

УДК 539.375

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук.,
Сахаров О.С., д-р техн. наук,
Шкриль О.О.

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ J -ІНТЕГРАЛА ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розроблена нова методика обчислення величини J -інтеграла Черепанова-Райса на основі метода скінчених елементів (МСЕ), проведена її реалізація в межах напіваналітичного варіанта МСЕ, показана вірогідність і ефективність застосування для просторових задач механіки руйнування.

Вступ. Інваріантні інтеграли є основними критеріальними параметрами механіки руйнування [3], які дозволяють розглядати широке коло задач про деформування тіл з тріщинами. Найбільш широко застосованим є J -інтеграл Черепанова-Райса [4, 15]. Експериментальні методи визначення J -інтеграла розглянуті в роботах [6, 7, 13, 25]. Розробка загальних підходів до розв'язання просторових задач механіки руйнування вимагає залучення чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ).

Проблема визначення величини J -інтеграла на основі МСЕ розглянута в низці наукових публікацій [3, 6, 9–11, 13, 14, 16–25 та ін.]. Для визначення J -інтеграла використовується підхід, що ґрунтується на його безпосередньому обчисленні по контуру (для двовимірних задач) [14, 18] або по поверхні інтегрування, що охоплює фронт тріщини (для тривимірних задач) [21], а також методи обчислення J -інтеграла по області [3, 9, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24]. Загальною рисою згаданих методів є використання співвідношень, що містять величини напружень і градієнти переміщень. Для просторових задач обчислення J -інтеграла із використанням зазначених підходів є досить складною задачею. При цьому, при розробці відповідних алгоритмів автори накладають певні обмеження на форму і розміри області інтегрування: так, в роботі [3] пропонується обирати область інтегрування у вигляді малої трубки, що суперечить теоретичним положенням про інваріантність J -інтеграла відносно області інтегрування. Крім того, в літературі наявні дані про неінваріантність визначеної шляхом обчислення вздовж контура на

основі МСЕ величини J -інтеграла [10, 11, 14]. Зазначені висновки зроблені на основі аналізу результатів розв'язання двовимірних задач.

Таким чином актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла є створення ефективних методик обчислення J -інтеграла в просторовій постановці, зокрема із урахуванням особливостей побудови дискретних скінченоелементних моделей, та дослідження вірогідності і ефективності їх застосування в просторових задачах механіки руйнування.

Значна кількість відповідальних елементів конструкцій в різних галузях техніки являє собою просторові призматичні тіла складної форми, що знаходяться під впливом довільно розподілених у просторі навантажень, і містять початкові тріщини. Ефективним засобом скінченоелементної апроксимації об'єктів зазначеного класу в задачах механіки деформівних тіл є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) [1], область застосування якого до теперішнього часу поширена і на задачі механіки руйнування [2].

Метою даної роботи є розробка і реалізація в межах НМСЕ методики визначення J -інтеграла Черепанова-Райса, що ґрунтується на використанні величин напружень і градієнтів переміщень, дослідження вірогідності цього підходу при розв'язанні просторових задач механіки руйнування, а також розробка нової узагальненої методики обчислення J -інтеграла, орієнтованої на дискретне подання параметрів напружено-деформованого стану в межах процедури розв'язання задачі МСЕ та перевірка її вірогідності.

Вихідні співвідношення механіки руйнування. У загальному випадку для оцінки тріщиностійкості і визначення несучої здатності тіл з тріщинами використовується J -інтеграл Черепанова-Райса, розподілення якого вздовж фронту тріщини при довільному розподіленні зовнішніх впливів є нерівномірним.

Величина J -інтеграла характеризує щільність енергії W , що звільнюється при збільшенні довжини тріщини на $\partial\ell$ [3]:

$$J = -\frac{\partial W}{\partial \ell}, \quad (1)$$

де W – енергія деформування об'єму V , $\partial\ell$ – нескінченно малий приріст довжини тріщини.

В кожній точці фронту тріщини величина J -інтеграла обчислюється за довільною поверхнею F , що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір Δ вздовж фронту тріщини (рис. 1). При цьому для обчислення J -інтеграла використовується вираз,

отриманий на основі гіпотез про суцільність середовища, де розповсюджується тріщина, і співвідношень теорії пружності:

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left(W n_t - \bar{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot (\hat{\nabla} u)^T \cdot \bar{t} \right) dF, \quad (2)$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}, \quad \text{при пружному деформуванні } W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad \hat{\sigma} - \text{тензор}$$

напружень, $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій, \bar{n} – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування F ; \bar{t} – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронту, де обчислюється J -інтеграл; n_t – проекція нормалі \bar{n} на напрямок вектора \bar{t} ; $\hat{\nabla} u$ – градієнт переміщень.

