

## ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ МАКРОСТРУКТУРИ ПЛОСКИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ СТРУМИН

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна*

Уточнено розв'язок плоских напівобмежених струминних течій з урахуванням великомасштабних вихорів – клубів. Показано незначущість впливу якості апроксимації закону зміни швидкості у міжклубному шарі, що дозволяє суттєво спростити подальші дослідження в даному напрямку. Отримано збіг результатів з відомими дослідними даними. Припущення дають можливість аналітично вирішувати складні струминні течії.

**Постановка проблеми.** При вентиляції приміщень використовуються струминні течії, які настилаються на тверді поверхні. Недостатній розвиток теорії таких струмин призводить до потреби у складних експериментальних дослідженнях, що збільшує собівартість вентиляційних систем. Тому актуальною задачею є розробка підходів до аналітичного опису таких струмин.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Напівобмежені струмини складаються з двох примежових шарів: пристінного біля поверхні настилання та струминного. Одним з найбільш простих і ефективних підходів до аналітичного опису пристінних шарів є теорія професора кафедри теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури А.Я.Ткачука [1] за методом особливостей. Потік розглядається як потік ідеальної рідини, в якому присутні як «особливості» дрібні вихрові течії. Такий підхід полягає у безпосередньому описі дії вихорів замість використання понять «турбулентна в'язкість», «турбулентне число Прандтля» тощо. А.Я.Ткачук теоретично обґрунтував експериментальний степеневий закон розподілу швидкості пристінних турбулентних потоків:

$$u/u_n = (y/B_n)^n, \quad (1)$$

де  $u_n$  – максимальна швидкість у перерізі,  $B_n$  – відстань від точки перерізу з максимальною швидкістю до стінки. Продовження досліджень у цьому напрямку [2, 3, 4] є розгляд струминних примежових шарів як упорядкованої сукупності великомасштабних вихорів – клубів.

У роботі [2] було розглянуто аналіз структури (рис. 1) турбулентної струмини, що настилається на плоску поверхню. Основними структурними елементами течії є великомасштабні вихори – клуби. За аналогією до вільних струмин вони котяться подібно до колеса вільною межею з поступальною швидкістю  $w$  на осі клуба  $O$ . Клуби занурюються глибше лінії максимальних швидкостей (ЛМШ), що призводить до хвилеподібного

руху біля стінки. Якщо сполучити найближчі точки клубів до поверхні настилення, то отримаємо лінію розділу (ЛР) примежових шарів. Між нею та поверхнею настилення великомасштабних вихорів немає, тобто це – суто пристінний примежовий шар. Між ЛР та ЛМШ відбувається взаємодія шарів.

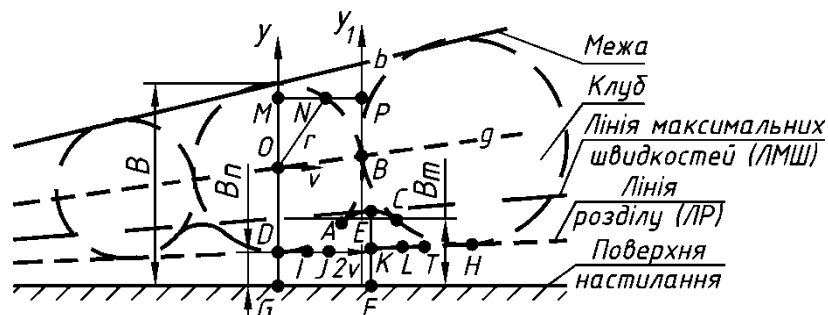


Рис. 1. Схема струмини

У перерізі завширшки  $B$  ордината  $y$  відраховується від поверхні настилення. Шляхом аналізу швидкостей повітря у криволінійній фігурі  $DEFG$  у роботі [2] отримано співвідношення між ординатами ЛР ( $B_n$ ) та ЛМШ ( $B_m$ ):  $B_n/B_m = 1/2$ . Профіль усередненої проекції швидкості повітря на поверхню настилення  $\bar{u}$  отримано шляхом усереднення швидкості в діапазоні, що містить половину клуба 1 – між осями  $y$  та  $y_1$ :

$$\bar{u}_x = (\bar{u}_{x,k} \cdot |MN| + \bar{u}_{x,m} \cdot (|MP| - |MN|)) / |MP| = u_{x,k} + u_{x,m}, \quad (2)$$

