

УДК 539.3

д.т.н. професор Чибіряков В.К.,
к.т.н. доцент Станкевич А.М.,
Левківський Д.В., Мельничук В.Ф.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

ПРО ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДА ПРЯМИХ

У даній роботі запропоновано для зниження вимірності диференціальних рівнянь теорії пружності використовувати узагальнений метод прямих, в основу якого покладено метод прямих в комбінації з проекційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. В якості базисних функцій використовуються локальні функції. Досліджена точність методу в залежності від виду базисних функцій. Розглянуто 3 варіанти функцій: лінійні, кубічні сплайни та квадрати косинусів.

Ключові слова: узагальнений метод, проекційний метод, прями, сплайни, функція, точність, рівняння, теорія пружності.

Метод прямих - достатньо розвинений комбінований метод розв'язання складних задач математичної фізики, особливо теорії пружності - базується на зведенні граничних задач для рівнянь в частинних похідних до граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, тобто зниження вимірності вихідних рівнянь (редукції). Як правило, зниження вимірності по одній чи двох просторових координатах виконується наближеною заміною частинних похідних відповідними відношеннями скінченних різниць [1-3]. Граничні задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку сталих коефіцієнтів розв'язуються аналітично [1-3], а у випадку змінних коефіцієнтів виконуються певні спрощення рівнянь, після чого рівняння розв'язують наближено. При цьому в багатьох публікаціях [5], [6] та ін. наголошується на підвищенні точності порівняно з універсальними чисельними методами (в основному, з методом скінченних різниць).

У роботі [5] нами було запропоновано інший підхід до побудови редукованих рівнянь та подальшого їх розв'язання. Замість застосування метода скінченних різниць для зниження вимірності використано проекційний метод, який є узагальненням метода Бубнова-Гальоркіна [4] з локально зосередженими базисними функціями (рис 1).

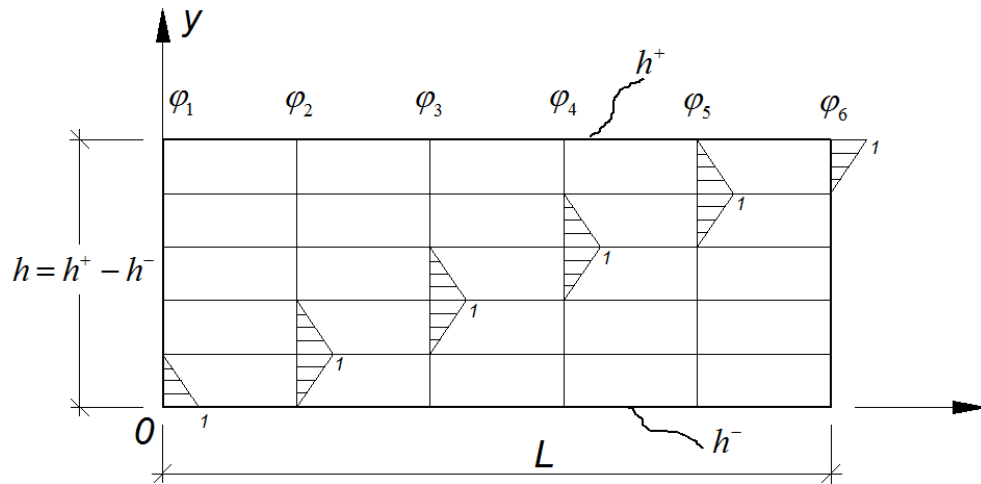


Рис. 1

Функції вихідних рівнянь по змінним, по яким виконується редукція, розглядаються як елементи гільбертового простору зі скалярним добутком (по одній змінній)

$$(f(x, y), \varphi(y)) = \int_{h^-}^{h^+} f(x, y) \varphi(y) dy$$

і вважаються параметрично залежними від іншої координати.

Вибрані базисні функції (рис.1) в такому скалярному добутку не ортогональні, але вони утворюють лінійно-незалежну систему, дуже зручні, оскільки локалізовані максимум у двох проміжках, а скалярні добутки базисних функцій дуже зручно обчислювати за відомим в будівельній механіці стержневих систем правилом Верещагіна.

