УДК 539.3

Г.М. Іванченко, канд. техн. наук

ТРАНСФОРМАЦІЯ ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗМІННОЇ ЩІЛЬНОСТІ

Розглядається задача про перебудову фронту розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі. На основі променевого методу виведені розв’язувальні рівняння. Досліджено залежність геометрії променів і фронтів від функції зміни щільності середовища.

Співвідношення, що моделюють явища розповсюдження і біфуркації фронтів розривних хвиль в анізотропних пружних середовищах дають змогу досліджувати загальні закономірності впливу неоднорідностей фізичних властивостей середовищ на ефекти перебудови системи хвильових променів та фронтів. За допомогою результатів цих досліджень можна прогнозувати динамічні властивості пружних середовищ, в яких відбулись ці трансформування та визначити зони найбільших динамічних переміщень. Такі дослідження актуальні в задачах сейсмології, геологорозвідки та в деяких інших галузях. Розроблено багато методів математичного моделювання розривних явищ в пружних середовищах [1, 2]: аналітичні, чисельні, експериментальні та інші. Аналітичним методам надається перевага із-за їх точності, але вони вимагають залучення складного математичного апарату і громіздких викладок. Такі методи придатні для розв’язку задач з відносно простими геометрією, навантаженням та рівняннями стану середовища. Більш універсальними є чисельні методи, реалізація яких стала можливою порівняно недавно – з появою потужної обчислювальної техніки. Для розв’язку більш вузького класу задач – розповсюдження нестаціонарних розривних хвиль в пружних середовищах (саме ці задачі викликають практичний інтерес у названих галузях) – найпридатнішим виявляється один із асимптотичних методів – променевий метод [8], який дозволяє досліджувати не лише кінематику фронтів в межах нескінченного однорідного або шаруватого середовища, а й отримувати динамічну картину розповсюдження імпульсних хвиль.

Променеві методи, основані на методах геометричної оптики [6], успішно застосовуються у квантовій механіці, акустиці та при вивченні електромагнітних полів. Для них характерні попередні променеві побудови, які відображають якісну картину хвильового поля і надають можливість, використовуючи променеві ряди, визначати його кількісні характеристики. Метод променевих рядів особливо ефективний для дослідженні нестаціонарних розривних хвиль в пружних середовищах. Він дозволяє створювати прості математичні моделі процесів розповсюдження та перебудови стрибків параметрів польової функції.

Для однорідних ізотропних пружних середовищ, в яких швидкість розповсюдження розривної хвилі в усіх напрямках однакова і фронти розповсюджуються з точкового джерела, промені прямолінійні, сітка променів має найпростіший вигляд, а фронти, локально перпендикулярні до променів (як поздовжньої так і поперечної хвиль), до дифракції є сферичними. Після взаємодії фронту імпульсної хвилі навіть з плоскою межею розділу середовищ, котрі мають різні механічні властивості, сферичним залишається фронт лише однієї відображеної хвилі [3].

Більш складною є сітка фронтів та прямолінійних променів в анізотропних пружних середовищах постійної густини і параметрів анізотропії. Внаслідок наявності різним чином поляризованих хвиль, фазові швидкості яких залежать від напрямку руху, промені перестають бути ортогональними фронтам [4, 5], а при неоднорідному середовищі вони ще й втрачають прямолінійну геометрію. Слід зазначити, що побудовані за допомогою променевого методу система променів і фронтів хоч і не дозволяють визначити величини динамічних напружень, але за їх допомогою можна прослідкувати за картиною еволюції фронтів напружень та проявити зони їх концентрації.

Розглянемо в прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ неоднорідне трансверсально-ізотропне середовище з віссю симетрії Ox_2, яке характеризується тензором пружних постійних

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda-l & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де l, m, p – параметри анізотропії, які відрізняють середовище від ізотропного з коефіцієнтами Ламе λ і μ.

Найпростішим для розгляду є випадок, коли неоднорідність середовища полягає в підпорядкуванні його густини деякій функції координат $\rho=\rho(x_1,x_2,x_3)$.

Збурений стан середовища, що розглядається, виходячи з умов ідеальної пружності, описується рівняннями руху

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho(x_1, x_2, x_3)$ – приведені параметри пружності, u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних зміщень.