де  $\bar{u}_{x,k}$  та  $\bar{u}_{x,m}$  – середні проекції швидкості повітря у клубі 1 та міжклубному примежовому шарі 2 на поверхню настилення;  $|MN|$  та  $|MP|$  – довжини відрізків  $MN$  та  $MP$ ;  $u_{x,k} = \bar{u}_{x,k} \cdot |MN|/|MP|$  та  $u_{x,m} = \bar{u}_{x,m} \cdot (|MP| - |MN|)/|MP|$  – складові середньої швидкості у клубі та міжклубному шарі.

Середня проекція швидкості повітря на вісь  $x$  в межах клуба  $\bar{u}_{x,k}$  подібно до колеса лінійно залежить від ординати  $y$ . Довжина відрізка  $MP$  – це радіус клуба, довжина відрізка  $|MN|$  визначена з трикутника  $MNO$ . Таким чином отримано складову середньої швидкості за клубом

$$u_{x,k} = \bar{u}_{x,k} |MN|/|MP| = 4w(B-y)((B-y)(y-B_n))^{1/2}/(B-B_n)^2, \quad (3)$$

У міжклубному шарі між лініями  $b$  і  $g$   $(B+B_n)/2 < y < B$  відбувається підтікання повітря до клубів проти осі  $y$  (за аналогією до вільних струмин), тому  $u_{x,m} = 0$ . У криволінійному трикутнику  $DBH$  задача визначення проекції швидкості виявилася більш складною. Об'єм повітря «замкнений» клубами. Розриви тангенціальної складової швидкості на межах клубів за теорією А.Я.Ткачука моделюються тонкими вихровими прошарками. Їхня другорядна роль у розвитку струмини очевидна з урахуванням малих розмірів та енергії. Тому у роботі [2] цю складну течію замінено апроксимаційним законом  $\bar{u}_{x,m} = wV(y)$ .

Тоді складова швидкості за міжклубним шаром отримана у вигляді:

$$u_{x,m} = \bar{u}_{x,m}(|MP| - |MN|)/|MP| = w(1 - 2((B - y)(y - B_n))^{1/2}(B - B_n)^{-1})V(y). \quad (4)$$

Закон  $V(y)$  у роботі [2] прийнято найбільш простим – лінійним. Значення швидкості  $\bar{u}_{x,m}$  біля точки  $B$  отримано в кілька разів завищеним. Оскільки в цьому місці ширина міжклубного шару близька до нуля, то похибка профілю швидкості очікувалася не більшою за 3...5%. Слід аналітично перевірити цю похибку.

**Формулювання цілей та завдання статті.** Метою даної роботи є уточнення запропонованого у роботі [2] підходу до аналізу структури напівобмежених струмин і перевірка допустимості застосування грубих інтерполяцій до міжструминного шару. У подальшому це дозволить спростити вирішення складних струминних течій при вентиляції приміщень різного призначення.

