdot \pi, \quad n \in N, \quad (64)$$

то $\left| \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right) \right| \rightarrow \infty$ й амплітуди переміщень

прямують до нескінченності, тобто настає

ударний резонанс. Якщо $\tilde{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ – кутова

частота прикладання імпульсів S , то умова ударного резонансу приймає вид:

$$\tilde{\omega} = \frac{\Omega}{n}, \quad n \in N, \quad (65)$$

тобто **ударні резонанси у ПМ – це субрезонанси n – го порядку**.

За всіх інших співвідношень частот відхилення y_i залишаються скінченними. Найбільше відхилення часточок ПМ згідно (60) складає:

$$y_{i\max} = \frac{S}{m_i \cdot \Omega} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\Omega \cdot T}{2} \right)} = \frac{S}{2 \cdot m_i \cdot \Omega \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi \cdot \Omega}{\tilde{\omega}} \right) \right|} \quad (66)$$

Оскільки дріб $\left(\frac{S}{m_i \cdot \Omega} \right)$ є максимальним відхиленням, що викликає один миттєвий імпульс S , то вираз:

$$\beta = \frac{1}{2 \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi \cdot \Omega}{\tilde{\omega}} \right) \right|} \quad (67)$$

є коефіцієнтом впливу повторності.

Слід зазначити, що існує нескінченно велике число ударних резонансів (у відповідності до формули (65)). Найменш можливе значення

$$\beta \text{ дорівнює } \frac{1}{2}.$$

3. Особливості вібраційного/віброударного пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної” порової структури.

Особливості вібраційного та віброударного пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної” порової структури розглянемо методом, розвиненим у [8].

Дослідження нестационарних процесів у лінійній системі (а модель „зв'язаної” порової структури ПМ належить саме до таких) з одним ступенем свободи руху (координата зміщення часточки ПМ y_i від положення рівноваги) при припущенні, що джерело енергії (вібраційного/віброударного поля, що діє на ПМ) має досить велику потужність, зводиться до інтегрування диференціального рівняння:

$$\ddot{y}_i + \mu_i \cdot \dot{y}_i + \Omega_i^2 \cdot y_i = P_i(t), \quad (68)$$

де μ_i – коефіцієнт, що характеризує затухання; Ω_i – частота вільних коливань i – ої часточки ПМ; $P_i(t)$ – вимушена сила, віднесена до одиниці маси часточки m_i .

За допомогою методу варіації довільних сталих за нульових початкових умов

$$y_i|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}_i|_{t=0} = 0 \text{ з (68) маємо:} \\ y_i(t) = \frac{1}{k_i} \cdot \int_0^t P_i(\tau) \cdot \exp \left\{ -\frac{\mu_i \cdot (t-\tau)}{2} \right\} \cdot \sin \{ k_i \cdot (t-\tau) \} d\tau, \quad (69)$$

де $k_i = \sqrt{\Omega_i^2 - \frac{\mu_i^2}{4}}$. За гіпотези Є.С. Сорокіна,

що враховує сили тертя через коефіцієнт поглинання енергії коливань

$$\Psi_i, \mu_i = \frac{\Psi_i \cdot \Omega_i}{2 \cdot \pi}, \text{ тоді маємо:}$$

$$y_i(t) = \frac{1}{k_i} \cdot \int_0^t P_i(\tau) \cdot \exp \left\{ -\frac{\Psi_i \cdot \Omega_i \cdot (t-\tau)}{4\pi} \right\} \cdot \sin \{ k_i \cdot (t-\tau) \} d\tau. \quad (70)$$

Якщо вібропресування відбувається за умов усталених вимушених коливань з частотою Ω_0

та амплітудою A сили $P_i(t)$, то з (70) маємо:

$$y_i(t) = \frac{A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \delta)}{\sqrt{(k_i^2 - \Omega_0^2)^2 + \mu_i^2 \cdot \Omega_0^2}} = \frac{A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \delta)}{\sqrt{(k_i^2 - \Omega_0^2)^2 + \frac{\Psi_i^2 \cdot \Omega_i^2}{4\pi^2} \cdot \Omega_0^2}}. \quad (71)$$

Слід зазначити, що δ – початкова фаза вимушених коливань i – ої часточки ПМ, яка зазвичай дорівнює нулю.

Якщо пресування ПМ відбувається у віброударному режимі, то на одному періоді дії віброударного силового імпульсу T маємо:

$$P_i(t) = \begin{cases} A_{1i} \cdot \sin \left\{ \frac{\pi \cdot t}{\tau_1} \right\}, & 0 \leq t \leq \tau_1; \\ -A_{2i} \cdot \sin \left\{ \frac{\pi \cdot (t-\tau_1)}{\tau_2} \right\}, & \tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2 = T. \end{cases} \quad (72)$$

Функцію (72) треба продовжити до нескінченності по періоду T й розкласти у ряд Фур'є, а потім використати співвідношення (70). Можливий і інший підхід, за якого $P_i(t)$ з (72) підставляють у (70) й інтегрують на періоді T . Тоді можна знайти $y_i(\tau_1)$, $y_i(T)$, $y_i(t)$ для $t \in [0; \tau_1] \cup (\tau_1; T]$, тобто визначити рух i – ої часточки ПМ на одному періоді T віброударного режиму пресування, а отриманий результат завдяки періодичності її руху розповсюдити на всю вісь часу $t \in [0; +\infty)$.

ВИСНОВКИ

1. Встановлені основні закономірності та особливості статичного, ударного, вібраційного та віброударного режимів пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної” порової структури оброблюваного середовища.
2. Отримані залежності можуть у подальшому бути використані для уточнення існуючих й розробки більш досконалих інженерних методів розрахунку вібропресів для



виготовлення виробів з керамічних та фарфоро-фаянсових порошкових матеріалів у прес-формах.

Література

1. Бондаренко В.П., Фрейдин Г.Ю., Мендельсон В.С. Прессование заготовок из твердосплавных смесей. – К.: Техніка, 1974. – 140с.
2. Ям Б.М., Олейник В.Т., Степанов В.Ф. и др. Вибрационное прессование огнеупорных масс//Огнеупоры. – 1973. - №10. – С. 1-7.
3. Шаталова И.Г., Горбунов Н.С., Лихтман В.И. Физико-химические основы вибрационного уплотнения порошковых материалов. – М.: Наука, 1965. – 164с.
4. Искович-Лотоцкий Р.Д., Матвеев И.Б., Крат В.А. Машины вибрационного и виброударного действия. – К.: Техніка, 1982. – 208с.
5. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наукова думка, 1981. – 200с.
6. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1959. – 452с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – М.: Наука, 1987. – 352с.
8. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1966. – 336с.