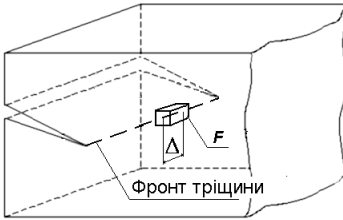


Рис. 1. Поверхня інтегрування

Згідно з [15] величина J -інтеграла є інваріантною відносно контура інтегрування, що дозволяє використовувати його для формулювання критерія руйнування у вигляді

$$J \leq J_{lc},$$

де J_{lc} – величина, що визначається

експериментально згідно з [14].

Скінченоелементна дискретизація просторових тіл з тріщинами на основі НМСЕ. НМСЕ являє собою ефективну модифікацію МСЕ, що ґрунтується на об'єднанні МСЕ із методом розділення змінних. Згідно із загальною концепцією НМСЕ подання невідомих величин переміщень здійснюється шляхом їх розкладення вздовж однієї характерної координати z^3 за системою безперервних гладких базисних функцій. В площині поперечного перерізу тіла $z^1 - z^2$ здійснюється скінчено-елементна дискретизація тіла. При цьому в напрямку z^3 застосовується один скінчений елемент (СЕ), форма якого визначається особливостями конфігурації досліджуваного об'єкта [1].

В даній роботі розглядаються призматичні неоднорідні тіла. Для опису геометрії і зовнішніх впливів застосовується базисна декартова система координат z^i . Фізико-механічні характеристики тіла залежать від просторових координат; $q_k(z^i)$ – довільно розподілені у просторі навантаження. В залежності від розташування фронту тріщини відносно

вісі z^3 виділяють тіла з поперечними і поздовжніми тріщинами [2]. Скінченоелементна дискретизація зазначених об'єктів наведена на рис. 2.

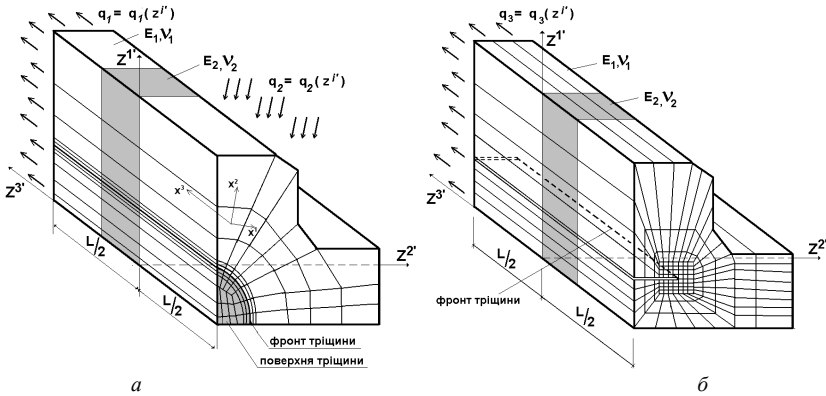


Рис. 2. Призматичні неоднорідні тіла із поперечною (а) і поздовжньою (б) тріщинами

Алгоритм розв'язання систем рівнянь НМСЕ. Розв'язання систем рівнянь великої розмірності є найбільш трудомістким етапом розв'язання задач механіки деформованого твердого тіла на основі МСЕ. У загальному випадку система рівнянь МСЕ може бути подана у вигляді:

$$[K]\{u\} = \{P\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості системи; $\{u\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень; $\{P\}$ – вектор вузлових навантажень.

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладу за системою базисних функцій Ψ^l :

$$u_{k'} = \sum_{l=0}^L U_{k',l} \Psi^l, \quad \{Q_l\}^m = \int_{-1}^1 Q_m \Psi^l \sqrt{g} dx^3, \quad (3)$$

вектори переміщень, вузлових навантажень, вузлових реакцій $\{R\}$ і матриця жорсткості набувають блочної структури. В зв'язку з цим для розв'язання отриманої системи рівнянь НМСЕ раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів. Відповідно, на кожній ітерації n кроку m для розв'язання системи рівнянь НМСЕ застосовується алгоритм [1, 2]:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m), \quad (4)$$

де β – параметр релаксації, $1 < \beta < 2$.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left(\{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \varepsilon \sum_{l=0}^L \left(\{ u \}_l^n \right)^2 . \quad (5)$$

де ε – точність розв’язання системи рівнянь, $\varepsilon = 10^{-2} \dots 10^{-4}$.

Для доведення ефективності запропонованого алгоритму в задачах механіки руйнування розглянуто тестову задачу про деформування просторового призматичного тіла з боковою тріщиною, під впливом розтягуючого навантаження, розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ для якого наведені на рис. 3. Проведені дослідження збіжності величини переміщення u^1 у вузлі K , розташованому перед фронтом тріщини в площинах $z^3 = 0$ (всередині тіла) і $z^3 = \pm 1$ (на бічній поверхні) засвідчили, що похибка визначення переміщення в межах 2% досягається вже при $\varepsilon = 10^{-2}$ при кількості ітерацій $N=4$.

