УДК 62 – 50

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ МАЯТНИКОВИМИ КОЛИВАННЯМИ ВАНТАЖУ НА КАНАТІ МОСТОВОГО КРАНА

Юрій Човнюк[1], Михайло Діктерук[2], Світлана Комоцька[2]

[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 12 в, Київ, Україна, e–mail: ychovnyuk@ukr.net
[2] Київський національний університет будівництва і архітектури, 03680, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна

THE AVERAGING METHOD IN NONLINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF PENDULUM'S OSCILLATION OF LOAD ON ROPE BRIDGE CRANE

Yuriy Chovnyuk[1], Mykhaylo Dykteruk[2], Svetlana Komotskaya[2]

[1] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 12в, Kyiv, Ukraine, e–mail: ychovnyuk@ukr.net
[2] Kyiv National University of Construction and Architecture, 03680, Povitroflotskyy Prospect, 31, Kyiv, Ukraine

АНОТАЦІЯ. Розвинута асимптотична методика розв'язку задач оптимального управління суттєво нелінійними маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана у випадку малих керуючих впливів. Внаслідок суттєвої нелінійності, тобто залежності частоти коливань від повільного вектора, система рівнянь відповідної крайової задачі не має стандартного виду. За деяких додаткових припущень вдається здолати вказані вище труднощі й привести рівняння до стандартної форми, а також розвинути алгоритм наближеної побудови оптимального управління маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана (у межах критерію Л.С. Понтрягіна).

***Ключові слова:** метод, усереднення, нелінійність, оптимальне управління, маятникові коливання, вантаж, канат, мостовий кран.*

АННОТАЦИЯ. Развита асимптотическая методика решения задач оптимального управления существенно нелинейными маятниковыми колебаниями груза на канате мостового крана в случае малых управляющих воздействий. Вследствие существенной нелинейности, т.е. зависимости частоты колебаний от медленного вектора, система управлений соответствующей краевой задачи не имеет стандартного вида. При некоторых дополнительных предположениях удается преодолеть указанные выше трудности и привести уравнения к стандартной форме, а также развить алгоритм приближенного построения оптимального управления маятниковыми колебаниями груза на канате мостового крана (в рамках критерия Л.С. Понтрягина).

***Ключевые слова:** метод, усреднение, нелинейность, оптимальное управление, маятниковые колебания, груз, канат, мостовой кран.*

*ABSTRACT. **Purpose**. An asymptotic technique for solving optimal control problems by essentially nonlinear pendulum load oscillations on the rope of a bridge crane is developed in the case of small control actions. **Methodology/approach**. Due to the substantial nonlinearity, i.e. dependence of the oscillation frequency on the slow vector, the control system of the corresponding boundary – value problem does not have a standard form **Research limitations/implications.** Under certain additional assumptions, it is possible to overcome the difficulties mentioned above and to bring the equations to the standard form, and also to develop an algorithm for the approximate construction of an optimal control of the pendulum oscillations of the load on the rope of the bridge crane (within the Pontryagin's criterion**). Originality/value.** The laws for amplitudes of oscillations as functions of time and duration of action when the energy of oscillations is going to zero are obtained.*

***Key words**: method, averaging, nonlinearity, optimal control, pendulum oscillations, cargo, rope, bridge crane.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

При роботі мостових кранів часто спостерігаються маятникові коливання вантажу, що є причиною нерівномірного руху вказаних кранів, їх вантажних візків, навантажень на канат та силові елементи кранів, які, у свою чергу, створюють різноманітні незручності при їх експлуатації, зменшують надійність функціонування як крана у цілому, так і його окремих елементів. Зрозуміло, що всі ці фактори необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів (особливо у режимах їх оптимального, наприклад, з мінімально необхідною для цього енергією, пуску/гальмування).

Користуючись стандартною методикою методу усереднення та схемою розрахунку маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана, що проводяться зазвичай за моделлю двомасової системи, необхідно здійснити подальші уточнення і вдосконалення, особливо на основі узагальнених енергосилових критеріїв якості руху (або критерію оптимальності Л.С. Понтрягіна).