Розв’язок системи рівнянь (2) з відомими початковими умовами

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1, x_2, x_3, 0), \quad \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \vec{v}_0(x_1, x_2, x_3, 0) \qquad (3)$$

будується у вигляді плоскої монохроматичної хвилі із хвильовим числом k і фазовою швидкістю v, фронтами якої є поверхні постійних фаз [7]

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - vt = const, \qquad (4)$$

котрі рухаються зі швидкістю $\vec{v} = v \cdot \vec{n}$ та локально перпендикулярні до орту $\vec{n}$.

Для будь-якого вибраного напрямку $\vec{n}$ фазова швидкість хвилі v та вектор її поляризації $\vec{A}$ визначається із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [7]

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Розв’язуванням задачі на власні значення симетричної додатньовизначеної матриці коефіцієнтів системи (5)

$$\Lambda_{iq} \equiv \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p \quad (i, q = 1, 2, 3) \qquad (6)$$

для кожного напрямку $\vec{n}$ визначаються квадрати швидкостей трьох по різному поляризованих хвиль $\left[v^{(r)}\right]^2$, $r = 1, 2, 3$, та для кожного значення фазової швидкості компоненти вектора поляризації $\vec{A}$ хвилі, як власні вектори матриці (6). Для будь-якого напрямку $\vec{n}$ вектори поляризації мають задовольняти умови ортогоналізації

$$\vec{A}^{(i)}(\vec{n}) \cdot \vec{A}^{(k)}(\vec{n}) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Величини фазових швидкостей нумеруються в послідовності зменшення їх модулів. Хвиля, яка має найбільшу фазову швидкість та номер $r = 1$, називається квазіподовжньою. Дві інші, $r = 2, 3$ – квазіпоперечні, фронти яких, зрозуміло, завжди відстають від фронту квазіподовжньої хвилі.

В анізотропних середовищах крім фазової швидкості $\vec{v}$ викликає не менший інтерес променева швидкість $\vec{\xi}$ – швидкість розповсюдження енергії хвильового поля. Ці швидкості пов'язані співвідношенням

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{\xi}^{(r)}\right) = v^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3), \tag{8}$$

звідки видно, що променева швидкість за модулем більша від фазової або дорівнює її при співпаданні напрямків їх векторів.

Компоненти вектора променевої швидкості

$$\vec{\xi}^{(r)} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{(r)} \vec{i}_k \quad (r = 1, 2, 3) \tag{9}$$

обчислюється за формулою [7]

$$\xi_k^{(r)} = \frac{1}{v^{(r)}} \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (r, k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Поверхня фронту розривної хвилі з урахуванням (4) може бути представленою співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \tag{11}$$

де τ – функція, яка задовольняє диференційним рівнянням

$$\sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \tag{12}$$

тут позначено: $p_k \equiv \partial\tau / \partial x_k = n_k / v^{(r)}(\vec{n})$ – компоненти вектора рефракції [7].

Рівняння (12) за допомогою методу характеристик приводиться до системи звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{d\,x_m^{(r)}}{d\,\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq}\, p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$

$$\frac{d\,p_m^{(r)}}{d\,\tau} = \eta_m = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k\, p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},\ (r,\ m = 1, 2, 3) \qquad (13)$$

з початковими умовами

$$x_k^{(r)}\Big|_{t=0} = x_k^0,\quad p_k^{(r)}\Big|_{t=0} = \frac{n_k}{v_k^{(r)}}, \qquad (14)$$

інтегруючи які для послідовності зарані вибраних початкових напрямків можна побудувати сімейство m промені, вздовж яких у пружному анізотропному середовищі зі швидкостями $\vec{\xi}_m$ розповсюджується енергія хвильового поля.

