

УДК 539.3

Пискунов С.О. канд. техн. наук
Шкрить О.О.
Мицюк С.В.

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ КРУГОВИХ ТІЛ

На основі напіваналітичного методу скінченних елементів проведено розробку і реалізацію методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом при силовому навантаженні.

Вступ. Прогрес в різних галузях науки та техніки приводить до створення нових машин, механізмів і конструкцій. Однак, всі конструкції в тій чи іншій мірі мають схильність до руйнування, наслідки яких можуть бути дуже значними, тому актуальним є питання можливості експлуатації деталей та вузлів при наявності в них тріщин. В певних випадках визначення несучої здатності таких тіл можна здійснювати шляхом зведення задачі до двовимірної. Серед існуючих тіл з тріщинами більшість мають складну форму. Нерівномірність розподілу в просторі силового навантаження, прикладеного до таких тіл, та викликаний наявністю тріщин просторовий характер напружено-деформованого стану потребує розглядати поставлену задачу в просторовій постановці.

Розв'язання задачі про визначення несучої здатності просторових тіл при наявності тріщин потребує залучення чисельних методів, найбільш широкого застосування серед яких на сьогоднішній день набуває МСЕ (метод скінченних елементів). Проте, використання традиційного тривимірного варіанту МСЕ для розв'язання просторових задач потребує значних обчислювальних витрат. Суттєве зменшення обчислювальних витрат може бути досягнуто за рахунок використання ефективної модифікації МСЕ – напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). Це дозволяє розглядати досить широке коло просторових об'єктів, до яких зокрема, відносяться призматичні тіла та тіла обертання.

Як відомо, при лінійному деформуванні, а також в деяких випадках нелінійного деформування, для оцінки несучої здатності тіл з тріщинами використовується коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Визначення КІН здійснюється прямими та енергетичними методами, шляхи реалізації яких для двовимірних задач наведені в [1]. Реалізація прямого методу визначення КІН для призматичних тіл на основі НМСЕ здійснена в [4]. В той же час, значна кількість просторових тіл з тріщинами являють собою тіла обертання (рис. 1, рис. 2).

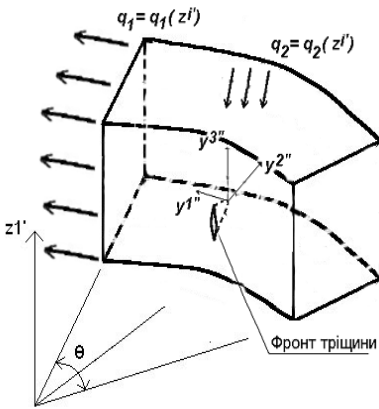


Рис. 1

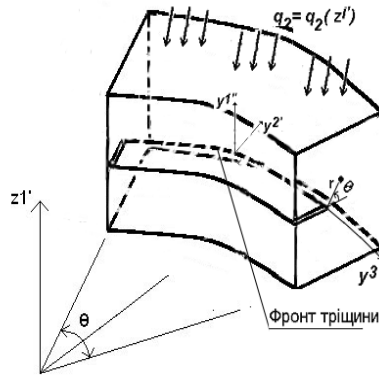


Рис. 2

Таким чином постає необхідність розробки методів визначення КІН для просторових тіл обертання на основі НМСЕ. Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ для дискретизації тіл обертання з тріщинами, реалізація методики визначення КІН прямим методом в досліджуваних об'єктах і проведення аналізу достовірності результатів.

1. Співвідношення механіки руйнування. Для опису просторового напружено-деформованого стану в околі фронту тріщини застосовується пов'язана із тріщиною система координат y'' : вісь $y^{1''}$ спрямована за нормаллю до поверхні тріщини, а $y^{2''}$, $y^{3''}$ – за дотичною до фронту. У випадку лінійного деформування під впливом силового навантаження напружено-деформований стан в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами, які встановлюють взаємозв'язок між переміщеннями і напруженнями та КІН K_I , K_{II} , K_{III} :

$$\begin{Bmatrix} u_{1''} \\ u_{2''} \\ u_{3''} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2r}}{G\sqrt{\pi}} \left[\frac{K_I}{8} \begin{bmatrix} (5-8\nu)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ (7-8\nu)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{8} \begin{bmatrix} (9-8\nu)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \\ (-3+8\nu)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}, \right. \\ \left. K_{III} \sin\frac{\theta}{2} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11''} \\ \sigma^{22''} \\ \sigma^{33''} \\ \sigma^{12''} \\ \sigma^{13''} \\ \sigma^{23''} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + K_{II} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ -2\nu \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} + K_{III} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \right], \quad (1)$$

де r , θ – полярні координати з початком у точці фронту тріщини, для якої визначені КІН; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; I, II, III – індекси, що визначають тип руйнування.