АНАЛІЗ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунок маятникових коливань вантажу зазвичай проводять за найпростішою схемою двомасової системи [1 – 5], вважаючи при цьому, що кут відхилення канатів від вертикалі не перевищує $10^0 \ldots 12^0$ (малі, але скінченні амплітуди коливань). При цьому вважають також, що період маятникових коливань вантажу на гнучких канатах більший чи одного порядку з періодом розгону/гальмування крана, а рушійне зусилля привідного двигуна механізму пересування постійне й дорівнює середньому пусковому/гальмівному значенню [5]. Результати робіт [5 – 10] будуть частково використані у даному дослідженні.

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у обґрунтуванні методу усереднення у нелінійних задачах оптимального управління (в межах критерію оптимальності Л.С. Понтрягіна) маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

1. Постановка задачі. Відомо [5], що рівняння руху системи «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана може бути подане у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{1}{m} \cdot F\left(t\right), \qquad (1)$$

де x – горизонтальне переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу; ω – частота власних маятникових коливань вантажу відносно крана у період розгону $\omega = \sqrt{\dfrac{\left(m_1 + m_2\right) \cdot g}{m_1 \cdot H}}$, де H – довжина каната; $g = 9{,}81$ м/с^2 – прискорення вільного падіння; $F(t)/m = \left(P - W\right)/m_1$; $P = P(t)$ – сумарне тягове зусилля привідних коліс візка, t – час; $W = \text{const}$ – сила опору пересуванню візка; m_1 – маса вантажного візка; m_2 – маса вантажу.

По суті рівняння (1) є лінеаризованим, а тому неточним. При розгляді задачі в уточненому варіанті замість (1) маємо нелінійне диференціальне рівняння

$$\varphi_{\tau\tau} + \sin\varphi = \frac{F\left(\tau\right)}{m_1 \cdot \omega^2 \cdot H}, \ \tau = \omega \cdot t, \qquad (2)$$

де φ – кут відхилення каната з вантажем від вертикалі, який визначається зі співвідношення

$$\sin\varphi = x/H \leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(x/H\right). \qquad (3)$$

У подальшому вважаємо, що

$$\frac{\left[P\left(t\right) - W\right]}{m_1 \cdot \omega^2 \cdot H} = \varepsilon \cdot u\left(t\right) = \varepsilon \cdot u\left(\tau\right), \ \varepsilon << 1, \qquad (4)$$

де ε – малий параметр, $u(\tau)$ – функція керування, яка має обмеження на управління завдяки дії обмеженого за модулем керуючого моменту, тобто $\left|u\left(\tau\right)\right| \le 1$. Для застосування методу усереднення з обмеженням на управління рівняння руху вантажу має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = \varepsilon \cdot u, \ \dot{\varphi} = d\varphi / d\tau,$$
$$\ddot{\varphi} = d^2\varphi / d\tau^2, \ 0 \le \tau \le T^*. \qquad (5)$$

У (5) необхідно знайти керування $u(\tau)$, яке мінімізує повну енергію маятника у заданий скінченний момент часу T, $T^* = \theta / \varepsilon$, $\theta = \omega \cdot T$.

Як повільну змінну введемо повну енергію маятника:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 - \left(1 + \cos\varphi\right), \ a \ge -2. \qquad (6)$$

У (6) за початок відліку енергії прийняте верхнє положення рівноваги маятника $\varphi = \pi$, тому при $-2 \le a < 0$ маятник здійснює коливання, а при $a > 0$ – обертання.

Диференціюючи (6) по τ і враховуючи (5), матимемо рівняння

$$\dot{a} = \varepsilon \cdot \dot{\varphi} \cdot u,\ a\big|_{\tau=\tau_0} = a^0,\ -2 \le a^0 < \infty, \qquad (7)$$

де $\dot{\varphi}$ виражається через a, φ згідно (6) дорівнює

$$\dot{\varphi} = \pm\left[2 \cdot (a + 1 + \cos\varphi)\right]^{1/2}. \qquad (8)$$

Рівняння для фази коливань маятника ψ має вигляд

$$\psi = \omega(a) + \varepsilon \cdot \tilde{F}(\varphi, a) \cdot u, \qquad (9)$$

де $\omega(a)$ – частота коливань/обертів маятника.

