

УДК 539.3

І.В. Жупаненко, асистент

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ

Для розрахунку частот та форм власних коливань товстої кільцевої пластини вісесиметричної структури пропонується аналітично-чисельна методика, що реалізує проблемно-орієнтований алгоритм і дозволяє з високою точністю отримувати розв'язок задач, індивідуалізованих за класами областей, видами впливів, характеристиками фізичних властивостей тощо.

Розглядається пластина вісесиметричної структури товщиною h , співрозмірною з радіусом R . В центрі пластина має отвір радіусом R_0 .

Тривимірна постановка задачі про визначення динамічної реакції такого тіла дає, безсумніву, найбільш точну картину динамічного деформування. Проте розв'язок таких задач загальними числовими методами досить трудомісткий, що дає підстави говорити про необхідність розробки методики розрахунку частот та форм власних коливань на основі комбінованого підходу. Такий підхід базується на поєднанні аналітичних і числових методів і передбачає розв'язок просторової задачі динамічної теорії пружності вести в два етапи: на першому знижується вимірність вихідних рівнянь та граничних умов, на другому редукована крайова задача розв'язується чисельно.

В якості вихідних рівнянь прийнято співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці, записані відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0 + r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0 + r} \sigma_{rz} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0 + r} u_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\mu}{R_0 + r} u_r;$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0 + r} u_r; \quad \sigma_{rz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (2)$$

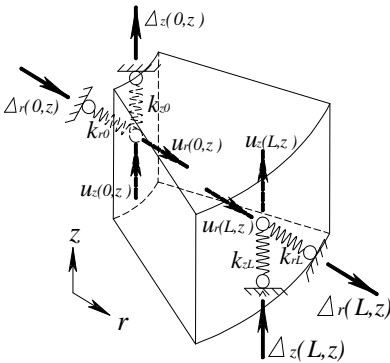


Рис. 1. Граничні умови на торцевих поверхнях пластини

Взаємодія пластини з оточуючим середовищем та опорними конструкціями моделюється за допомогою пружних в'язів (стержнів) відомої жорсткості k (рис. 1).

Такий підхід дозволяє реалізувати всі звичайні граничні умови та врахувати піддатливість опори за рахунок варіювання жорсткості в'язів. Так наприклад, якщо $k = 0$, то в даному напрямку в'язь відсутня і може бути задане напруження та навпаки, при $k = \infty$ в'язь набуває

нескінченної жорсткості і може задаватися зміщення.

Граничні умови записуються наступним чином:

$$\frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} u_j(0) - \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \sigma_{rj}(0) = \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot \Delta_{j0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot q_{j0},$$

$$\frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} u_j(L) + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \sigma_{rj}(L) = \frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot \Delta_{jL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot q_{jL},$$

$$(j = r, z),$$

де k_{i0}, k_{iL} - жорсткість в'язів по відповідному напрямку на торцевій поверхні $r=0$ та $r=L$ відповідно.

Для побудови рівнянь динамічної теорії товстих пластин обрано узагальнений метод скінчених інтегральних перетворень, запропонований В.К. Чибіряковим [2] – [4] як узагальнення проекційного методу І.Н. Векуа, з розкладом невідомих функцій в ряди Фур'є по системі $(N+1)$ нормованих поліномів Лежандра.

Процес зниження вимірності вихідних рівнянь розглядається як формальна процедура, що зводиться до заміни елементів, які входять у вихідні рівняння та граничні умови на торцевих поверхнях, їх

проекційними аналогами за побудованою таблицею проекційних відповідностей [4], подібних співвідношенням операційного числення.

За часовою координатою при гармонічному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z, t) = u_{z,0}^i(z) \cdot \sin(\theta \cdot t), \quad \left(u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_r^i \Leftrightarrow \sigma_{zr}^i \right), \quad (4)$$

в результаті чого після редукції і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, отримуємо крайову задачу у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій редукованих рівнянь, що в матричній формі має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dr} \vec{Y} = [A] \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (5)$$

$$[C_0] \cdot \vec{Y}(0) = \vec{\Phi}(0), \quad [C_L] \cdot \vec{Y}(L) = \vec{\Phi}(L), \quad (6)$$