**Основна частина.** Уточнимо отримані результати шляхом використання більш адекватного квадратичного закону:

$$V = a(y/B)^2 + b(y/B) + c. \quad (5)$$

Коефіцієнти апроксимації  $a$ ,  $b$  та  $c$  знайдемо з двох очевидних умов: перша – у точці  $B$  при  $y = (B + B_n)/2$  швидкість дорівнює  $w$ , тобто  $V = 1$ ; друга – гладкість профілю швидкості. Похідна профілю швидкості:

$$d\bar{u}_x/dy = (\bar{u}'_{x,k} \cdot |MN| + \bar{u}_{x,k} \cdot |MN|' - \bar{u}'_{x,m} \cdot |MN| - \bar{u}_{x,m} \cdot |MN|' + \bar{u}'_{x,m} \cdot |MP|)/|MP| \quad (6)$$

Аналіз похідної [2] показав: у точці  $B$  профіль гладкий за будь-якого скінченного значення  $V$  при скінченній похідній  $dV/dy$ . Гладкість на ЛР ( $y = (B+B_n)/2$ ) зводиться до двох умов:  $V = 2$ ,  $(d\bar{u}_x/dy)|_{y=B_n} = wdV(y)/dy$ . За формулами (1) та (6) за умови неперервності профілю:

$$u_x = wV_n(y/B_n)^n, \quad (d\bar{u}_x/dy)|_{y=B_n} = wnV_n/B_n \quad (7)$$

Цим умовам відповідають коефіцієнти:

$$a = -4B^2 \frac{nB + B_n(1-n)}{B_n(B - B_n)^2}, \quad b = 2B \frac{n(B + B_n)^2 + 4B_n^2(1-n)}{B_n(B - B_n)^2},$$

$$c = 2 \left( (B^2 - B_n^2)(1-n) - 2B_n B \right) / (B - B_n)^2. \quad (8)$$

За формулами (1), (2), (3), (4), (5), (7) та (8) після перетворень з введенням відносних величин  $\hat{u} = u/u_m$ ,  $\hat{w} = w/u_m$ ,  $\hat{y} = y/B$ ,  $\hat{B}_n = B_n/B$ :

$$\frac{\hat{u}}{\hat{w}} = \begin{cases} 4\sqrt{(\hat{y} - \hat{B}_n)(1 - \hat{y})^3} / (1 - \hat{B}_n)^2 \text{ при } (1 + \hat{B}_n)/2 \leq \hat{y} \leq 1; \\ \frac{4\sqrt{(\hat{y} - \hat{B}_n)(1 - \hat{y})^3}}{(1 - \hat{B}_n)^2} + \left(1 - \frac{2\sqrt{(1 - \hat{y})(\hat{y} - \hat{B}_n)}}{1 - \hat{B}_n}\right)(a\hat{y}^2 + b\hat{y} + c) \text{ при } \hat{B}_n < \hat{y} < \frac{1 + \hat{B}_n}{2}; \\ 2(\hat{y}/\hat{B}_n)^n \text{ при } 0 \leq \hat{y} \leq \hat{B}_n. \end{cases} \quad (9)$$

Введені відносні величини не перевищують одиниці.

Виконуємо пошук максимуму функції (9), щоб виразити швидкість  $w$  через  $u_m$ . При  $(1 + \hat{B}_n)/2 \leq \hat{y} < 1$  та  $0 < \hat{y} \leq \hat{B}_n$  та  $n < 1$  похідна функції (9) не має коренів та розривів. При  $\hat{B}_n < \hat{y} < (1 + \hat{B}_n)/2$  похідна неперервна та набуває достатньо громіздкого вигляду. Подальший аналіз виконаємо чисельно при двох варіантах показника степеню  $n$ . Приймаємо показник степеню за відомим законом однієї сьомої  $n = 1/7$ . Шляхом підрахунку похідної  $(d\hat{u}/\hat{w})/d\hat{y}$  впевнюємося в наявності одного кореню  $B_m = y_m(B_n)$ . Далі виконуємо чисельне розв'язання рівняння  $\hat{y}_m(\hat{B}_n) = 2\hat{B}_n$ . Отримуємо значення  $\hat{B}_n = 0,0482$ ,  $\hat{B}_m = 0,0963$ , що відповідає дослідним даним Фертмана ( $\hat{B}_m \approx 0,1$ ). Також  $\hat{w} = 0,4775$ ,  $\hat{y}_{1/2} = 0,5017$ . Підставляємо отримані значення у рівняння (9) і отримуємо (рис. 2):