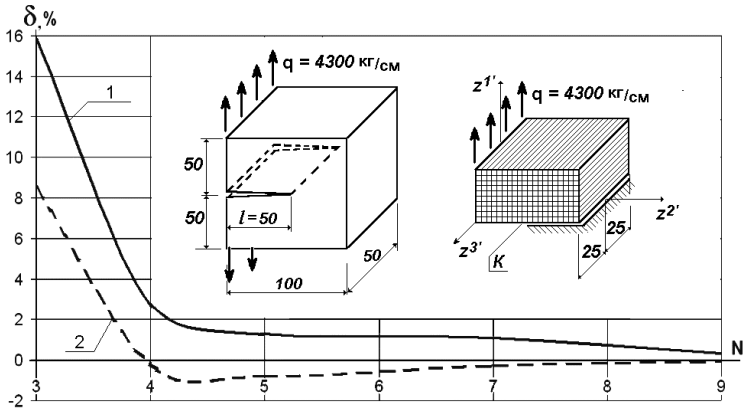


Рис. 3. Призматичне тіло з боковою тріщиною: розрахункова схема, дискретна модель НМСЕ і збіжність результатів розв’язання задачі на основі алгоритма (4)–(5): 1 – $z^3 = \pm 1$; 2 – $z^3 = 0$

Методика обчислення J -інтеграла на основі НМСЕ за величинами напружень і градієнтів переміщень. Зважаючи на скінченоелементну дискретизацію об’єкта, згідно із наданими в [15] рекомендаціями, поверхню інтегрування F (див. рис. 1) доцільно обрати у формі призми, що охоплює фронт тріщини. Вигляд поверхні інтегрування для

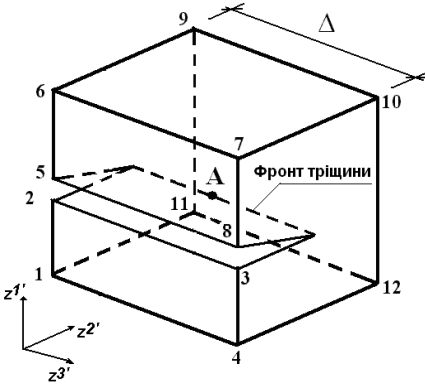


Рис. 4. Поверхня інтегрування призматичної форми для тіл з поздовжніми тріщинами

поздовжньої тріщини подано на рис. 4. Необхідно зазначити, що для випадку поперечної тріщини розташування поверхні інтегрування відносно базисної системи координат може змінюватись (величина Δ буде вимірюватись в площині $z^1 - z^2$).

Поверхня для обчислення J -інтеграла в околі кожної з точок фронту тріщини буде складатися з контурної ($F_k = F_{1,2,3,4} + F_{5,6,7,8} + F_{6,7,9,10} + F_{9,10,11,12} + F_{1,4,11,12}$) та

двох бічних ($F_1 = F_{4,7,10,12}$ і $F_2 = F_{1,6,9,11}$) поверхонь. Відповідно, J -інтеграл може бути поданим сумою складових по цим поверхням:

$$J = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k} + J_{F_1} + J_{F_2}). \quad (6)$$

Подано компоненти тензора напружень, градієнтів переміщень, а також компоненти нормалі \vec{t} і її проекції n_t в місцевій системі координат:

$$\sigma = \sigma^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad \nabla u = \zeta_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j,$$

$$\bar{n} = n_i \bar{e}^i, \quad \vec{t} = t^s \bar{e}_s,$$

$$\bar{n} \cdot \sigma \cdot (\nabla u)^T \vec{t} = n_i \bar{e}^i \cdot \sigma^{mn} \bar{e}_m \bar{e}_n \cdot \zeta_{kl} \bar{e}^k \bar{e}^l \cdot t^s \bar{e}_s = n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l.$$

Таким чином отримуємо покомпонентний вираз для обчислення J -інтеграла в місцевій системі координат):

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left(W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l \right) dF. \quad (7)$$

При скінчено-елементному обчисленні J -інтеграла за формулою (7) для виконання інтегрування обирається контур S , який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини. В місцевій системі координат контур має прямокутну форму і проходить через центри СЕ. В

межах кожного елемента інтегрування здійснюється за віссю, вздовж якої контур перетинає СЕ. У межах тих СЕ, що містять кутові точки контуру, інтегрування проводиться за двома ділянками, що відповідають напрямкам осей із урахуванням відповідних проекцій нормалі до контуру \vec{n} на вектор напрямку розвитку тріщини \vec{t} . Такий контур для випадку поздовжньої тріщини показаний на рис. 5.