Розглянемо випадки, коли розміри джерела, в якому збурюється хвиля, в порівнянні з геометрією її фронтів досить малі, що дозволятиме вважати його точкою. Помістимо в ній початок прямокутної системи координат $O\,x_1 x_2 x_3$, вісь $O\,x_2$ якої співпадатиме з віссю симетрії трансверсально-ізотропного середовища. Якщо густина середовища також розподіляється симетрично відносно осі $O\,x_2$, тобто задаватиметься функцією $\rho = \rho(x_1, x_2)$, то для дослідження еволюцій поверхонь фронтів розривної хвилі достатньо побудови їх перетинів будь-якою площиною, якій належить вісь $O\,x_2$ – тобто розв'язувати плоску задачу. Вибравши в площині розв'язку задачі деяку послідовність m напрямків фазових швидкостей хвилі певної поляризації, котрі визначаються векторами $\vec{n}_m^{(0)}$, для кожного з них будується матриця (6) та визначаються її власні числа і вектори. Для трансверсально-ізотропних пружних середовищ, густина яких має ту ж вісь симетрії, що і пружні константи, спрямована із площини малюнку фазова швидкість $v_m^{(3)}$, завжди дорівнює нулю. За значеннями інших існуючих фазових швидкостей $v_m^{(1)}, v_m^{(2)}$ обчислюються вектори поляризації та компоненти векторів рефракції. Часткові похідні приведених параметрів пружності по координатах $\partial\lambda\,(x_1, x_2)/\partial x_k$ для $k = 1, 2$ обчислюються аналітично або чисельно, залежно від виду функції $\lambda = c/\rho(x_1, x_2)$. Подальші дії полягають у визначенні для кожного напрямку $\vec{n}_m$ за формулами (13) величин $\xi_k^{(m)}$ і $\eta_k^{(m)}$ та чисельному їх інтегруванні за методом Рунге-Кутта. Отримані координати $x_k^{(m)}$ точок, які належать променям, дозволяють побудувати послідовність положень фронтів імпульсної розривної хвилі для прийнятих фіксованих значень параметра τ.

Лінійний закон зміни щільності середовища. Використовуючи описану методику, побудована еволюція фронтів імпульсних квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль, породжених в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі першої особливості – в доломіті з наступними величинами механічних параметрів: модуль пружності $E = 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}28$, параметрами анізотропії $l = -0{,}5$; $m = -0{,}1$; $p = 0{,}3$ та щільністю, яка змінює свою величину лише вздовж осі симетрії середовища за лінійним законом $\rho = \rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]$ кг/м^3, де ρ_0 – щільність середовища в місці ініціації розривної хвилі.

Рівняння динамічного руху (2) пружного середовища зі змінною функцією $\rho(x_2)$ приймуть форму

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} +$$

$$+ \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]^2} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,\, 2,\, 3). \quad (15)$$

Їм відповідають рівняння

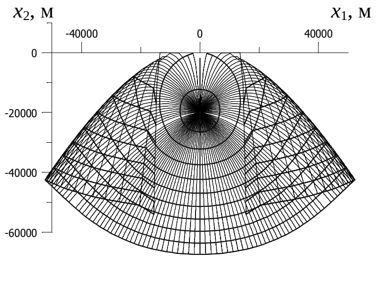
$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m = \sum_{i,p,q=1}^{3} \frac{c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]^2} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (16)$$

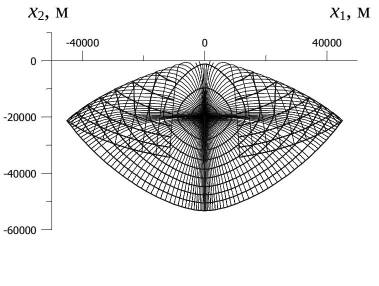
$(r,\, k = 1,\, 2,\, 3).$

Система (16) інтегрується методом, який описаний раніше.

При вибраних величинах E і ν значення параметрів Ламе у рівняннях (1) $\lambda = E\nu\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1} = 4{,}972\cdot 10^{10}\,Па$, $\mu = 0{,}5E(1+\nu)^{-1} = = 3{,}906\cdot 10^{10}\,\text{Па}$. Слід підкреслити, що задача, що розглядається, є модельною у зв'язку з тим, що при наближенні до прямої $x_2 = 0$ густина ρ прагне до нуля, а швидкості подовжніх і поперечних хвиль – до нескінченності, чого не буває на практиці. Тим не менш отримані результати мають практичний інтерес, тому що відображають загальні тенденції впливу зміни густини $\rho(x_1, x_2, x_3)$ на хвильові процеси. На рис. 1, а, б зображені сліди фронтів квазіподовжньої (а) і квазіпоперечної (б) розривних хвиль на площині $x_2 = 0$, яка містить вісь симетрії середовища, та сімейства променів на цій площині, вздовж яких переноситься енергія хвилі. Точкове джерело розривної хвилі має координати $x_1 = 0$, $x_2 = -2\cdot 10^4\,м$, $x_3 = 0$. Тривалість процесу $0 \le t \le 15$ с. В неоднорідних середовищах промені розривних хвиль, як видно на рисунках, виявляються криволінійними, тому, що швидкість розповсюдження імпульсного збурення частинок як за модулем, так і за напрямом, залежить від густини середовища. Промені відхиляються в бік згущення речовини і хвиля, не дійшовши вільного краю середовища при $x_2 = 0$ (де $\rho = 0$), змінює свій напрямок.