Редуковані рівняння будуються за допомогою трьох матриць, а саме:

- матриці скалярних добутків базисних векторів

$$g_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y)), \quad (1)$$

- оберненої до неї

$$\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}, \quad (2)$$

- та матриці

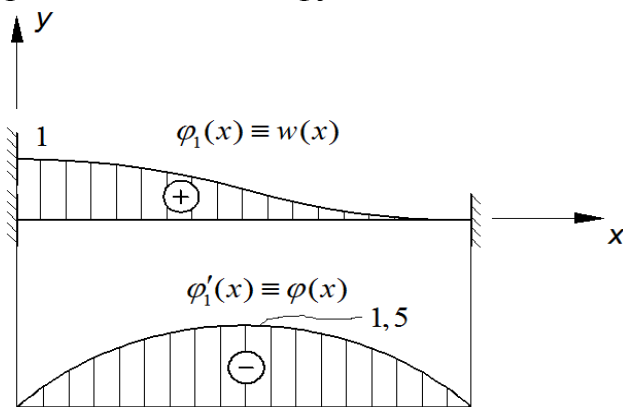
$$b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y)), \quad (3)$$

Для вибраного базису матриці мають вигляд [4]

$$\{g_{ij}\} = \Delta \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \{b_{ij}\} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

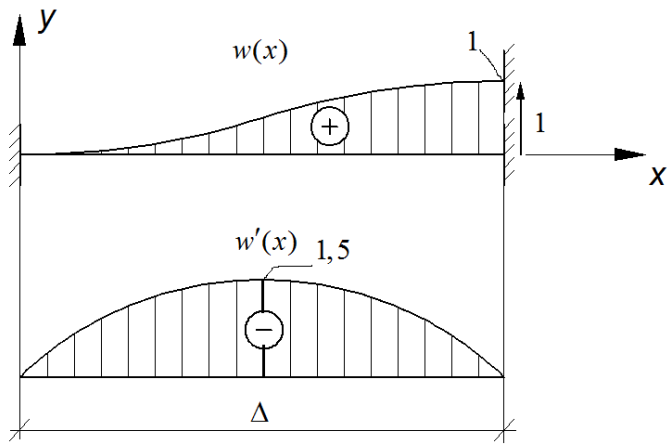
Після зниження вимірності вихідних рівнянь та частини граничних умов (на торцях), отримуємо граничну задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку на другому етапі пропонується розв'язувати ефективним чисельним методом – методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Оскільки, інтегрування диференціальних рівнянь проводиться методом Рунге-Кутта четвертого, а то й вищого порядку точності, то другий етап виконується як завжди точно. У зв'язку з цим для підвищення точності всієї процедури комбінованого методу необхідно вибирати більш складні базисні функції, які б забезпечували підвищення точності процедури зниження вимірності. У той же час для базисних функцій будемо зберігати їх локальний характер, щоб не виходити за межі основних ідей метода прямих.

У якості другого варіанта базисних функцій будемо розглядати кубічні сплайни, які зручно розглядати як прогини балки довжиною Δ , з двох боків якої жорстке защемлення при різних кінематичних діях на кінцях. У локальній системі координат за допомогою метода початкових параметрів неважко отримати необхідні функції:



$$\begin{aligned} w(x) &= 1 - \frac{3}{\Delta^2} x^2 + \frac{2}{\Delta^3} x^3, \\ \varphi(x) &= -\frac{6}{\Delta^2} x + \frac{6}{\Delta^3} x^2, \end{aligned} \quad (5)$$

Рис.2



$$w(x) = \frac{3}{\Delta^2}x^2 + \frac{2}{\Delta^3}x^3, \quad (6)$$

$$w'(x) = \frac{6}{\Delta^2}x - \frac{6}{\Delta^3}x^3.$$

Рис.3

З цих функцій утворюємо базисні функції та їх похідні (рис. 4)