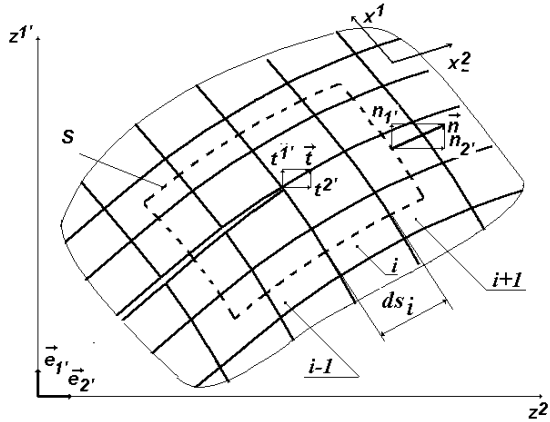


Рис. 5. Контур для обчислення J -інтеграла на дискретній моделі МСЕ

З урахуванням скінченоелементної дискретизації тіла, для покомпонентного подання J -інтеграла отримуємо:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_S \left(W t^j n_j - n_m \sigma^{mn} \nabla_k u_n t^k \right) ds = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_e + n_e} \left(W t^j n_j - n_m \sigma^{mn} \nabla_k u_n t^k \right) ds_i, \quad (8)
 \end{aligned}$$

де N_e – загальна кількість СЕ, крізь які проходить обраний для обчислення J -інтеграла контур; n_e – кількість СЕ, що містять кутові точки контуру; ds_i – довжина відрізка контуру в межах i -го СЕ; W – енергія деформування тіла (системи з N_e СЕ):

$$W = \sum_{i=1}^{N_e} W_i = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \sqrt{g}.$$

При реалізації розглянутого алгоритма обчислення J -інтеграла в межах НМСЕ конкретизація отриманого покомпонентного виразу (8) залежить від орієнтації фронту тріщини відносно осі z^3 .

В тілах з поперечними тріщинами обчислення J -інтеграла виконуються у вузлах сітки, що апроксимують фронт тріщини (рис. 6). Характерний розмір Δ при цьому визначається розміром СЕ вздовж фронту тріщини.

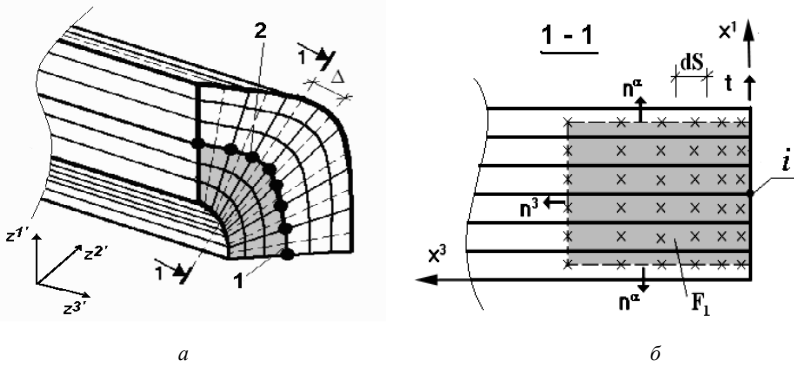


Рис. 6. Схема визначення J -інтеграла в тілах з поперечними тріщинами:
 а) загальний вигляд дискретної моделі НМСЕ і розташування точок визначення J -інтеграла; б) розташування контура інтегрування;
 1- фронт тріщини; 2- точка i визначення J -інтеграла

В кожній точці фронту тріщини i величина J -інтеграла на контурній поверхні обчислюється за формулою:

$$J_{F_k}^i = J_S^i \Delta, \quad (9)$$

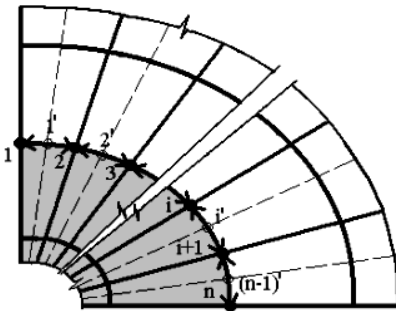


Рис. 7. Зведення контурних інтегралів до вузлів

Узагальнений вираз J -інтеграла містить величини напружень, деформацій та градієнтів переміщень, що обчислюються в центрі кожного з СЕ, розташованих вздовж фронту тріщини. Відповідно, величини J_S^i визначаються величинами J -інтеграла, обчисленими вздовж контурів, які лежать в площинах, що проходять через центри СЕ (точки $1', 2' \dots (n-1)'$, див. рис. 7),

після чого приводяться до точок фронту тріщини (вузлів дискретної моделі):

$$J_S^i = J_S^1, \quad i=1;$$

$$J_S^i = \frac{J_S^{(i-1)} + J_S^i}{2}, \quad 1 < i < n;$$

$$J_S^i = J_S^{(n-1)}, \quad i=n.$$

Згідно із (6), величина J -інтеграла в кожній точці i фронту тріщини становить:

$$J^i = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k}^i + J_{F_1}^i + J_{F_2}^i). \quad (10)$$

Обчислення J -інтеграла для тіл з поздовжніми тріщинами проводиться в точках інтегрування 1, 2, ..., n (рис. 8).