2. Наближене оптимальне керування.

Позначимо через p та q спряжені змінні, які відповідають (a, ψ), тоді на основі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна [10] матимемо

$$u^* = \operatorname{sign}\left\{p \cdot \dot{\varphi} + q \cdot \tilde{F}\right\}. \qquad (10)$$

Оскільки $q = O(\varepsilon)$, то за умови відсутності особливих управлінь $(p \equiv 0)$ з похибкою $O(\varepsilon)$ маємо функціонал

$$u^* = \operatorname{sign}(p \cdot \dot{\varphi}). \qquad (11)$$

Введемо усереднені змінні (ξ, η), що відповідають змінним (a, p). Підставимо управління u^* з (11) у рівняння (7) й у відповідне йому спряжене рівняння й усереднимо рівняння за фазою ψ. Матимемо усереднену крайову задачу [10]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi} |\dot{\varphi}|\, d\psi \cdot \operatorname{sign}\eta,\ \xi(0) = a^0, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -|\eta| \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left\{\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} |\dot{\varphi}|\, d\psi - \omega'(\xi)\beta\right\}\right\}, \\ \eta(\theta) = -1. \end{cases} \qquad (12)$$

Тут $\dot{\varphi}$ треба представляти через (a, ψ). Як випливає з першого рівняння системи (12), найкращий результат (мінімум $J = \xi(\theta)$) досягається за умови, що $\eta < 0$ на усьому інтервалі $\tau \in \left[O, T^*\right]$. Слід з'ясувати, чи припускає друге (спряжене) рівняння (12) розв'язок, який має таку властивість. Зрозуміло, що при $\beta = 0$, $\eta(\tau) < 0$ для усіх $\tau \in \left[O, T^*\right]$. Отже, у першому наближенні можна покласти $p < 0$ у (11).

Таким чином, встановлено, що у першому наближенні по функціоналу (й змінній a) синтез оптимального управління має вигляд

$$u^* = -\operatorname{sign}\dot{\varphi}. \qquad (13)$$

Внаслідок рух маятника (5) під дією управління (13) описується рівнянням

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = -\varepsilon \cdot \operatorname{sign}\dot{\varphi}, \qquad (14)$$

відповідаючим руху при наявності сухого тертя.

3. Аналіз оптимального руху. Асимптотичний розв'язок рівняння (14) будуємо, використовуючи [11], де розв'язувалось аналогічне рівняння. При $\varepsilon = 0$ рівняння (14) описує вільні коливання/обертання маятника.

У режимі коливань при $-2 \le a < 0$ розв'язок задається співвідношеннями (12) – (14):

$$\begin{cases} \varphi = 2\arcsin\left\{k_1 \cdot \operatorname{sn}\left[k_1(t + \delta_1), k_1\right]\right\}, \\ k_1^2 = 1 + \dfrac{1}{2}a,\ T_1 = 4K(k_1),\ \varphi_0 = 2\arcsin k_1, \\ 0 \le k_1 \le 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Тут δ_1 – довільна фазова постійна, T_1 – період коливань, φ_0 – їх амплітуда, sn – еліптичний синус, K – повний еліптичний інтеграл першого роду, k_1 – модуль еліптичних функцій.

Запишемо перше рівняння (12) для режиму коливань (15) у явному вигляді (маємо $\eta < 0$):

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|\dot{\varphi}|d\tau =$$
$$= -\frac{4}{T_1}\int_0^{T_1/4}\dot{\varphi}(\tau)\,d\tau = -4T_1^{-1}\cdot\varphi_0 = \quad (16)$$
$$= -2K^{-1}(k_1)\cdot\arcsin k_1 .$$

Тут ξ замінили на a й використані властивості парності функції φ з (15). Переходячи до змінної k_1^2 й обираючи як $\tau = 0$ момент переходу з режиму обертання у коливання, де $a = 0$, матимемо з (16)

$$\frac{dk_1^2}{d\tau} = -K^{-1}(k_1)\cdot\arcsin k_1,\ k_1(0) = 1,\ \tau \ge 0\ . \quad (17)$$

Рівняння (17) інтегрується у квадратурах.