а



б

Рис. 1. Трансформування фронтів квазіподовжніх (а) і квазіпоперечних (б) розривних хвиль в трансверсально-ізотропному середовищі з $\lambda = 4{,}972\cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 3{,}906\cdot 10^{10}$ Па, щільністю $\rho = 6650\cdot\left[1 - 5\cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2\cdot 10^4\right)\right]$ кг/м^3 та параметрами анізотропії $l = 0{,}3$; $m = -0{,}5$; $p = -0{,}1$.

Система променів має спільну огинаючу, яка є каустикою. Нагадаємо, що на ній якобіан

$$J(\xi,\gamma,\eta)=\left(\vec{\rho}_1\left[\vec{\rho}_2\times\vec{\rho}_3\right]\right)=\begin{vmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{vmatrix} \tag{17}$$

переходу від декартової системи координат (x_1 x_2 x_3) до променевої системи (α β τ) і навпаки перетворюється в нуль. Тому на каустиках в рамках ідеальної теорії пружності значення динамічних напружень прагне до нескінченності.

Тригонометричний закон зміни щільності середовища. За методикою, описаною раніше, побудована сітка променів нерегулярних квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль, ініційованих в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі з такими величинами механічних параметрів: модуль пружності $E=10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}28$, параметрами анізотропії $l=0{,}3$; $m=-0{,}5$; $p=-0{,}1$ та густиною, величина якої змінюється вздовж осі симетрії середовища за законом $\rho=\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]$ кг/м^3, а в площинах, перпендикулярних осі симетрії середовища, вона має постійні значення.

Динамічні рівняння руху пружного середовища зі змінною функцією $\rho(x_2)$ в цьому випадку приймуть вигляд

$$\sum_{k,p,q=1}^{3}\frac{c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]}\;\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k\partial x_p}+$$

$$+\sum_{k,p,q=1}^{3}\frac{2{,}5\cdot10^{-3}\cdot\sin(5\cdot10^{-4}x_3)\cdot c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]^2}\;\frac{\partial u_q}{\partial x_p}-\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0\ (i=1,\,2,\,3), \tag{18}$$

котрим відповідають рівняння

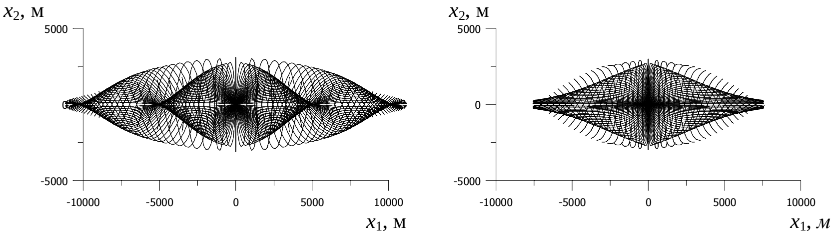
$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau}=\xi_m=\sum_{i,p,q=1}^{3}\frac{c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]}\;p_p A_q^{(r)}A_i^{(r)},$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau}=-\frac{1}{2}\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\frac{2{,}5\cdot10^{-3}\sin\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\cdot c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]^2}\;p_k p_p A_q^{(r)}A_i^{(r)} \tag{19}$$

$$(r,\,m=1,\,2,\,3).$$

Система рівнянь (19) чисельно інтегрується методом Рунге-Кутта.