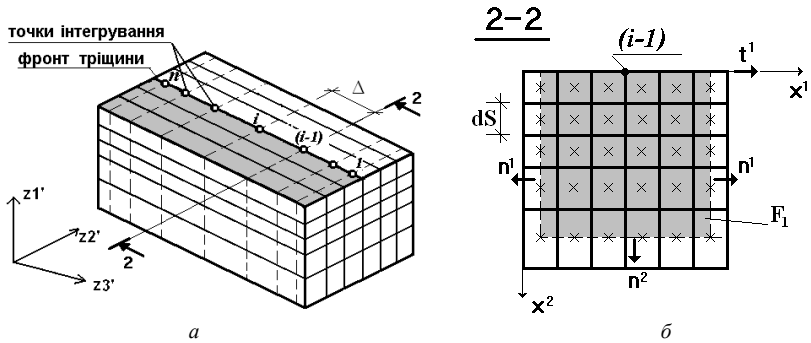


Рис. 8. Схема визначення J -інтеграла в тілах з поздовжніми тріщинами

Теоретично величина J -інтеграла є інваріантною відносно форми і величини контуру інтегрування. Зважаючи на похибки, що виникають при чисельній апроксимації напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини, становить інтерес визначення розмірів контуру інтегрування і мінімального розміру СЕ в околі вершини тріщини.

З цією метою було розглянуто тестовий приклад про одновісний розтяг квадратної пластини з центральною тріщиною при пружному деформуванні [12]. Визначення J -інтеграла проведено за формулою (7) із використанням рівномірної сітки 20x20 СЕ. Для обчислення величини J -інтеграла розглядалися прямокутні контури, кожна із сторін яких розташована на однаковій відстані, визначеній кількістю СЕ N_e , від

вершини тріщини. Були розглянуті контури при $N_e = 2, 3, 4$ і 9 (рис. 9, *a*). Результати свідчать, що збіжність з точністю близько 2% досягається при використанні контуру, розташованого на відстані трьох характерних розмірів СЕ від вершини тріщини (рис. 9, *б*). Більше віддалення контура і, відповідно, збільшення його розміру, призводить до зменшення похибки лише на 0,2%.

У подальшому визначення J -інтеграла проводилось із використанням контуру з трьох елементів на різних регулярних СЕ сітках. Найрідшою сіткою, на якій може бути застосований контур при $N_e = 3$, є сітка 6×6 СЕ при характерному розмірі СЕ $\ell_e = \frac{1}{3} \ell_{тр}$, де $\ell_{тр}$ – довжина тріщини (рис.10, *a*). Результати, отримані при подальшому згущенні сітки до 10×10 , 20×20 , 30×30 СЕ при розмірі елемента, відповідно, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ і $\frac{1}{15}$ довжини тріщини, засвідчили, що збіжність з похибкою близько 2% досягнута при $\ell_e = \frac{1}{10} \ell_{тр}$ (рис. 10, *б*).

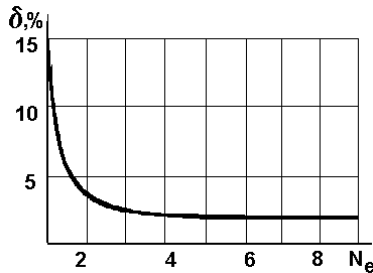
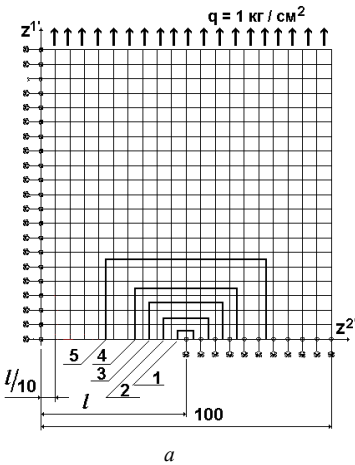


Рис. 9. Пластина з центральною тріщиною: контури для обчислення (*a*) і збіжність величини J -інтеграла (*б*)