Підкреслимо деякі властивості функції $k_1(\tau)$, що випливають з (17). Функція $k_1(\tau)$ монотонно спадає зі зростанням величини $|\tau|$. За малих значень τ, коли $k_1 \to 1$, асимптотика $k_1(\tau)$ має вигляд

$$\tau \approx -\frac{(1-k_1^2)}{\pi}\cdot\left(1+\ln\left[\frac{16}{1-k_1^2}\right]\right) =$$
$$= -\frac{a}{2\pi}\cdot\left(1+\ln\frac{32}{|a|}\right). \quad (18)$$

Тут використаний зв'язок k_1 з a з (15). Формула (18) дозволяє відійти від точки $\tau = 0$ при чисельному інтегруванні рівняння (17).

Дослідимо асимптотику у іншому граничному випадку, коли $k_1 \to 0$. Використовуючи представлення $K(k)$ при малих k у (17), матимемо

$$k_1 \approx -(\tau - \tau_*)/\pi\ ,\ 0 \le \tau \le \tau_*,$$
$$k_1 = 0\ ,\ \tau > \tau_* . \quad (19)$$

Тут τ_* – деяка додатна постійна. З (19) випливає, що величина k_1 перетворюється у нуль при деякому скінченному значенні $\tau = \tau_{*1}$, тобто повна зупинка маятника (вантажу на канаті) вимагає скінченного часу. Це природний результат для системи (14) з сухим тертям.

Результати чисельного визначення залежності $k_1(\tau)$ наведені на рис. 1. Залежність $k_1(\tau)$ визначалась інтегруванням рівняння (17) із урахуванням асимптотики (18).

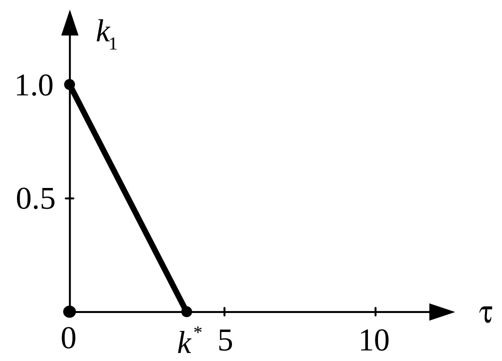

Рис. 1. Залежність $k_1(\tau)$

Fig. 1. Dependence $k_1(\tau)$

Графік $k_1(\tau)$ близький до прямої лінії. Значення постійної τ_* у формулі (19) виявилось рівним $\tau_* = 3{,}342$. Постійна τ_* дорівнює безрозмірному часу $(\tau_* = \omega\cdot t_*)$, необхідному для зупинки у нижньому положенні рівноваги маятника, первісно такого, що знаходився у верхньому положенні рівноваги.

На рис. 2. надано залежність енергії $a(\tau)$ для коливань $(\tau \ge 0)$, отриману шляхом перерахунку залежності $k_1(\tau)$ за формулою (15). Зазначимо, що згідно з асимптотичною формулою (18) похідна $d\tau/da \to -\infty$ при $a \to 0$, тому дотична до кривої $a(\tau)$ у точці $\tau = 0, a = 0$ горизонтальна.

Залежність $a(\tau)$ є універсальною і дозволяє розв'язувати різноманітні задачі мінімізації й максимізації енергії розглядуваної маятникової системи. Нехай у початковий момент енергія маятника дорівнює a^0 й необхідно за час $T^* = \omega\cdot T\cdot\varepsilon^{-1}$ мінімізувати (чи максимізувати) скінчене значення повної енергії коливань. Щоб вирішити цю задачу спочатку на графіку $a(\tau)$ (див. рис.2) знаходимо точку τ_0, яка відповідає початковому значенню $a(\tau_0) = a^0$. Оскільки $a(\tau)$ монотонна функція, то точка τ_0 єдина. Потім від точки τ_0 відкладаємо інтервал довжини $(\omega T) = \theta$ у бік зростання τ у випадку мінімізації енергії. Матимемо точку $\tau = \tau_0 + \theta$ для задачі мінімізації. Відповідне цій точці значення $a(\tau_0 + \theta)$ дає мінімальну енергію у кінці інтервалу управління.