Для випадку тріщин нормального відриву, що розглядаються найчастіше (тип I, рис.3), в яких переміщення берегів тріщини перпендикулярні її площині, вирази (1) набудуть вигляду:

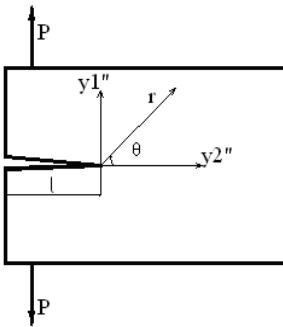


Рис. 3

$$\begin{aligned} \sigma^{11''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma^{12''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{22''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_1'' &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ u_2'' &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

2. Скінченно-елементна дискретизація тіл обертання з тріщинами.

При моделюванні тіл обертання із тріщинами на основі НМСЕ залежно від розташування тріщини відносно до характерного напрямку (утворюючої) аналогічно до призматичних тіл, розрізняють тіла обертання з поперечною (рис.1) та поздовжньою (рис.2) тріщинами [1;4]. При використанні НМСЕ скінченно-елементна дискретизація об'єкта (як

показано на рис. 4 і рис. 5) відбувається в поперечному перерізі, а вздовж направляючої використовується один скінчений елемент, який повторює форму тіла. Розбивка об'єкта на скінченні елементи передбачає згущення сітки в привершинній області. Результати дослідження з питань визначення кількості скінченних елементів (СЕ) в привершинній зоні та їх характерних розмірів наведені в [3].

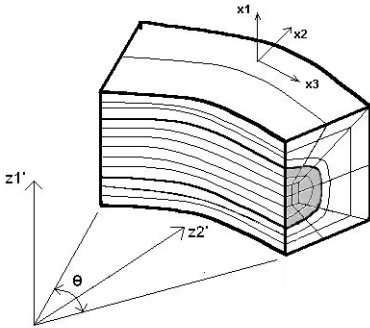


Рис. 4

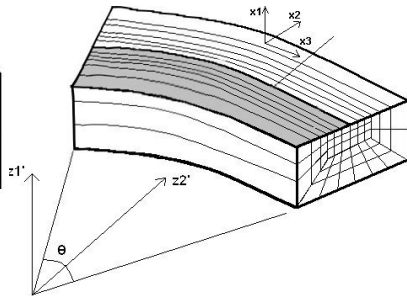


Рис. 5

3.Круговий неоднорідний незамкнений СЕ. Для апроксимації просторових неоднорідних кругових тіл використовуються просторові неоднорідні замкнені і незамкнені кругові СЕ (рис. 6), що являють собою криволінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола [1].

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із z^3 . При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 7) [1;2].

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталих та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx C^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad g = \hat{g} = g \Big|_{x^\alpha=0} .$$

Розподіл переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (3)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно до центра поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