При вибраних параметрах середовища (модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν) в матриці (1) пружних характеристик середовища коефіцієнти Ламе будуть $\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1} = 4{,}972 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0{,}5E(1+\nu)^{-1} = 3{,}906 \cdot 10^{10}$ Па. Задача, що розглядається тут, як і попередня, є модельною зважаючи на те, що при наближенні до площин $x_2 = \pm 2 \cdot 10^3 \cdot \arccos(-0{,}2)$ густина ρ прагне до нуля, а швидкості подовжніх і поперечних хвиль в середовищі – до нескінченності, що не може реалізуватись на практиці. Проте, отримані результати мають певний практичний інтерес, тому що відображають загальні закономірності впливу зміни густини на хвильові процеси в середовищі. Для середовища з $\rho_0 = 6650$ кг/м^3 на рис. 2, а, б зображені криволінійні промені квазіподовжньої (а) і квазіпоперечної (б) розривних хвиль на площині симетрії задачі $x_3 = 0$, вздовж яких переноситься енергія хвилі. Точкове джерело розривної хвилі розміщене в початку координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тривалість процесу поширення хвилі, зображеного на рисунках, складає $0 \le t \le 6{,}25$ с.



а *б*

Рис. 2. Сітка променів квазіподовжніх (а) і квазіпоперечних (б) розривних хвиль в трансверсально-ізотропному середовищі з $\lambda = 4{,}972 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 3{,}906 \cdot 10^{10}$ Па, щільністю $\rho = 6650 \cdot \left[1 + 5\cos\left(5 \cdot 10^{-4} x_2\right)\right]$ кг/м^3 та параметрами анізотропії $l = 0{,}3$; $m = -0{,}5$; $p = -0{,}1$.

В середовищах зі змінною густиною промені розривних хвиль, як видно на рисунках, є криволінійними, тому, що швидкість розповсюдження імпульсного збурення частинок за модулем і за напрямом залежить від густини середовища. Промені відхиляються в бік згущення речовини середовища і хвиля, не дійшовши до його вільного краю, де $\rho = 0$, змінює свій напрямок. Система променів розривної хвилі має спільну огинаючу – каустику. На ній якобіан переходу від декартової системи координат (x_1 x_2 x_3) до променевої координатної системи (α β τ) набуває нульового значення, тому (в рамках ідеальної теорії пружності) на каустиках значення напружень в середовищі прагне до нескінченності.

Автором досліджені видозміни фронтів квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль в трансверсально-ізотропних середовищах, щільність яких змінюється вздовж осі симетрії властивостей середовища лінійно або за тригонометричним законом та чисельно побудовані сітки криволінійних променів і послідовностість положень рухомих фронтів поширення розривних хвиль на площині симетрії трансверсально-ізотропних середовищ, які відрізняються особливостями, при змінних величинах параметрів анізотропії, котрі розміщуються на головній діагоналі матриці пружних характеристик середовища або входять до бічних елементів. Проведені дослідження виявили, що в пружних анізотропних середовищах зі змінними фізичними параметрами промені як квазіподовжних так і квазіпоперечних хвиль, що відходять від точкового джерела, стають криволінійними, а на поверхнях фронтів виникають додаткові викривлення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 456 с.
2. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
3. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М.* Дифракция сферической ударной волны на плоскости раздела упругих сред // Прикл мех. – 1997. – 33, №10 – С.51-58.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. матем. и мех. – 2000. – 64, №3. – С. 394-402.
5. *Іванченко Г.М.* Променевий метод побудови фронтів ударних хвиль в неоднорідних анізотропних середовищах // Опір матеріалів і теорія споруд. Вип. 69, 2001, с. 123-128.
6. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980 – 304 с.
7. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1990. – 280 с.
8. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – Киев.: Наукова думка, 1988. – 220 с.

Отримано 27.09.10

Иванченко Г.М.
ТРАНСФОРМАЦИЯ ФРОНТОВ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ
Рассматривается задача о перестройке фронта разрывной волны в неоднородной трансверсально-изотропной среде. На основе лучевого метода выведены разрешающие уравнения. Исследована зависимость геометри лучей и фронтов от функции изменения плотности среды.

Ivanchenko G.M.
TRANSFORMATION OF FRONTS OF DISCONTINUOUS WAVES IN THE ELASTIC MEDIUM OF VARIABLE DENSITY
The problem of disruptive wave rearrangement in nonhomogeneous transversely-isotropic medium is observed. Oriented on radial method, the resulting equations are derived. The characteristic curve of ray geometry and fronts from the function of environment density variance are investigated.