Машини і обладнання технологічних процесів будівельної індустрії

УДК 621

І.І. Назаренко, д. т. н., професор (КНУБА)
М.Г. Кобижський, студент (КНУБА)

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ВІБРОМАШИН ПРИ ПРОХОДЖЕННІ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

Актуальність роботи. При пуску або зупинці вібраційної машини під час ущільнення бетонної суміші вона проходить через резонанс, оскільки пружинні опори на які спирається вібромашина розраховуються із умов віброізоляції, а вимушена частота значно перевищує власну частоту машини. При проходженні через резонанс виникають значні коливання, амплітуда яких в декілька разів перевищує необхідну за технологією величину. Тому актуальною є проблема встановлення цієї величини амплітуди коливань та оцінки впливу джерела енергії на рух системи.

Огляд літератури. Коливання пружної системи з однією ступінню волі вирішувалося декількома авторами. Рішення без врахування загасання приведене в роботі Л.Г. Лойцянського і А.І. Лурье [1]. Рішення задачі з урахуванням загасання було дане Люісом [2], а потім розвинене А.М. Кацом [3] для системи з однією ступінню волі. Для нелінійної системи з декількома ступенями волі є рішення отримане Ю.А.Мітропольським [4].

Методика та результати дослідження. Розглянемо проходження через резонанс системи з однією ступінню волі, а рішення задачі отримане в припущенні, що число обертів змінюється за лінійним законом, тобто миттєва частота $\omega' = \alpha t$. Розглянемо випадок коли амплітуда змушуючої сил *F* постійна, і для випадку, коли вона є функцією часу.

1. Амплітуда змушуючої сили постійна і частота її зростає.

Така ситуація можлива для кінематичних вібробудинків коливань. Рішення задачі зводиться до рішення рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{F_0}{M}\left(\frac{\alpha t^2}{2} + \varphi_0\right), \qquad (1)$$

де μ – коефіцієнт затухання;

F_0 – амплітуда обурюючої сили;

M – маса вібромашини із врахуванням маси бетону за методикою, що приведена в роботі [5];

c – жорсткість системи, яка визначається із умов віброізоляції (5);

$\omega^2 = \frac{c}{M}$, $\omega' = \alpha t$ - миттєва частота.

При початкових умовах $y(0) = y'(0) = 0$ з рівняння (1) будемо мати:

$$y(t) = \frac{F_0}{kM}\int_0^t e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} COS\left(\frac{\alpha t^2}{2} + \varphi_0\right) Sink(t-\tau) dt \ , \qquad (2)$$

де $k^2 = \omega^2 - \frac{\mu^2}{4}$.

Переходячи до показових функцій та вводячи змінні:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(\alpha t + k - \frac{\mu}{2} i\right), \ \upsilon = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(\alpha t - k - \frac{\mu}{2} i\right), \tag{3}$$

і зв'язані $\bar{u}, \bar{v}$ з рівняння (1,2) маємо:

$$y(t) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\frac{F_0}{Mk}\Bigg\{\exp[-i(kt-\psi)-v]\int_{u_0}^{u} e^{iu^2}du - \exp[i(kt-\psi)-v]\int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}} e^{-i\bar{u}^2}d\bar{u} -$$

$$-\exp[i(kt+\psi)+v]\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} e^{i\upsilon^2}d\upsilon + \exp[-i(kt+\psi)+v]\int_{\bar{\upsilon}_0}^{\bar{\upsilon}} e^{-i\bar{\upsilon}^2}d\upsilon\Bigg\} e^{-\frac{\mu}{2}t}. \tag{4}$$