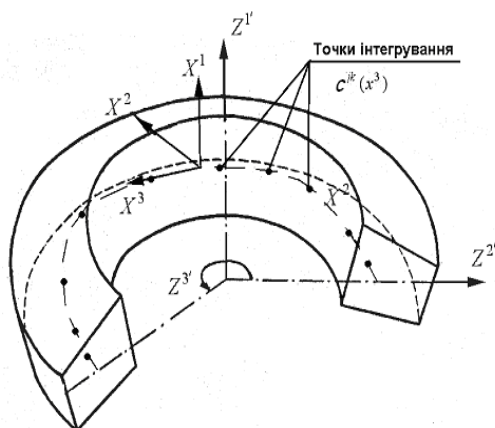


Рис. 6

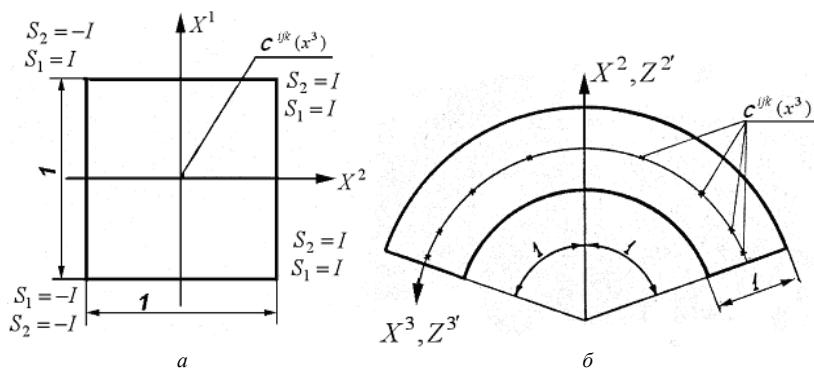


Рис. 7

Для апроксимації переміщень у характерному напрямку z^3 використовується певна система координатних функцій ψ^l , $l = 1, 2, \dots, L$, що має задовольняти умовам повноти та лінійної незалежності [2]. Конкретизація виразів для ψ^l здійснюється відповідно до особливостей форми досліджуваного об'єкта і необхідності апроксимації граничних умов на торцях тіла. Зокрема, у випадку замкнених тіл обергання та шарнірно опертих по торцях кругових незамкнених тіл використовуються тригонометричні функції, а для криволінійних незамкнених та призматичних тіл із довільними граничними умовами на торцях – поліноми Лагранжа, доповнені поліномами Міхліна. Такий вибір координатних функцій дозволяє найефективніше апроксимувати різні види граничних умов [2].

Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється відповідно до варіаційного принципу можливих переміщень [3]. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Подаючи в останньому виразі компоненти тензора напружень і тензора деформацій через їхні значення у центрі елемента, відповідно до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) та інтегруючи, для варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо вираз вузлових реакцій $\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_K$ [3]:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_K = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]_K^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]_K^T \varphi_{l,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T \boldsymbol{\varphi}^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} dx^3 \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\
& + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} \boldsymbol{\varphi}^{(l)} dx^3 + \right. \\
& \left. + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \quad (4)
\end{aligned}$$

З урахуванням чисельного інтегрування за напрямком x^3 [3], отримуємо вираз для обчислення компонентів вектора вузлових реакцій неоднорідного кругового незамкненого СЕ з довільними граничними умовами на торцях:

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{\circ}{\bar{R}}_l \right\}_K & = \left\{ \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_l + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l3} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^M \left(\left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l\alpha} + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \quad (5)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладання прирощень напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = \left[\overset{\circ}{\bar{D}} \right] \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} , \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{\bar{D}}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\} , \quad (6)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подано отриманий вираз енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \left\{ \bar{u} \right\}_l^T \right) [K]_{lnK} \left\{ \bar{u} \right\}_n ,$$

де $[K]_{ln_K}$ – матриця жорсткості неоднорідного кругового незамкненого СЕ:

$$\begin{aligned}
 [K]_{ln_K} = & \left\{ \begin{aligned} & \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K^T [D]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K^T [D]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K + \\ & + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K^T [D]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K + [B_2]_K^T [D]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K + \right. \\ & \left. + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K + \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (7)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Наведені вирази вектора вузлових реакцій (5) і матриці жорсткості (7) неоднорідного кругового незамкненого СЕ, дозволяють утворювати дискретні моделі для неоднорідних кругових незамкнених тіл [1]. Наявність зони згущення призводить до ускладнення топології дискретної моделі і необхідності застосування СЕ, форма поперечного перерізу яких є суттєво косокутною. В цьому випадку при виведенні матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій необхідним є урахування змінності компонентів метричного тензора в поперечному перерізі СЕ. Вигляд матриці $[B]$ для цього випадку наведено в [3].

Розв'язування отриманої системи рівнянь НМСЕ виконується на основі блочно-ітераційних алгоритмів, що обумовлено блочною структурою матриці жорсткості та векторів вузлових реакцій і зовнішнього навантаження. В даній роботі розв'язання системи рівнянь здійснюється на основ методу блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією [1].