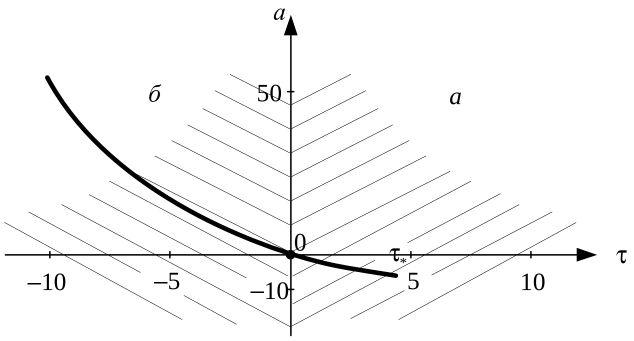

Рис. 2. Залежність $a(\tau)$: *а* – зона коливань; *б* – зона обертання маятника

Fig. 2. Dependence $a(\tau)$: *a* – zone of dynamics; *b* – the area of rotation of the pendulum

Зазначимо, якщо $\tau_0 + \theta \geq \tau_*$, то це означає, що у кінці процесу маятникова система знаходиться у нижньому стійкому положенні рівноваги, де $a = -2$. При цьому керування $u^* = 0$ на інтервалі $\tau_* \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$.

Отриманий розв'язок може описувати перехід обертань у коливання (для задачі мінімізації енергії). Такий перехід бути мати місце, якщо інтервал $[\tau_0, \tau_0 + \theta]$ утримує у собі точку $\tau = 0$. Зазначимо, що при такому переході, що відповідає переходу збуреного розв'язку через сепаратрису породжуючого рівняння, частота коливань (обертань) перетворюється у нуль. При цьому спадає точність методу усереднення, однак ним можна користуватись для побудови наближеного розв'язку [15, 16].

Наведені залежності дозволяють також вирішувати задачі оптимальної швидкодії. Наприклад, якщо $a(\tau_0 + \theta) = -2$, то час θ є часом швидкодії, необхідним для оптимальної зупинки маятникової системи за початкової її енергії $a^0 = a(\tau_0)$.

Для порівняння наведемо значення часу швидкодії, який відповідає точному й наближеному оптимальному керуванню, для різних початкових значень φ^0 та $\dot{\varphi}^0$. Точне значення швидкодії $\bar{T}$ було визначене шляхом чисельної побудови оптимальних траєкторій для системи

$$\ddot{\varphi} + \alpha \cdot \sin\varphi = u, \ |u| \leq 1, \qquad \varphi(\bar{T}) = 2n\pi, \ \dot{\varphi}(\bar{T}) = 0. \tag{20}$$

Наближене значення часу оптимальної швидкості $\bar{T}$ визначається для системи (20) за заданих початкових даних φ^0, $\dot{\varphi}^0$ наступним чином. Якщо у (20) зробити заміну аргументу $\tau \to \alpha^{1/2} \cdot \tau$, то матимемо вихідну систему (5). Тому для (20) маємо

$$a^0 = \frac{(\dot{\varphi}^0)^2}{(2\alpha)} - 1 - \cos\varphi^0, \qquad \bar{T} = \alpha^{1/2} \cdot \theta, \quad \varepsilon = \alpha^{-1}. \tag{21}$$

Визначаючи a^0 з (21), знаходимо за допомогою побудованої залежності $a(\tau)$ спочатку τ_0 з умови $a(\tau) = a^0$, а потім θ з рівняння $a(\tau_0 + \theta) = -2$. Після цього обчислюємо $\bar{T}_0$ згідно (21).