Тут $u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0$ - початкові значення u, v для *t=0*:

$$\left.\begin{aligned} &u_0 = -\bar{\upsilon}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(k - \frac{\mu}{2} i\right), \ v_0 = -\bar{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(k + \frac{\mu}{2} i\right), \\ &\psi = \varphi_0 - \frac{k^2}{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{4\lambda^2}\right), \ v = \frac{\mu k}{2\alpha} = \lambda h^2, \ \lambda = \frac{k}{\mu}, \ h = \frac{\mu}{\sqrt{2\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Інтеграли які входять в рівняння (4) визначаються через інтеграли Френеля $\left(z = x + iy, \xi^2 = z\right)$ [1], які зв'язані з функцією Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} &C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\xi} COS\xi^2 d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \frac{COS\eta}{\sqrt{\eta}}d\eta = \frac{1}{2}\int_0^z J_{-\frac{1}{2}}(z)dz, \\ &S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\xi} Sin\xi^2 d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \frac{Sin\eta}{\sqrt{\eta}}d\eta = \frac{1}{2}\int_0^z J_{\frac{1}{2}}(z)dz. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тут $J_{\pm\frac{1}{2}}(z)$ - бессельові функції порядку $\pm\frac{1}{2}$.

Інтегрування будемо проводити в комплексній області для u, υ по контуру вздовж ломаної лінії, яка проходить через початок координат. Аргумент *z* повинен змінюватись в межах *-π, π*. Отже, коли $\alpha t - k < 0$, то замість υ беремо $\upsilon' = -\upsilon$. Наприклад $\int_{\bar{\upsilon}_0}^{\upsilon}\exp\left(i\bar{\upsilon}^2\right)d\bar{\upsilon}$, для котрого $R_e\bar{\upsilon}_0 < 0$, у випадку, коли $R_e\bar{\upsilon} > 0(\alpha t > k)$, визначається так:

$$\int_{\bar{\upsilon}_0}^{\bar{\upsilon}} e^{i\bar{\upsilon}^2}d\bar{\upsilon} = \int_{\bar{\upsilon}_0}^{0} e^{i\bar{\upsilon}^2}d\upsilon + \int_0^{\bar{\upsilon}} e^{i\bar{\upsilon}^2}d\bar{u} = \int_0^{-\bar{\upsilon}_0} e^{i\bar{u}^2}d(-\bar{\upsilon}) + \int_0^{\upsilon} e^{i\bar{\upsilon}^2}d\bar{\upsilon}.$$

В такому випадку при проходженні через резонанс із зростаючою частотою отримаємо переміщення:

$$y(t)=y_{st}\lambda_{\max}\sqrt{\frac{\pi}{2}}h\{e^{\delta_1}\left[\Phi(\gamma_1,\delta_1)-\Phi(\gamma_0,\delta_0)\right]\times Sin(kt-\psi)-e^{\delta_1}\left[\Psi(\gamma_1,\delta_1)-\Psi(\gamma_0,\delta_0)\right]\times$$
$$\times COS(kt-\psi)+e^{\delta_2}\left[\Phi(\gamma_2,\delta_2)sign(\xi-1)+\Phi(\gamma_0,-\delta_0)\right]Sin(kt+\psi)+$$
$$+e^{\delta_2}\left[\Psi(\gamma_2,\delta_2)sign(\xi-1)+\Psi(\gamma_0,-\delta_0)\right]\times COS(kt+\psi). \qquad (7)$$

Тут:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\gamma,\delta)&=R_eC-J_mS\\ \psi(\gamma,\delta)&=R_eS-J_mC\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

R_e – дійсна частина;

J_m – уявна $C(z)$, $S(z)$ та

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\frac{\alpha t}{k},\ sign(\xi-1)=\begin{cases}+1, \xi>1\\ -1, \xi<1\end{cases}\\ &y_{st}=\frac{F_0}{\omega^2M},\ \lambda_{\max}=\frac{\omega^2}{k\mu}=\frac{\omega}{k^2}\gamma,\ h=\frac{\mu}{\sqrt{2\alpha}}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k^2}{2\alpha}},\\ \text{позначимо: }&\gamma_1=h^2\left[\lambda^2(\xi+1)^2-\frac{1}{4}\right],\ \delta_1=-h^2\lambda(\xi+1),\\ &\gamma_2=h^2\left[\lambda^2(\xi-1)^2-\frac{1}{4}\right],\ \delta_2=-h^2\lambda(\xi-1),\\ &\gamma_2=h^2\left[\lambda^2-\frac{1}{4}\right],\ \delta_0=\delta_{10}=\delta_{-20}=-h^2\lambda=-v.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

2. Перехід через резонанс при змінній амплітуді змушуючої сили.