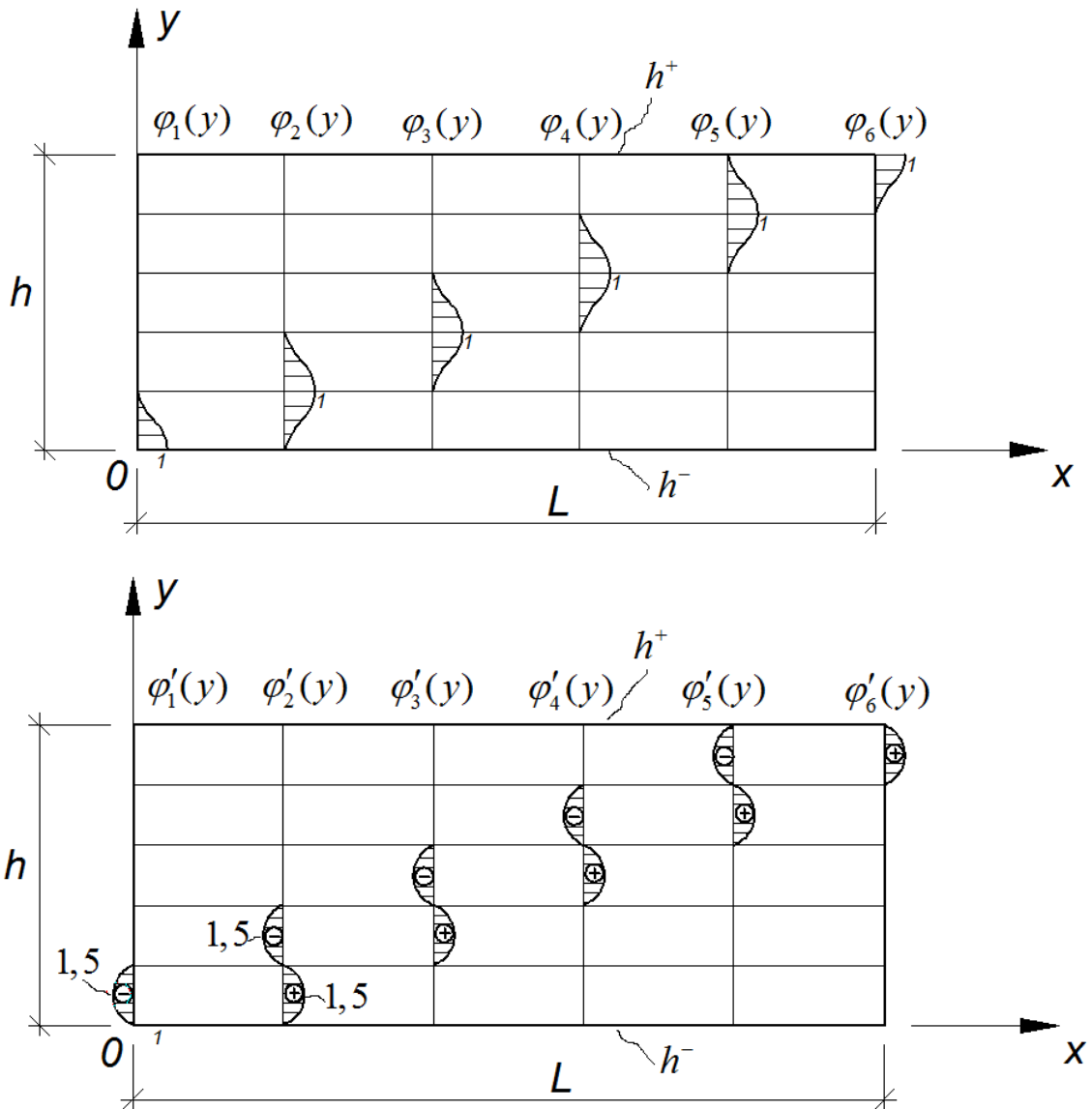


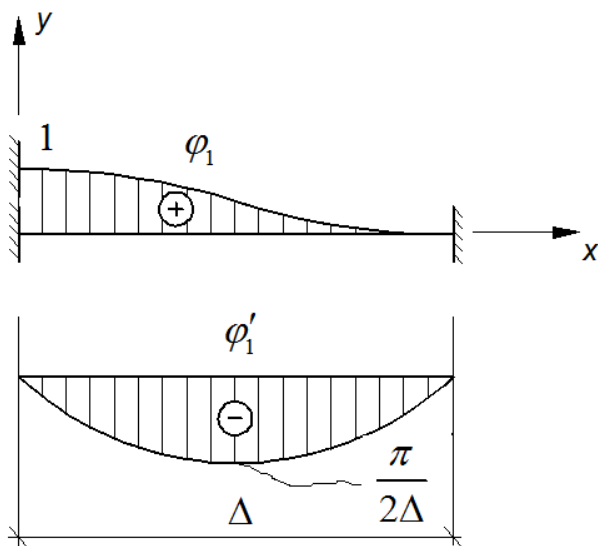
Рис.4

Для цього базиса матриця $\{g_{ij}\}$ має вигляд

$$\{g_{ij}\} = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{9}{70} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{35} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Матриця $\{b_{ij}\}$ для другого варіанта базисних функцій повністю співпадає з попередньою матрицею $\{b_{ij}\}$.

Третій варіант базисних локально зосереджених функцій утворюємо з функцій



$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{\Delta} \right) = \cos^2 \frac{\pi x}{2\Delta}, \quad (8)$$

$$\varphi_1' = -\frac{\pi}{2\Delta} \sin \frac{\pi x}{\Delta}, \quad x \in [0, \Delta],$$

Рис.5

та функцій

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\Delta} \right) = \sin^2 \frac{\pi x}{2\Delta}, \quad (9)$$

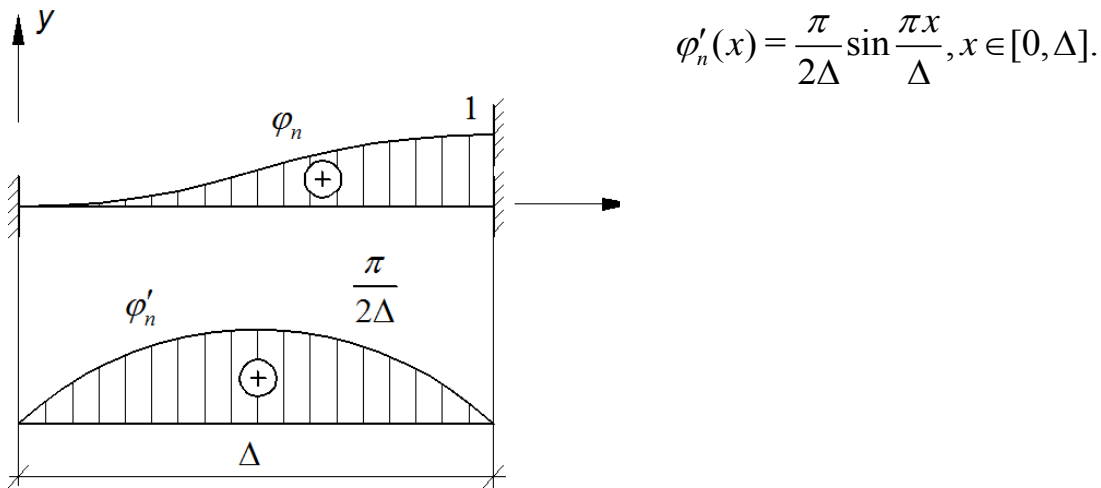


Рис.6

Система базисних функцій має графік, що співпадає за виглядом з графіком базисних функцій другого варіанта (рис.4). Для цього базиса матриця $\{g_{ij}\}$ має вигляд

$$\{g_{ij}\} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

а матриця $\{b_{ij}\}$ повністю співпадає з попередніми матрицями $\{b_{ij}\}$.

Для порівняння виконано розрахунок напружено-деформованого стану нескінченної пластини прямокутного поперечного перерізу $1\text{ м} \times 0,1\text{ м}$ в постановці плоскої деформації. Пластина защемлена по площинам $x=0$ та $x=l$, а по горизонтальним площинам h^- та h^+ прикладено рівномірно розподілене навантаження $q(x) = -1$. Редуковані рівняння розглянуто в трьох варіантах відповідно до трьох варіантів базисних функцій в послідовності, що наведена в даній роботі. Отримані результати порівнювались ступенем виконання граничних умов на бічних площинах h^- та h^+ біля кутової точки

(поблизу защемлення). Як відомо, це відповідає внутрішньому куту в пружному тілі, де виконання граничних умов порушується. Кількість точок ортогоналізації в усіх трьох розрахунках прийнята однаковою – 51, відповідно крок по осі Ox $\Delta x = 0.02$ м. Результати розрахунків в околі такої особливості наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Значення нормальних напружень σ_y (kH / m^2) на границі $y = h^-$.

