

УДК 69:002;69.059

О. В. Горда, Асистент КНУБА
 О. О. Пузько, студент КНУБА
 М.І. Цюцюра, студент КНУБА
 М.Г. Кобижський, студент КНУБА

РОЗРАХУНОК ОБ'ЄМУ ЗАПОВНЕННЯ БЕТОНОЗМІШУВАЧА

Постановка задачі. В даній роботі наведений розв'язок однієї із задач визначення об'єму складної фігури, яка є композицією декількох геометричних тіл і має велике прикладне значення.

Розглянемо фігуру, що складається з трьох полостей, дві з яких мають форму зрізаного конуса, а третя є циліндром.

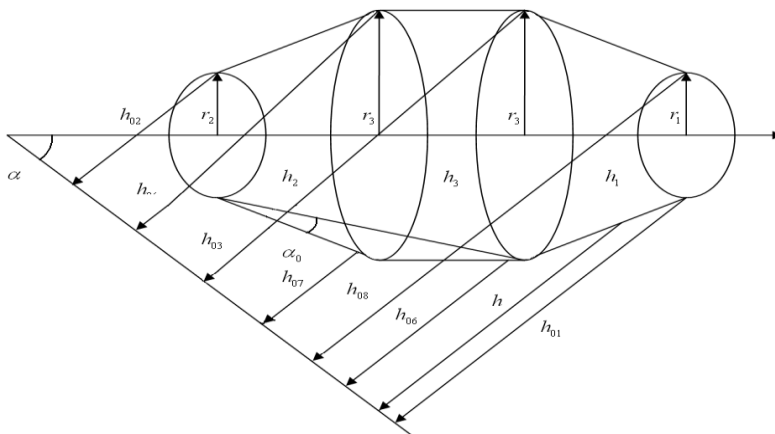


Рис.1 Схематичне представлення фігури.

Актуальність. Таку геометрію має більшість полостей для змішування речовин у промислових міксерах, які використовуються в різних галузях господарської діяльності – від будівництва до харчової та фармакологічної промисловості.

Розв'язання. При розв'язанні нашої задачі будемо виходити з того, що завжди можна визначити рівень заповнення ємкості h і кут її нахилу α . Також відомими є геометричні розміри елементів фігури.

За заданими початковими даними необхідно обчислити об'єм суміші, що знаходиться у ємкості.

В залежності від співвідношення геометричних розмірів ємкості, кута нахилу α та величини рівня заповнення h задача обчислення об'єму суміші може бути віднесена до одного з тринадцяти виділених випадків і представлених на (рис. 2).

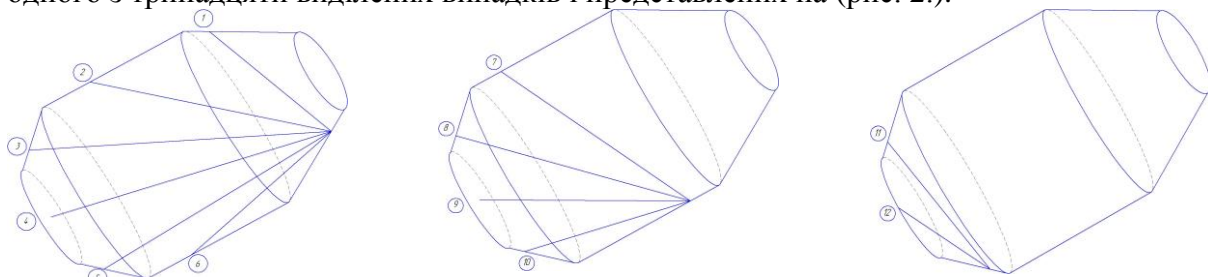


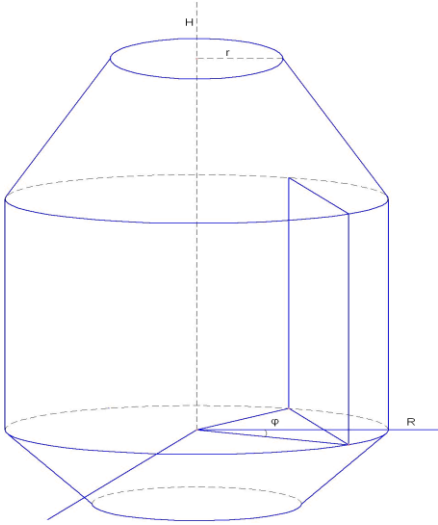
Рис.2. Класифікація конфігурацій об'ємів бетону в залежності від рівня заповнення і кута нахилу вісі міксерау.

1. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{03}, h_{08}]\}$
2. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{04}, h_{03}]\}$
3. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{02}, h_{04}]\}$
4. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{06}, h_{08}]\}$
5. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{07}, h_{03}]\}$
6. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{05}, h_{06}]\}$
7. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{04}, h_{03}]\}$
8. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{02}, h_{04}]\}$
9. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{07}, h_{03}]\}$
10. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{07}, h_{08}]\}$
11. $h \in \{[h_{07}, h_{06}] \cap [h_{02}, h_{04}]\}$
12. $h \in \{[h_{07}, h_{06}] \cap [h_{07}, h_{02}]\}$
13. Повне заповнення



4. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{07}, h_{02}]\}$ 9. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{07}, h_{02}]\}$
 5. $h \in \{[h_{05}, h_{01}] \cap [h_{06}, h_{07}]\}$ 10. $h \in \{[h_{06}, h_{05}] \cap [h_{06}, h_{07}]\}$

Найпростішим з виділених випадків є випадок, коли кут нахилу $\alpha = 0$.



Розглянемо конус у декартовій системі координат так, щоб його основа лежала у площині HOY , а вісь конуса співпадала з віссю OZ . Виберемо січну площину наступним чином. Нехай $x = x_0$ рівняння цієї площини, причому $0 < x_0 < \infty$. Ця площина ділить конус на дві частини. Для спрощення обчислень об'єму будемо застосовувати циліндричну систему координат. Через H позначимо висоту конуса, якщо його добудувати до повного конуса. Площа бічної поверхні конуса з основою $r < R$, буде дорівнювати: $z = H(1 - r/R)$ і рівняння основи конуса $z = 0$.

Для граничного випадку $z \in [0; H(1 - r/R)]$.

Опишемо сегмент, для якого розраховується об'єм тіла, що розглядається. Полярний кут. $\varphi \in [-\arccos(x_0/R); \arccos(x_0/R)]$

Визначимо границі для $r(\varphi)$. Значення верхньої границі очевидно – $r = R$, а нижня з геометричних міркувань буде рівною $r = x_0 / \cos(\varphi)$.

Об'єм заповнення ємкості можна знайти як потрійний інтеграл від r відносно визначених границь інтегрування:

$$z \in [0; H(1 - r/R)], r \in [x_0 / \cos(\varphi); R], \varphi \in [-\arccos(x_0/R); \arccos(x_0/R)].$$

Обчислення цього інтегралу буде зводитись до знаходження значень наступних виразів:

$$V = \frac{HR^2}{3} \arccos\left(\frac{x_0}{R}\right) - Hx_0^2 \int_{-\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)}^{\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)} \frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi)} + \frac{Hx_0^3}{3R} \int_{-\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)}^{\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)} \frac{d\varphi}{\cos^3(\varphi)}.$$

Так як підінтегральні функції парні, а границі інтегрування симетричні, то вираз для обчислення об'єму можна записати наступним чином:

$$V = \frac{HR^2}{3} \arccos\left(\frac{x_0}{R}\right) - Hx_0^2 2 \int_0^{\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)} \frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi)} + \frac{Hx_0^3}{3R} 2 \int_0^{\arccos\left(\frac{x_0}{R}\right)} \frac{d\varphi}{\cos^3(\varphi)}.$$

В інших дванадцяти випадках кут нахилу $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq \pi/2$. Необхідно відзначити, що для аналітичного представлення шуканого об'єму важливе значення мають наступні чотири випадки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi - \beta}{2} = \alpha \\ \frac{\pi - \beta}{2} \neq \alpha \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi - \gamma}{2} = \alpha \\ \frac{\pi - \gamma}{2} \neq \alpha \end{array} \right\},$$

так як при виконанні одного з цих співвідношень конічний переріз представляється гіперболою, а в інших випадках – еліпсами. При застосуванні чисельних методів

інтегрування та неявного завдання поверхонь, які обмежують шуканий об'єм, така диференціація є зайвою. Тому при визначенні рівнянь, які задають площину перерізу конусів та циліндричної частини змішувача будемо використовувати загальне рівняння кривих другого порядку.

Для прикладу, розглянемо випадок представлений на (рис. 4) і (рис.5.).