де

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} u_r^i \\ u_z^i \\ \sigma_{rr}^i \\ \sigma_{rz}^i \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2} \\ \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2} \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \delta^{ij} & -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{ij} & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ -\frac{2}{h} m^{ij} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{(R^0+r)^2} \cdot \delta^{ij} & \frac{4 \cdot \lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{1}{h} m^{ij} & -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{2}{h} m^{ji} & \\ \frac{4 \cdot \lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{1}{h} m^{ji} & \frac{16 \cdot (\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot m^{\alpha i} \cdot m^{\alpha j} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} m^{ji} & -\frac{1}{R^0+r} \end{bmatrix}$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$[C_L] = \begin{bmatrix} \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$\vec{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \Delta_{r0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot q_{r0} \\ \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \Delta_{z0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot q_{z0} \end{bmatrix};$$

$$\vec{\Phi}(L) = \begin{bmatrix} \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \Delta_{rL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot q_{rL} \\ \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \Delta_{zL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot q_{zL} \end{bmatrix}.$$

Така система при фіксованому значенні частоти збуджуючого навантаження θ вирішується методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [5], за яким задача розв'язується в два етапи: виконується прямий та обернений хід.

Прямий хід передбачає знаходження розв'язку системи для матриці \mathbf{Z} , складеної з векторів, ортонормованих до векторів фундаментальної системи розв'язків \mathbf{Y} . Для цього вектори фундаментальної системи розв'язків однорідних рівнянь (5), ортонормуються в точках ортогоналізації і зводяться до матриці \mathbf{Z} . Таким чином, в точках ортогоналізації розв'язок системи (5) шукається у вигляді:

$$\vec{Y}(s_i) = \mathbf{Z} \cdot \vec{B}(s_i) + \vec{Z}_0, \quad (7)$$

де $\vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{bmatrix}$ – невідомі сталі інтегрування, а \vec{Z}_0 – частковий розв’язок

неоднорідної системи (5). Невідомі сталі \vec{B} в останній точці інтегрування знаходяться з граничної умови на правому кінці:

$$\vec{B}(s_L) = [C_L \cdot Z]^{-1} \cdot \left(\vec{\Phi}_0 - \vec{Z}_0 \right). \quad (8)$$

Оскільки задача розглядається в лінійній постановці, то при наближенні частоти збуджуючої сили θ до частоти власних коливань ω_i компоненти напружено-деформованого стану необмежено зростають і детермінант матриці $[C_L Z]$ прямує до нуля. Це дає змогу визначити частоту власних коливань наступним чином: розглядається послідовність значень θ з певним кроком, для якої виконується лише прямий хід алгоритму дискретної ортогоналізації з визначенням детермінанту матриці $[C_L Z]$. Якщо детермінант змінює знак, методом ділення навпіл визначається значення θ , при якому детермінант матриці $[C_L Z]$ менший заданого малого числа ε . Таке значення θ присвоюється відповідному ω_i .

Після визначення частоти власних коливань відповідна форма коливань знаходиться наступним чином. Оскільки при знаходженні частот та форм власних коливань розглядається однорідна система рівнянь (5), то система алгебраїчних рівнянь для знаходження вектора сталих інтегрування \vec{B} в останній точці інтервалу визначення задачі (5), (6) теж є однорідною:

$$[C_L \cdot Z] \cdot \vec{B} = 0, \quad (9)$$

і має ненульові розв’язки, якщо детермінант матриці $[C_L Z]$ дорівнює нулю. Числові експерименти показують, що дефект цієї матриці дорівнює одиниці (кратних частот в нижній частині спектру немає), тому в системі (9) відкидають одне рівняння і покладають $b_1 = 1$, а інші сталі b_i ($i = 1, 2, \dots, N/2$) знаходять з цієї системи. Після цього виконують

обернений хід алгоритму С.К.Годунова і знаходять значення \vec{B} в інших точках ортогоналізації, що дає змогу побудувати відповідну форму коливаний.

Наведена методика реалізована у вигляді програми, написаної мовою FORTRAN, за допомогою якої досліджено вільні коливання защемленої по контуру круглої пластини радіусом $R=2$ м та защемленої по внутрішньому контуру кільцевої пластини радіусом $R=2$ м з отвором радіусом $R_0=0,5$ м. Фізичні характеристики пластин наступні: $\rho = 2,4 \text{ т/м}^3$, $\nu = 0,3$, $E=2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$.