4.Реалізація методики визначення КІН для тіл обертання.

Обчислення КІН виконується в характерних точках вздовж фронту тріщини (рис. 8) в межах площин, що містять ці точки і розташовані перпендикулярно до фронту тріщини. Таким чином задача визначення КІН в точці фронту тріщини в просторовому тілі обертання зводиться до його обчислення в межах площини $y^1 - y^2$.

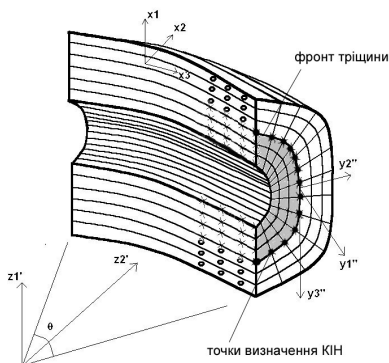


Рис. 8

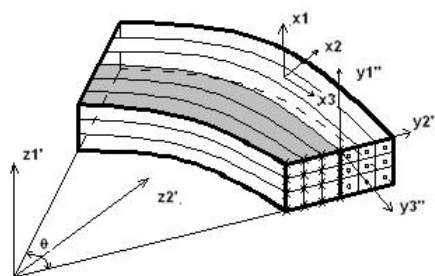


Рис. 9

Враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності [7], в точках, розташованих на відстанях менших $0.1L_{тр}$ ($L_{тр}$ - довжина тріщини) вздовж осей y_1'' y_2'' від вершини тріщини КІН не визначається. Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче $0.05L_{тр}$ від вісі y_2'' (рис. 10, точки обчислення КІН за напруженнями позначені кружками, за переміщеннями – хрестиками). Враховуючи це, було розглянуто три модифікації цієї методики [4]. Згідно до першої з них (рис.10,а) було відкинуто точки, що знаходяться найближче до вершини тріщини, згідно другої (рис. 10,б) – ці точки було враховано. Також було розраховано КІН лише за переміщенням U_K в точці, що розташована найближче до вершини тріщини.

При розгляді тіл з поперечними тріщинами привершинні області, в яких проводиться визначення КІН за напруженнями та переміщеннями і його подальше усереднення, розташовані в площині $z^{1'}$ - $z^{3'}$. Обчислення КІН здійснюється після розв'язання задачі про визначення НДС. Визначення КІН за переміщеннями $K(u)$, здійснюється у вузлах, а КІН за напруженнями $K(\sigma)$ – в центрах СЕ (точки $1 \dots (n-1)$ рис.11). Усереднення для проміжних точок фронту тріщини виконується за прилеглими до неї СЕ:

$$K(\sigma) = \frac{K(\sigma)_{(i-1)} + K(\sigma)_i}{2},$$

а в крайніх точках фронту тріщини значення $K(\sigma)$ приймаються такими, що обчислені для крайніх елементів:

$$K(\sigma)_1 = K(\sigma)_1, \quad K(\sigma)_n = K(\sigma)_{(n-1)}.$$

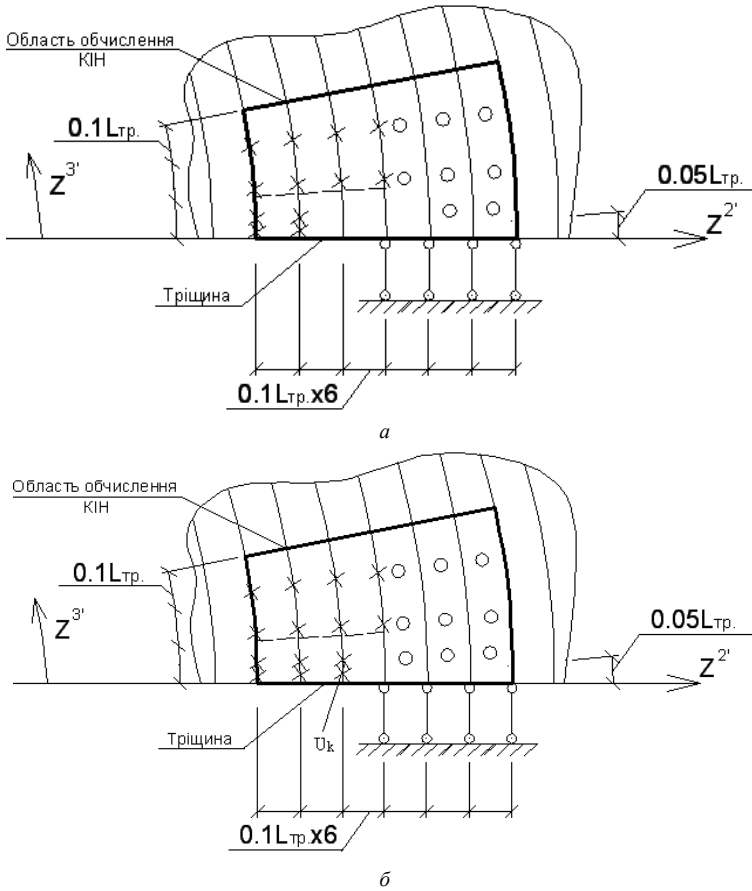


Рис. 10

Тому, для більш точного визначення $K(\sigma)$ в крайніх точках фронту, рекомендується застосовувати елементи малої товщини.

Обчислені в кожній точці величини КІН за напруженнями і переміщеннями усереднюються до отримання $\bar{K}(u)$ і $\bar{K}(\sigma)$, які в свою чергу усереднюються для отримання кінцевого значення КІН:

$$K = \frac{\bar{K}(u) + \bar{K}(\sigma)}{2}$$

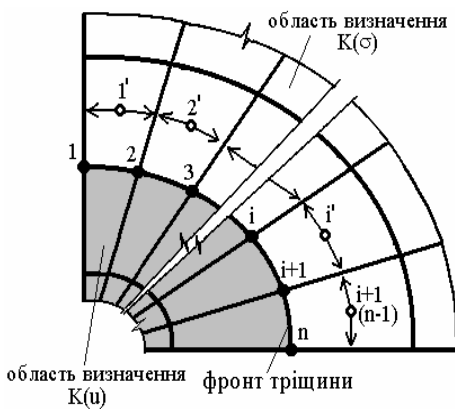


Рис. 11

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж утворюючої, напрямком якої збігається із напрямком фронту тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування лежить в площині поверхні тріщини тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла за аналогією з двовимірними задачами [1].

5. Дослідження достовірності результатів. З метою дослідження вірогідності і ефективності НМСЕ в просторових задачах механіки руйнування для тіл обертання було проведено розв'язування задачі визначення КІН в диску з двома тріщинами, що знаходиться під впливом внутрішнього тиску в умовах плоскої деформації. Розрахункова схема диску показана на рис. 12.

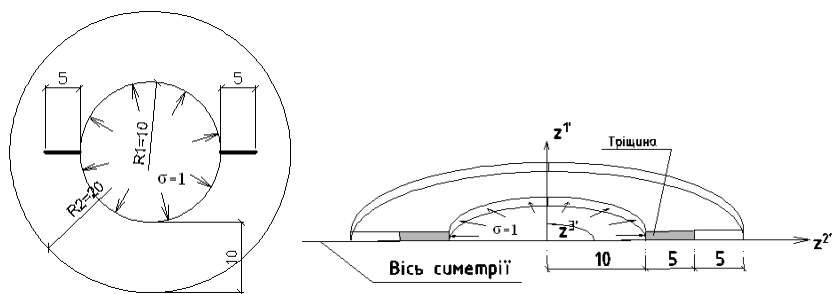
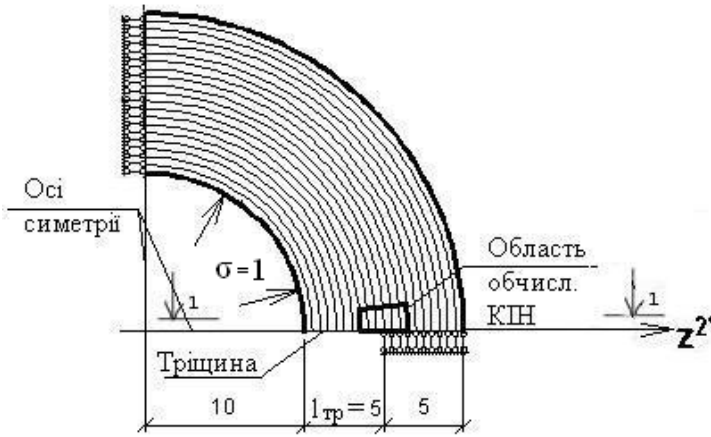
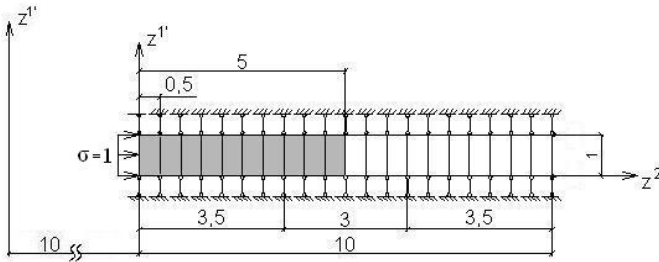