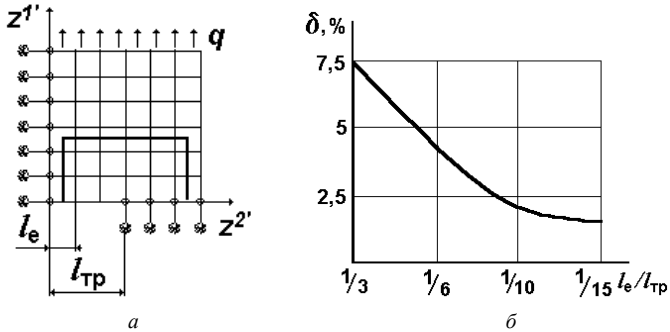


Рис. 10. Мінімально припустимий контур (а)
і збіжність величини J -інтеграла (б)

Отже, були визначені мінімально необхідні розміри контуру інтегрування, кількість і характерні розміри СЕ для вірогідного обчислення величини J -інтеграла.

В розглянутому тестовому прикладі в околі вершини тріщини реалізований напружено-деформований стан, обумовлений лише розтягуючим навантаженням. У випадку при розгляді деформування призматичного тіла з боковою тріщиною (рис. 3) внаслідок прикладення розтягуючого навантаження на відстані l від фронту тріщини напружено-деформований стан суттєво обумовлений відповідною згінною складовою.

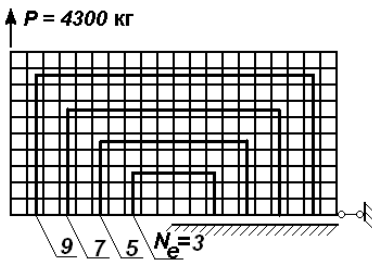


Рис.11. Розрахункова схема
призматичного тіла з боковою тріщиною

На першому етапі розв'язання зазначеної задачі проведено в двовимірній постановці на основі МСЕ із використанням дискретної моделі, наведеної на рис.11, б. Величина J -інтеграла, отримана із використанням контурів, що складаються з трьох і дев'яти СЕ, збігається з наведеним в роботі [12] еталонним значенням з похибкою в межах 2%.

Подальший розгляд задачі в просторовій постановці (рис. 12) засвідчив суттєві не тільки кількісні, а й якісні відмінності розподілень J -інтеграла вздовж фронту тріщини порівняно із результатами, отриманими за обчисленими прямим методом величинами коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) K_I : $J = kK_I^2/E$, E – модуль пружності матеріалу. Крім

того, був проведений аналіз похибки визначення величин J -інтеграла J_0 , отриманих по замкненому контуру, що містить вершину тріщини (рис. 12, показаний на дискретній моделі штриховою лінією), які теоретично повинні дорівнювати нулю. В даному випадку величина J_0 визначалась як різниця величин J -інтеграла, обчислених по П-подібній частині замкненого контура і по горизонтальній лінії, що проходить вздовж берегів тріщини. Виявилось, що відмінність від нуля величин J -інтеграла по замкненому контуру, характеризується величиною похибки δ_{J_0} до еталонного розв'язку, неухильно зростає із збільшенням розміру контура. При цьому величина δ_{J_0} є різною в різних точках фронту тріщини (рис. 13, табл. 1) і досягає 60%. Це обумовлено розривністю полів напружень на границях скінчених елементів. Таким чином, характер розподілення напружень та градієнтів переміщень в дискретних моделях не відповідає вимогам, сформульованим для визначення інваріантного J -інтеграла в межах континуальних областей.

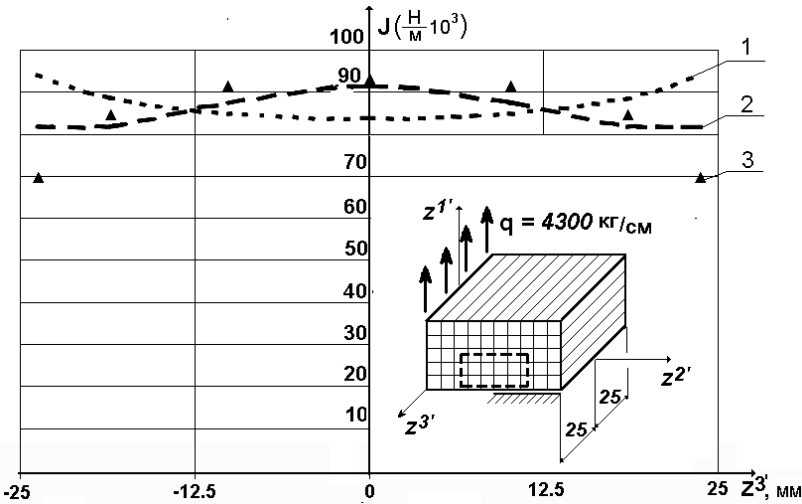


Рис. 12. Результати обчислення J -інтеграла для призматичного тіла з боковою тріщиною в просторовій постановці: 1– для контура інтегрування з 9 елементів; 2– для контура інтегрування з 3 елементів; 3– прямий метод