Для інерційних збудників амплітуду сили можна прийняти за законом:

$$F_0=P_0\left(\frac{\alpha t}{\omega}\right)^m. \qquad (10)$$

Інтеграл в рівнянні (2) в цьому випадку може бути виражений через функції Ломмеля. Для випадку $m=2$, коли діє відцентрова сила від незрівноваженої маси, значення інтеграла:

$$L(t)=\frac{\alpha^2}{\omega^2}\int_0^t\tau^2e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)}COS\left(\frac{\alpha\tau^2}{2}+\varphi_0\right)\times Sink(t-\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Вираховується за допомогою інтегрування по частинам:

$$L(t)=-\frac{k}{\omega^2}COS\left(\frac{\alpha\tau^2}{2}+\varphi_0\right)+\frac{1}{\omega^2}COS\varphi_0\left(\frac{\mu}{2}Sinkt-kCOSkt\right)e^{-\frac{\mu}{2}t}-$$

$$-\frac{\alpha}{\omega^2}e^{-\frac{\mu}{2}t}\int_0^t e^{\frac{\mu t}{2}}\left\{Sin\left(\frac{\alpha\tau^2}{2}+\varphi_0\right)\times Sink(t-\tau)-2COS\left(\frac{\alpha\tau^2}{2}+\varphi_0\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[(\varphi_0-\psi)\times Sink(t-\tau)+\nu COSu(t-\tau)\right]\right\}d\tau. \qquad (12)$$

Переходячи до показникових функцій, після розрахунків, отримаємо наступне рівняння:

$$y(t)=y_{st}\lambda_{\max}\sqrt{\frac{\pi}{2}}h\frac{\alpha}{\omega^2}\left\{\frac{2k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left[COS\varphi_0\left(\frac{\alpha t^2}{2}+\varphi_0\right)+COS\varphi_0\left(\frac{\mu}{2k}Sinkt-COSkt\right)e^{-\frac{\mu t}{2}}\right]+\right.$$
$$+e^{\delta_1}\left[\Phi(\gamma_1,\delta_1)-\Phi(\gamma_0,\delta_0)\right]\times\left[2(\psi-\varphi_0)Sin(kt-\psi)-(2\nu+1)COS(kt-\psi)\right]-$$
$$-e^{\delta_1}\left[\Psi(\gamma_1,\delta_1)-\Psi(\gamma_0,\delta_0)\right]\times\left[2(\psi-\varphi_0)COS(kt-\psi)+(2\nu+1)Sin(kt+\psi)\right]+$$
$$+e^{\delta_2}\left[\Phi(\gamma_2,\delta_2)sign(\xi-1)+\Phi(\gamma_0,-\delta_0)\right]\times\left[2(\psi-\varphi_0)Sin(kt+\psi)-(2\nu-1)COS(kt+\psi)\right]+$$
$$\left.+e^{\delta_2}\left[\Psi(\gamma_2,\delta_2)sign(\xi-1)+\Psi(\gamma_0,-\delta_0)\right]\times\left[2(\psi-\varphi_0)COS(kt+\varphi)+(2\nu-1)Sin(ky+\psi)\right]\right\}$$

Висновки.

1. Отримані аналітичні залежності, що дозволяють визначати амплітуду коливань вібромашини при проходженні її через резонанс для збудників коливань із частотнонезалежною і частотнозалежною амплітудою змушуючої сили.
2. Для практичного застосування формул, що визначають амплітуди коливань необхідно мати значення сил опору, що є задачею подальших досліджень.

Література

1. Л.Г. Лойцянський, А.И.Лурье. Теоретическая механка, ч.3. ГТТИ, 1934.
2. F.M. Lewis. Vibration During Acceleration Through a Critical Speed. Transactions of the ASME, vol. 54, N 23, p. 253, 1932. The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1932.
3. А.М. Кац. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, т.III, вып. 2. Изд. АН СССР, 1947.
4. Ю.А. Митропольский. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы. «Прикладная математика и механика», т. XIV. Изд. АН СССР, 1950.
5. І.І. Назаренко. Прикладні задачі теорії вібраційних машин. Навчальний посібник (2-ге видання). – К.:Видавничий дім «Слово», 2010.