$$\hat{u} = \begin{cases} 2,108\sqrt{(\hat{y} - 0,0482)(1 - \hat{y})^3} \text{ при } 0,524 \leq \hat{y} \leq 1; \\ 2,108\sqrt{(\hat{y} - 0,0482)(1 - \hat{y})^3} - 8,06(1 - 2,101\sqrt{(1 - \hat{y})(\hat{y} - 0,0482)}) \times \\ \quad \times (\hat{y} - 0,6103)(\hat{y} + 0,1626) \text{ при } 0,0482 < \hat{y} < 0,524; \\ 1,473\hat{y}^{1/7} \text{ при } 0 \leq \hat{y} \leq 0,0482. \end{cases} \quad (10)$$

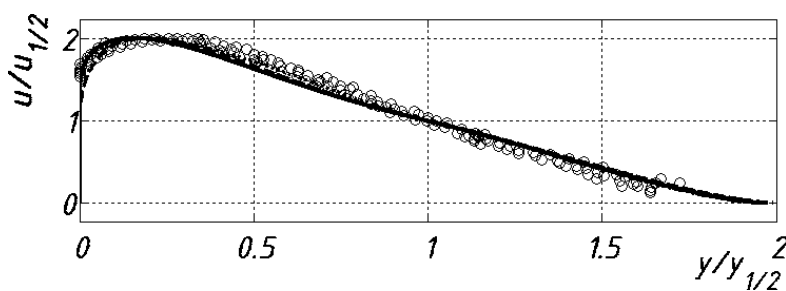


Рис. 2. Профілі швидкості. Суцільна лінія – при  $n=1/12$ , пунктир – при  $n=1/7$ , точкова лінія – за даними [2], кола – дослідні дані [5].

Приймаємо рекомендований для напівобмежених струмин показник степеню  $n = 1/12$ . Аналогічно отримуємо  $\hat{B}_n = 0,0394$ ,  $\hat{B}_m = 0,0788$  (відповідає дослідним даним Фертмана:  $\hat{B}_m \approx 0,1$ ),  $\hat{w} = 0,4865$ ,  $\hat{y}_{1/2} = 0,5063$ . Підставляємо отримані значення у рівняння (9) і отримуємо (рис. 2):

$$\hat{u} = \begin{cases} 2,109\sqrt{(\hat{y} - 0,0394)(1 - \hat{y})^3} \text{ при } 0,52 \leq \hat{y} \leq 1; \\ 2,109\sqrt{(\hat{y} - 0,0394)(1 - \hat{y})^3} - 6,39(1 - 2,082\sqrt{(1 - \hat{y})(\hat{y} - 0,0394)}) \times \\ \quad \times (\hat{y} - 0,6224)(\hat{y} + 0,2217) \text{ при } 0,0394 < \hat{y} < 0,52; \\ 1,274\hat{y}^n \text{ при } 0 \leq \hat{y} \leq 0,0394 \end{cases} \quad (11)$$

Похибка інтегральних характеристик профілю (табл. 1) відповідає похибкам експериментів, тому висловлені гіпотези є адекватними. Табл. 1 дозволяє зробити важливий висновок, який спрощує аналіз структури примежового шару у подальшій роботі. Оскільки суттєве уточнення апроксимаційного закону  $V$  дало незначне уточнення профілю швидкості – до 3%, то використання грубих апроксимацій закону  $V$  є виправданим спрощенням.