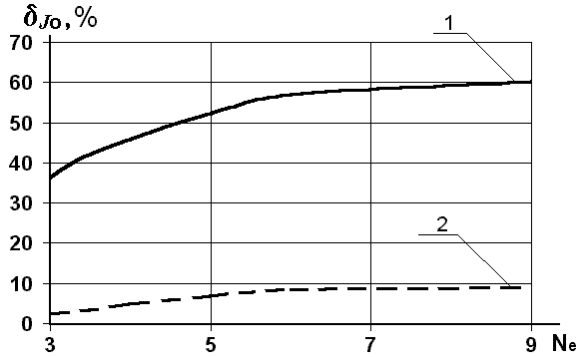


Рис. 13. Похибка обчислення J -інтеграла по замкнутому контуру в призматичному тілі з боковою тріщиною:

1– на бічних поверхнях ($z^3 = \pm 25$ мм); 2– в середньому перерізі ($z^3 = 0$).

Таблиця 1

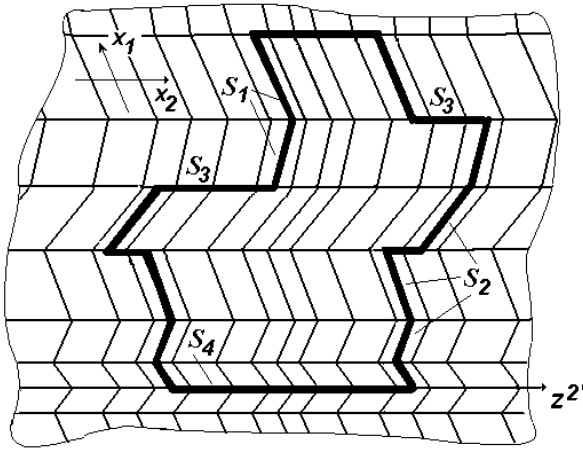
$z^3, \text{ мм}$	Похибка обчислення J -інтеграла по замкнутому контуру $\delta_{JO}, \%$	
	$N_e = 3$	$N_e = 9$
- 24.75	-35.97	-60.35
- 18.5	0.74	-9.25
- 10.25	5.71	6.98
0	2.43	8.89
10.25	5.71	6.98
18.5	0.74	-9.25
24.75	-35.97	-60.35

Для усунення зазначених недоліків і вірогідного обчислення J -інтеграла необхідним є розробка підходів, які ґрунтуються на величинах, пов'язаних із процедурою скінченоелементного розв'язання задачі механіки деформівного твердого тіла.

Методика обчислення J -інтеграла за величинами вузлових переміщень u і вузлових реакцій R . Розглянемо контур довільної форми, що проходить в напрямку вісі x_1 через середини СЕ, і по границях СЕ паралельно вісі x_2 (рис. 14).

J -інтеграл (2) за зазначеним контуром може бути поданий у вигляді:

$$J = \int_S (Wn_i - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'l'} t^{l'}) ds. \quad (11)$$

Рис. 14. Довільний контур для обчислення J -інтеграла

Після розгортання добутку в останньому складнику за індексом l , зважаючи, що $t^1 = 0$, $t^2 = 1$, $t^3 = 0$ отримаємо:

$$J = \int_s (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds. \quad (12)$$

Відповідно до напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до відрізків ламаної, що утворює контур, виділимо наступні його складові: ламані лінії, відрізки яких збігаються за напрямком з вісями x_1 CE – s_1 і s_2 , а також відрізки ламаних та прямі паралельні вісі $z^{2'}$ – s_3 і s_4 . В загальному випадку кількість відрізків, що складають зазначені складові контура, може бути довільною. Відповідно, подамо (12) у вигляді:

$$J = \int_{s_1} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_1 + \int_{s_2} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_2 + \\ + \int_{s_3} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_3 + \int_{s_4} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_4 ;$$

З урахуванням значень проекції нормалі n_t на напрямок $z^{2'}$ ($n_t|_{s_1} = -1$, $n_t|_{s_3} = 1$, $n_t|_{s_2} = n_t|_{s_4} = 0$) останній вираз для обчислення J -інтегралу набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{s_1} (-W - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_1 + \int_{s_2} (-n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_2 + \\
 &\quad + \int_{s_3} (W - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_3 + \int_{s_4} (-n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_4 = \\
 &= \int_{s_3} W ds_3 - \int_{s_1} W ds_1 - \int_{s_1} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_1 - \int_{s_2} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_2 - \\
 &\quad - \int_{s_3} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_3 - \int_{s_4} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_4,
 \end{aligned}$$

або, з урахуванням скінчено-елементного подання контуру:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{j=1}^{N_3} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j, \quad (13)
 \end{aligned}$$

де N_1, N_2, N_3, N_4 – кількість скінчених елементів на відповідних ділянках контуру.