Наведені у таблиці результати відповідають $\alpha = 5$. Вони підтверджують доволі задовільну точність асимптотичних розрахунків навіть при не дуже малих ε (тут $\varepsilon = 0,2$).

Таблиця. Результати досліджень
Table. Research results

$\dot{\varphi}^0$	π	2,44	1,6	-0,15	-2,95	-4,76	-6,62
$\ddot{\varphi}^0$	0,00	1,66	3,52	5,00	3,20	4,95	6,00
$\bar{T}$	8,06	8,13	8,33	8,64	9,27	9,67	9,96
$\bar{T}_0$	7,47	7,58	8,02	8,36	9,04	9,47	9,72

Слід зазначити, що задачі оптимальної швидкодії для систем, подібних (20), при $\alpha < 1$ досліджувались у роботах [17 – 19].

ВИСНОВКИ

1. Обгрунтований метод усереднення у нелінійних задачах оптимального управління маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана.

2. У межах розробленої математичної моделі отримані залежності амплітуди (min/max) загальної енергії коливань маятника від часу, а також тривалість періоду/час швидкодії, коли вказана енергія спадає до нуля.

3. Отримані у роботі результати можуть використовуватись для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку маятникових коливань вантажів на канатах мостових кранів з метою управління процесами затухання вказаних (небажаних) коливань, як на стадіях проектування/конструювання відповідних систем, так і у режимах їх реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И.* Динамика машинных агрегатов на предельных режимах движения /И. И. Артоболевский, В.С. Лощинин. – М.: Наука, 1977. – 325 с.
2. *Грузоподъемные машины* /М. П. Александров, Л.Н. Колобов, Н.А. Лобов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.
3. *Грузоподъемные краны* /Под ред. М. П. Александрова. М.: Машиностроение. Кн. 1. – 1981. – 216 с.; Кн. 2. – 1981. – 287 с.
4. *Казак С. А.* Динамика мостовых кранов / С. А. Казак. – М.: Машиностроение, 1968. – 472с.
5. *Лобов Н. А.* Динамика грузоподъемных кранов /Н. А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
6. *Акуленко Л. Д.* Метод осреднения в задачах оптимального управления /Л. Д. Акуленко, Ф. Л. Черноусько // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. –Т. 15, № 4.
7. *Акуленко Л. Д.* Приближенное решение нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами методом канонического разделения движений /Л. Д. Акуленко // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т.40. – Вып. 6.
8. *Акуленко Л. Д.* Асимптотическое решение некоторых нелинейных задач оптимального быстродействия /Л. Д. Акуленко // Прикладная математика и механика. – 1978. – Т.42. – Вып. 1.
9. *Черноусько Ф. Л.* Метод осреднения для оптимального управления нелинейными колебательными системами /Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко //VII Internationale Konferenz uber nihitlineare Schwingungen. Band I, 1. – Berlin, Akademie – Verlag, 1977.
10. *Черноусько Ф. Л.* Управление колебаниями /Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость /Ф. Л. Черноусько.– М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968.
12. *Журавский А. М.* Справочник по эллиптическим функциям / А. М. Журавский. – М. – Л.: Изд – во АН СССР, 1941. – 420 с.
13. *Янке Е.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 514 с.
14. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений /И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 840 с.
15. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – Наука, 1978.
16. *Нейштадт А. И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром /А. И. Нейштадт // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39. – Вып.4.
17. *Белецкий В. В.* Об оптимальном приведении ИСЗ в гравитационно–устойчивое положение / В. В. Белецкий //Космические исследования. – 1971. – Т. 9. – Вып. 3.
18. *Филимонов Ю. М.* К задаче об оптимальном управлении математическим маятником /Ю. М. Филимонов // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1. – №8.
19. *Almuzara L. J. G.* Minimum time control of a nonlianer system / L. J. G. Almuzara, I. Flugge – Lotz // Journal of Differential Equations. – 1968. – Vol. 4, No. 1.