№ точок варіант	1	2	3	4	5	6	7
I варіант	$-0.411 \cdot 10^2$	-0.09662	0.9582	0.9951	0.9995	1.0000	1.0000
II варіант	$-0.382 \cdot 10^2$	1.189	0.9895	0.997	1.0000	1.0000	1.0000
III варіант	$-0.366 \cdot 10^2$	1.284	1.004	0.9946	0.9993	1.0000	1.0000

Як видно із наведених результатів усі три варіанти розрахунку відстежують порушення граничних умов поблизу защемлення. Але зона порушення при застосуванні базисних функцій II і III варіанта значно зменшується, що свідчить про більш високий степінь апроксимації.

У багатьох випадках потрібно згущувати прямі, або, навпаки, розріджувати їх. Проекційний метод і тут значно спрощує побудову редукованих рівнянь. Розглянемо систему базисних функцій першого типу і нехай по осі y вибрано нерівномірне розбиття, тобто крок прямих Δ залежить від номера ділянки

$$\Delta_m = \Delta_0 \cdot \psi_m, \quad (11)$$

де Δ_0 – довжина наперед вибраної довільної ділянки, а коефіцієнт ψ_m визначає відносну довжину поточної ділянки. У цьому випадку основні матриці $\{g_{ij}\}$ та $\{b_{ij}\}$ мають вигляд

$$\{g_{ij}\} = \Delta \cdot \begin{bmatrix} \frac{\psi_1}{3} & \frac{\psi_1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_1}{6} & \frac{\psi_1 + \psi_2}{3} & \frac{\psi_2}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi_2}{6} & \frac{\psi_2 + \psi_3}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\psi_{n-3} + \psi_{n-2}}{3} & \frac{\psi_{n-2}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\psi_{n-2}}{6} & \frac{\psi_{n-2} + \psi_{n-1}}{3} & \frac{\psi_{n-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\psi_{n-1}}{6} & \frac{\psi_n}{3} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\{b_{ij}\} = \begin{bmatrix} -\frac{\psi_1}{2} & \frac{\psi_1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_1}{2} & -\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} & \frac{\psi_2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\psi_2}{2} & -\frac{\psi_2 + \psi_3}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\psi_{n-2} + \psi_{n-1}}{2} & \frac{\psi_{n-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\psi_{n-1}}{2} & -\frac{\psi_{n-1} + \psi_n}{2} & \frac{\psi_n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\psi_n}{2} & \frac{\psi_n}{2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Варьовання кроком прямих в багатьох випадках дозволяє підвищити точність, або більш детально розглядати деякі зони, в яких очікується підвищені напруження та таке інше.

Література

1. Л.П. Винокуров. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. – Харьков. Изд-во Харьк. ун-та, 1956.

2. Л.Т. Шкелёв, Ю.А. Морсков, Т.А. Романова, А.Н. Станкевич. Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояний пластин и оболочек. – Киев. Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.

3. Л.Т. Шкелёв, А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач, Ю.А. Морсков, А.Ф. Корбаков. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография. – К.: КНУСА, 2004. -136 с.

4. С.М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры. – М., 1957 – 476 с

5. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с.413-423.

6. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – с.613-624.

Аннотация

В данной работе для снижения размерности дифференциальных уравнений теории упругости предложено использовать обобщенный метод прямых, в основу которого положен метод прямых в сочетании с проекционным методом Бубнова-Галёркина-Петрова. В качестве базисных функций используются локальные функции. В работе исследована точность метода в зависимости от вида базисных функций. Предложено 3 варианта функций: линейные, кубические сплайны и квадраты косинусов.

Abstract

In this paper, to reduce the dimension of the differential equations of elasticity theory is proposed to use the generalized method of lines, which is based on the direct method in conjunction with the projection method Bubnov-Galerkin-Petrov. As the basis functions used local functions. We study the accuracy of the method depends on the type of basis functions. Suggested 3 different functions: linear, cubic splines and squares of cosines.