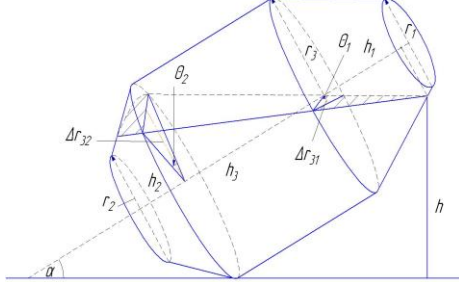


Рисунок 4. Об'ємна структура міксеру.

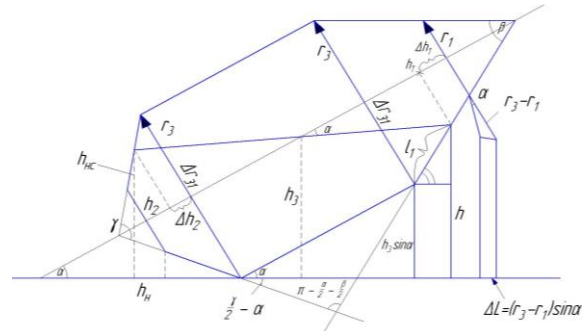


Рисунок 5. Площинна структура міксеру.

З геометричних співвідношень знаходимо висоту заповнення:

$$h_1 - \Delta h = \frac{h_1(h - h_3 \sin \alpha)}{\sqrt{(r_3 - r_1)^2 + h_1^2} \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)}$$

$$\Delta h_2 = \left(h - 2r_2 \cos \alpha - \sqrt{(r_3 - r_2)^2 + h_2^2} \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) \right) \sin \alpha$$

Звідки безпосередньо отримаємо формули, що пов'язують висоту заповнення з радіусами площини, яка є перерізом конуса:

$$\Delta r_{31} = \frac{\Delta h r_3 - (h_1 - \Delta h) h_1 \operatorname{tg} \alpha}{h_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \theta_1 = 2 \arccos \frac{\Delta r_{31}}{r_{31}},$$

$$\Delta r_{32} = \frac{(h_2 - \Delta h_2) r_3 + h_2 \Delta h_2 \operatorname{tg} \alpha}{h_2}, \quad \theta_2 = 2 \arccos \frac{\Delta r_{32}}{r_{32}}$$

Об'єм, який необхідно знайти можна представити як суму об'ємів, заключених в окремих складових полості: $V = V_1 + V_2 + V_3$,

де V_1 – об'єм заповненої частини верхнього зрізаного конуса;

V_2 – об'єм заповненої частини нижнього зрізаного конуса;

V_3 – об'єм заповненої частини циліндра.

Розглянемо верхній зрізаний конус (Рис. 6)

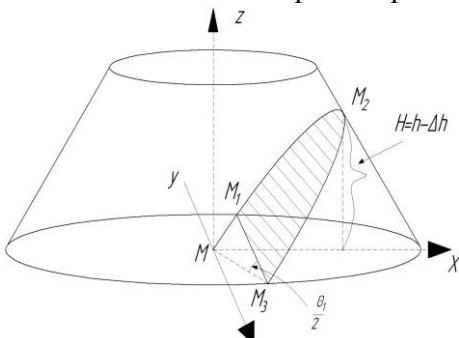


Рис. 6. Заповнення верхнього зрізаного конуса.

Січна площина проходить через три точки:

$$M_1 = \left(\Delta r_{31}; -\Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}; 0 \right),$$

$$M_2 = \left(r_3 - (h_1 - \Delta h) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; 0; h_1 - \Delta h \right),$$

$$M_3 = \left(\Delta r_{31}; \Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}; 0 \right).$$

Тоді шуканий об'єм можна записати як потрійний інтеграл по області Ω :

$$V_1 = \iiint_{\Omega} dx dy dz, \text{ де}$$



$$\Omega = \begin{cases} h_2 + h_3 \leq z \leq h_1 - \Delta h \\ x^2 + y^2 \leq r_3^2 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \left(z - r_3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^2 \leq 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x - r_3 + (h_1 - \Delta h) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & y & z - h_1 + \Delta h \\ \Delta r_{31} - r_3 + (h_1 - \Delta h) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & \Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & \Delta h - h_1 \\ \Delta r_{31} - r_3 + (h_1 - \Delta h) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & -\Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & \Delta h - h_1 \end{array} \right| \leq 0 \end{cases}$$