Частоти власних коливань круглої пластини при різних співвідношеннях товщини до радіусу підраховані з використанням рівнянь (5), (6) при $N=4$ та за методикою С.П. Тимошенко [6]. Порівняння частот наведено в табл. 1.

Власні коливання кільцевої пластини також досліджувались при різних співвідношеннях товщини до радіусу з використанням рівнянь (5), (6) при $N=4$ та з використанням рівнянь класичної теорії пластин [7]. Порівняння частот наведено в табл. 2.

Таблиця 1

Частоти власних коливань круглої пластини

Частоти коливань	Порховано за		Розбіжність, %
	методикою С.П.Тимошенко [6]	методом скінченних інтегральних перетворень при $N=4$	
$h=0,15$ м			
ω_1	115,9	114,4	1,3
ω_2	451,7	431,2	4,5
ω_3	1013	922,4	8,9
$h=0,2$ м			
ω_1	154,5	151	2,3
ω_2	601,9	556	7,6
ω_3	1345	1157	14,0
$h=0,4$ м			
ω_1	309	282	8,7
ω_2	1204	929	22,8
ω_3	2690	1753	34,9

Таблиця 2

Частоти власних коливань кільцевої пластини

Частоти коливань	Пораховано за		Розбіжність, %
	За класичною теорією пластин [7]	За методом скінченних інтегральних перетворень	
$h=0,15$ м			
ω_1	37,7	36,8	2,4
ω_2	234,6	228,5	2,6
ω_3	683,4	635,9	7,0
$h=0,2$ м			
ω_1	50,3	57,1	14,0
ω_2	312,8	296,0	5,4
ω_3	911,1	806,7	11,4
$h=0,4$ м			
ω_1	100,5	100,1	0,4
ω_2	625,5	510,2	18,0
ω_3	1822	1272	30,0

Відповідні форми коливань круглої та кільцевої пластин при товщині $h=0,2$ м наведено на рис. 2.

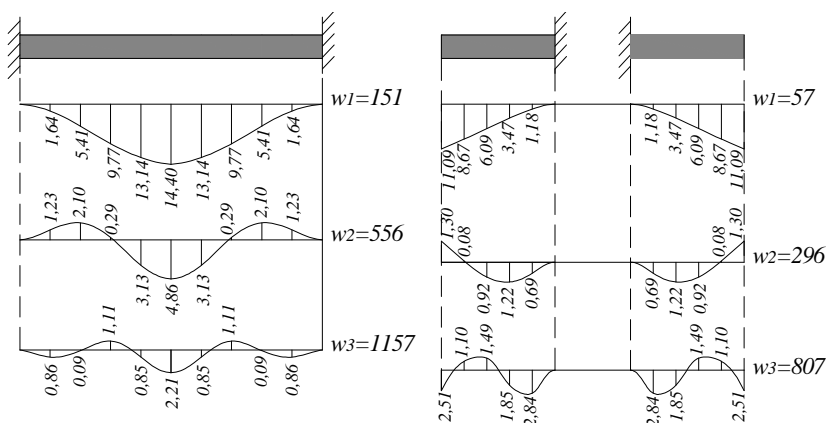


Рис. 2. Форми власних коливань пластин

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958.–372 с
2. *Чибиряков В.К.* Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в статике и динамике пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1982. – Вып. 40. – С. 90 – 95.
3. *Чибиряков В.К., Смоляр А.М.* Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1983. – Вып. 42. – С. 80 – 86.
4. *Чибиряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонки: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
5. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Успехи математических наук, 1961, т. XVI, вып. 3, с. 171 – 174.
6. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1956. – 635 с.

Отримано 23.06.09

Предложена численно-аналитическая методика решения задачи о собственных колебаниях толстых осесимметричных пластин. Аналитическая часть методики состоит в применении обобщенного метода конечных интегральных преобразований по толщине пластины для снижения размерности исходных уравнений трехмерной задачи динамической теории упругости без введения геометрических гипотез. По окружной координате операторы краевой задачи редуцируются рядами Фурье. Редуцированные одномерные задачи численно решаются методом дискретной ортогонализации С.К.Годунова.

A numerical-analytical method is proposed for solution of the problem on free vibrations of thick axi-symmetric slabs. The analytical part of the method consists of application of the method of finite integral transforms on slab's thicknesses for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity without geometrical hypothesize. The operator of boundary-value problem is reduced by Fourier series along a circular coordinate. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by a Godoonov's method of discrete ortogonalization.