Рис. 12

Внаслідок симетрії розглядалась чверть диска. Розв'язання задачі здійснено із використанням 30 гармонік в представленні переміщень за напрямком z^3 . Вигляд відповідної дискретної моделі НМСЕ в площинах z^1-z^2 і z^2-z^3 наведений на рис.13 а, б.



a



б

Рис. 13

Розрахунок проведений із використанням схем визначення КІН, наведених на рис. 10, а також за переміщенням в найближчому до вершини тріщини вузлі (точка K , рис 10,б). Результати, у порівнянні із прийнятими за еталонні розв'язками – наведеним в [5] та отриманим авторами за методом піддатливості із використанням дискретної моделі МСЕ (рис.15), наведені в табл.1. Як видно, найкраща точність визначення КІН в просторовій постановці досягається при використанні схеми визначення КІН із урахуванням виключення точок асимптотичних значень напружень і переміщень (рис.10,а).

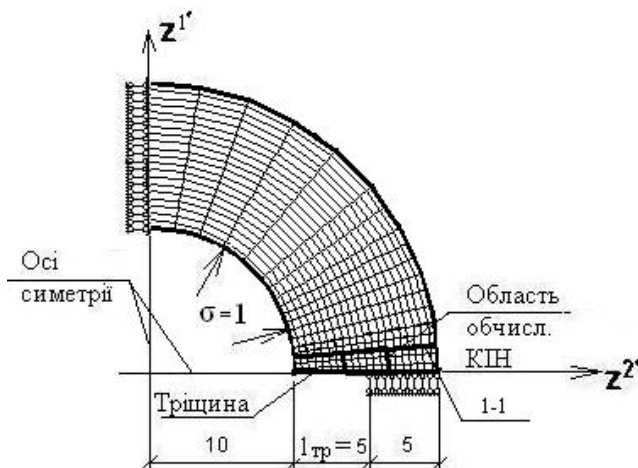


Рис. 15

Таблиця 1

Методи визначення КІН		КІН	δ , %
Метод піддатливості, МСЕ		2.692	- 0.451
Еталон за Савруком М.П.		2,679	-
Прямий метод, НМСЕ	розрахункова схема за рис.10,а	2.629	1.899
	розрахункова схема за рис.10,б	2.781	- 3.772
	КІН (Uк)	2.448	8.653

Висновок. Таким чином, в даній статті наведені основні співвідношення лінійної механіки руйнування при силовому навантаженні, розглянуті принципи і досліджено можливості модифікації методик обчислення КІН прямим методом при її реалізації для тіл обертання. Аналіз результатів показав достовірність використовуваних підходів. Найбільша точність обчислення КІН досягнута при

використанні модифікації методики, згідно до якої усереднення КІН по привершинній області здійснюється без урахування величин КІН по напруженням і переміщеннями, що обчислені в найближчих до вершини тріщини точках.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Слодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з давільними граничними умовами.// Науково технічний збірник „Опір матеріалів і теорія споруд” – Вп.77.К: КНУБА, 2005-112с.
4. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 74. – С. 73–82.
5. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжения в телах с трещинами – Т.2 - 1998.-620с.

Надійшло до редакції 15.11.2006 р.