Об'єм нижнього зрізаного конуса позначимо як V_2 (рис.7):

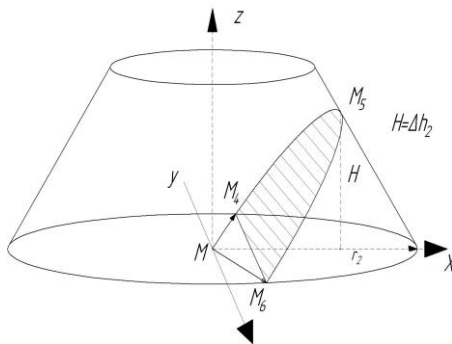


Рисунок 7. Заповнення нижнього зрізаного конуса.

$V_2 = V_{2n} - \Delta V_2$, де V_{2n} – повний об'єм нижнього зрізаного конуса, який обчислюється за формулою:

$$V_{2n} = \frac{\pi}{3} \left(r_3^3 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - r_2^2 \left(r_3 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - h_2 \right) \right)$$

Аналогічно до попереднього випадку, визначимо три точки через які проходить січна площина (Рис. 7)

$$M_4 = \left(\Delta r_{32}; -\Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}; 0 \right); M_5 = \left(r_3 - \Delta p_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; 0; \Delta h_2 \right); M_6 = \left(\Delta r_{32}; \Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}; 0 \right).$$

Тоді об'єм незаповненої частини нижнього зрізаного конуса можна записати теж як потрійний інтеграл по області $V_2 = \iiint_{\Omega} dx dy dz$, де область омега буде визначатись наступними співвідношеннями:

$$\Omega = \begin{cases} x^2 + y^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \left(z - r_3 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq r_3^2 \\ 0 \leq z \leq \Delta h_2 \\ \left| \begin{array}{ccc} x - r_3 + \Delta h_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} & y & z - \Delta h_2 \\ \Delta r_{32} - r_3 + \Delta h_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} & \Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & -\Delta h_2 \\ \Delta r_{32} - r_3 + \Delta h_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} & -\Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & -\Delta h_2 \end{array} \right| \leq 0 \end{cases}$$

Площа, що утворює переріз циліндра (Рис. 8) проходить через три точки:

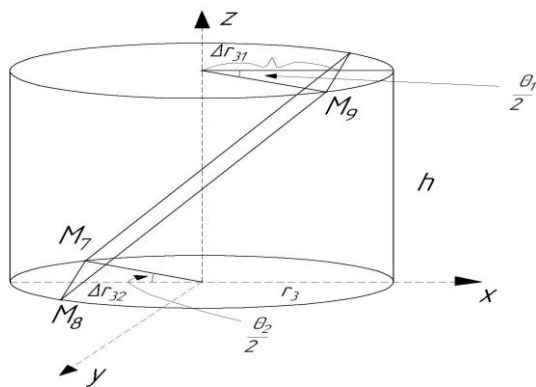


Рисунок 8. Заповнення циліндра.

$$M_7 = \left(-\Delta r_{32}; -\Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}; 0 \right),$$

$$M_8 = \left(-\Delta r_{32}; \Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}; 0 \right),$$

$$M_9 = \left(\Delta r_{31}; \Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}; h_3 \right).$$

Аналогічно, об'єм суміші, що заповнює циліндричну частину обчислюється за наступними співвідношеннями: $V_3 = \iiint_{\Omega} dx dy dz$, де

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq h_3 \\ x^2 + y^2 \leq r_3^2 \\ \left| \begin{array}{ccc|c} x + \Delta r_{32} & y + \Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & z & \\ 0 & 2\Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & 0 & \leq 0 \\ \Delta r_{31} + \Delta r_{32} & \Delta r_{31} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} + \Delta r_{32} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & h_3 & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Розглянутий випадок заповнення порожнини сумішшю є базовим. В усіх інших випадках об'єм заповнення можна знаходити за допомогою отриманих співвідношень з врахуванням додавання повністю заповнених фрагментів форми або відніманням об'єму незаповнених фрагментів.

За отриманими співвідношеннями можна побудувати ефективний обчислювальний алгоритм розв'язання поставленої задачі.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.:–Наука, 1965 г., 608 с.
2. Липман Берс Математический анализ. Том 2. М: –„Высшая школа”, 1975 г., 544 с. Метьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. Москва–Санкт-Петербург–Киев: Издательский дом Вильямс, 2001 г., 714 с.