REFERENCES

1. *Artobolevskij I.I. 1977.* Dinamika mashinnyh agregatov na predel'nyh rezhimah dvizhenija. [Dynamics of machine units in the limiting modes of motion]. Moscow, Nauka, 325. – (in Russian).
2. *Aleksandrov M.P., Kolobov L.N., Lobov N.A. 1986.* Gruzopodemnye mashiny [Hoisting

machines]. Moscow, Mashinostroenie, – 400. – (in Russian).
3. *Aleksandrov M.P. 1981.* Gruzopodemnye krany. [Hoisting cranes]. Moscow, Mashinostroenie. – (in Russian).
4. *Kazak S. A. 1968.* Dinamika mostovyh kranov. [Dynamics of overhead cranes]. Moscow, Mashinostroenie, 472. – (in Russian).
5. *Lobov N. A. 1987.* Dinamika gruzopodemnyh kranov. [Dynamics of cranes]. Moscow. Mashinostroenie, 160. – (in Russian).
6. *Akulenko L.D., Chernous'ko F.L. 1975*. Metod osrednenija v zadachah optimal'nogo upravlenija. [The averaging method in optimal control problems] Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, Vol.15, No.4. – (in Russian).
7. *Akulenko L.D. 1976.* Priblizhennoe reshenie nelinejnyh zadach optimal'nogo upravlenija kolebatel'nymi processami metodom kanonicheskogo razdelenija dvizhenij. [Approximate solution of nonlinear problems of optimal control of oscillatory processes by the method of canonical separation of motions]. Prikladnaja matematika i mehanika, Vol.40, No.6. – (in Russian).
8. *Akulenko L.D. 1978.* Asimptoticheskoe reshenie nekotoryh nelinejnyh zadach optimal'nogo bystrodejstvija. [Asymptotic solution of some nonlinear optimal speed problems]. Prikladnaja matematika i mehanika, Vol.42, Issue 1. – (in Russian).
9. *Chernousko F.L., Akulenko L D. 1977.* Metod osrednenija dlja optimal'nogo upravlenija nelinejnymi kolebatel'nymi sistemami. [The averaging method for optimal control of nonlinear oscillating systems]. VII Internationale konferenz uber niclitlineare Scliwingungen. Band I, 1, Berlin, Akademie Verlag.
10. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. 1980.* Upravlenie kolebanijami. [Control of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 384. – (in Russian).
11. *Chernousko F.L. 1968.* Dvizhenie tverdogo tela s polostjami, soderzhashhimi vjazkuju zhidkost' [Movement of a solid with cavities containing a viscous liquid]. Moscow, Izdvo VC AN SSSR Publ. – (in Russian).
12. *Zhuravskij A.M. 1941.* Spravochnik po jellipticheskim funkcijam. [Handbook of elliptic functions]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ. 420. – (in Russian).
13. *Janke E., Jemde F., Lesh F. 1977.* Specialnye funkcii. Formuly, grafiki, tablicy. [Special functions. Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ. 514. – (in Russian).
14. *Gradshtejn I. S., Ryzhik I.M. 1962.* Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 840. – (in Russian).
15. *Arnold V.I. 1978.* Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravne [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Utochnennja, Nauka Publ. – (in Russian).
16. *Nejshtadt A. I. 1975.* Prohozhdenie cherez separatrisu v rezonansnoj zadache s medlenno izmenjajushhimsja parametrom [Passage through a separatrix in a resonant problem with a slowly varying parameter]. Prikladnaja matematika i mehanika, Vol.39, Issue 4. – (in Russian).
17. *Beleckij V.V. 1971.* Ob optimalnom privedenii IS3 v gravitacionno–ustojchivoe polozhenie [On the optimal reduction of IS3 to the gravitational-stable position]. Kosmicheskie issledovanija, Vol.9, No.3. – (in Russian).
18. *Filimonov Ju.M. 1965.* K zadache ob optimal'nom upravlenii matematicheskim majatnikom. [To the problem of optimal control of a mathematical pendulum]. Differencial'nye uravnenija, Vol.1, No.8. – (in Russian).
19. *Almuzara L.J.G., Flugge–Lotz I. 1968.* Minimum time control of a nonlianer system, Journal of Differential Equations, Vol.4, No.1. – (in Russian).