Таблиця 1

Інтегральні характеристики перерізу

Струминний шар		Сте- пінь $n$ у при- стін- ному шарі	Коефіцієнт (чисельник) / розбіжність у відсотках (знаменник)		
профіль	формула		поля швид- кості $k =$ $= \int_0^1 \hat{u}(\hat{y}) d\hat{y}$	Бусинеска $\beta = (1/k^2) \times$ $\times \int_0^1 \hat{u}^2(\hat{y}) d\hat{y}$	Кориолісса $\alpha = (1/k^3) \times$ $\times \int_0^1 \hat{u}^3(\hat{y}) d\hat{y}$
Отрима- ний	(10)	1/12	0,5125 / 0,00	1,3981 / 0,00	2,1957 / 0,00
		1/7	0,5097 / 0,55	1,4001 / 0,14	2,2046 / 0,40
Лінійна апрокс.	[2]	1/12	0,5251 / <b>2,40</b>	1,3989 / <b>0,06</b>	2,1900 / <b>0,26</b>
		1/7	0,5242 / <b>2,23</b>	1,3995 / <b>0,10</b>	2,1923 / <b>0,16</b>
Шліх- тинга	$u/u_m = (1 - (y/B)^{3/2})^2$	1/12	0,4973 / 3,06	1,4950 / 6,48	2,4843 / 11,6
		1/7	0,4925 / 4,06	1,4916 / 6,27	2,4741 / 11,2
Грімїт- ліна	$u/u_m = e^{-0,7(y/y_{1/2})^2}$	1/12	0,5256 / <b>2,49</b>	1,4192 / <b>1,49</b>	2,2735 / <b>3,42</b>
		1/7	0,5208 / <b>1,59</b>	1,4163 / <b>1,29</b>	2,2663 / <b>2,12</b>
Рейхар- дта	$u/u_m = e^{-0,5(y/0,082x)^2}$	1/12	0,5127 / 0,04	1,4568 / 4,03	2,3942 / 8,29
		1/7	0,5079 / 0,90	1,4538 / 3,83	2,3865 / 7,99

### Висновки

1. Для плоских напівобмежених струмин шляхом геометричного аналізу макроструктури потоку отримані залежності для профілю швидкості.
2. Доведено незначний вплив закону зміни швидкості у міжклубному шарі на профіль усередненої швидкості. Це дозволяє спростити геометричний аналіз у подальшій роботі.

**Перспективи подальших досліджень.** Отримані припущення мають бути використані для опуклих та гнутих напівобмежених струмин. Далі

з'являється можливість аналітично вирішувати складні струминні течії, які до цього досліджувалися лише експериментально.

### ЛІТЕРАТУРА

1. **Ткачук** А.Я., Довгалюк В.Б. Аеродинаміка вентиляції: Навчальний посібник. – ІВНВКП «Укреліотех», 2009. – 376 с.
2. **Мілейковський** В.О. Геометричне аналіз структури плоских напівобмежених струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 87. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко.–К.:КНУБА, 2011 р.– 490с. – С. 275-280.
3. **Мілейковський** В.О. Геометричне моделювання плоских напівобмежених струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко.–К.:КНУБА, 2010 р.– 472с. – С.187-191.
4. **Мілейковський** В.О. Геометричне обґрунтування профілю швидкості в струминних примежових шарах // Будівництво України. №1 2010 р. - С.17-20.
5. **Вулис** Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. – М.:Наука, 1965. – 432 с.

Уточнено решение плоских полуограниченных струйных течений с учетом крупномасштабных вихрей – клубов. Показано не значимость влияния качества аппроксимации закона изменения скорости в межклубном слое, что позволяет существенно упростить дальнейшие исследования в данном направлении. Получено совпадение результатов с известными опытными данными. Допущения дадут возможность аналитически решать сложные струйные течения.

We improve the solution of flat semirestricted jet flows taking into account the large-scale vortices – puffs. It is shown, that quality of approximation of the velocity change law in an interpuff layer does not effect on a velocity profile. It allows simplifying essentially the further researches in the given direction. Coincidence of results to known empirical data is obtained. Assumptions will give the opportunity to solve difficult jet flows analytically.