Розглянемо відрізок контуру інтегрування в межах одного скінченного елемента (рис. 15).

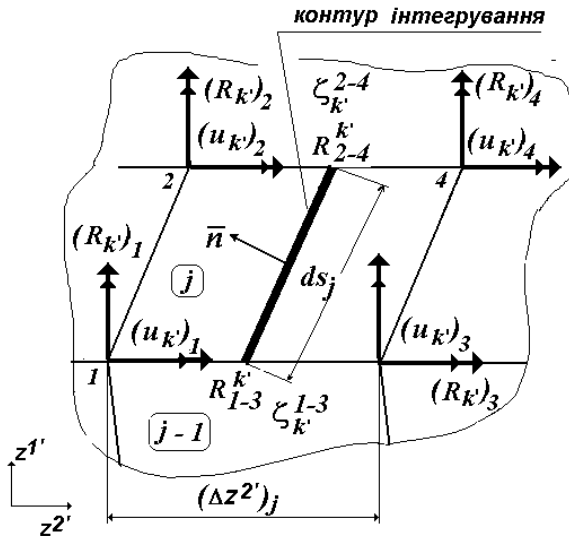


Рис. 15. Фрагмент контуру інтегрування в межах СЕ

Величина енергії деформування СЕ W , обчислена вздовж відрізка ds дорівнює

$$W ds_j = \frac{1}{2(\Delta z^{2'})} \{u\}_j \{R\}_j, \quad (14)$$

де $\{u\}_j, \{R\}_j$ – вектори переміщень і вузлових реакцій кожного СЕ, через які проходить контур: $\{u\}_j = \left\{ \left\{ u_k \right\}_j \right\}$, $\{R\}_j = \left\{ \left\{ R_k \right\}_j \right\}$, $k=1, 2, 3$ відповідає напрямкам z^1, z^2, z^3 , а $i=1, 2, 3, 4$ відповідає нумерації вузлів в межах СЕ (рис. 15).

Введемо наступні позначення:

$$R_{2-4}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{ds}{2}, \quad R_{1-3}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{ds}{2}.$$

В той же час ці величини можуть бути подані із використанням вузлових реакцій елемента:

$$R_{2-4}^{k'} = \frac{R_2^{k'} + R_4^{k'}}{2}, \quad R_{1-3}^{k'} = \frac{R_1^{k'} + R_3^{k'}}{2}.$$

Аналогічно можуть бути подані величини градієнтів на сторонах 1–2 і 3–4 СЕ:

$$\zeta_{k'2'}^{2-4} = \frac{(u_{k'})_4 - (u_{k'})_2}{\Delta z^{2'}}, \quad \zeta_{k'2'}^{1-3} = \frac{(u_{k'})_3 - (u_{k'})_1}{\Delta z^{2'}}.$$

З урахуванням цього та формули (14) вираз для контурного інтеграла (13) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left(R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким чином, контурний інтеграл (2) може бути представлений із використанням величин вузлових реакцій і вузлових переміщень.

Для часткового випадку регулярної в напрямку $z^{2'}$ скінчено-елементної сітки може бути доведено дорівнювання нулю величини J -інтеграла при його обчисленні по замкненому контуру, що охоплює вершину тріщини.

З цією метою розглянемо фрагмент дискретної моделі, скінчено-елементна сітка в межах якого є регулярною в напрямку $z^{2'}$. Після розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану МСЕ для області дискретної моделі $ABCDEFGHKLMP$, що має довільну форму і містить N вузлів, відомі величини переміщень і вузлових реакцій.

Нехай інша підобласть $A'B'C'D'E'F'G'H'K'L'M'P'$, дискретна структура якої тотожна попередній, зміщена на величину $\Delta z^{2'}$. Вектори переміщень і вузлових реакцій, першої підобласті позначимо $\{u\}_1$ і $\{R\}_1$, а другої – $\{u\}_2$ і $\{R\}_2$:

$$\{u\}_1 = \left\{ \{u\}_j \right\}, \{R\}_1 = \left\{ \{R\}_j \right\}, \{u\}_2 = \left\{ \{u\}_j \right\}, \{R\}_2 = \left\{ \{R\}_j \right\},$$

де j – наскрізні номери СЕ в дискретній моделі; $j = 1, 2, \dots, N$, для $\{u\}_1$ і $\{R\}_1$, $j = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, N + M_1$ для $\{u\}_2$, $\{R\}_2$, N – кількість СЕ, через які проходять контури, M_1 – кількість СЕ, які охоплені контурами за напрямком x_1 .

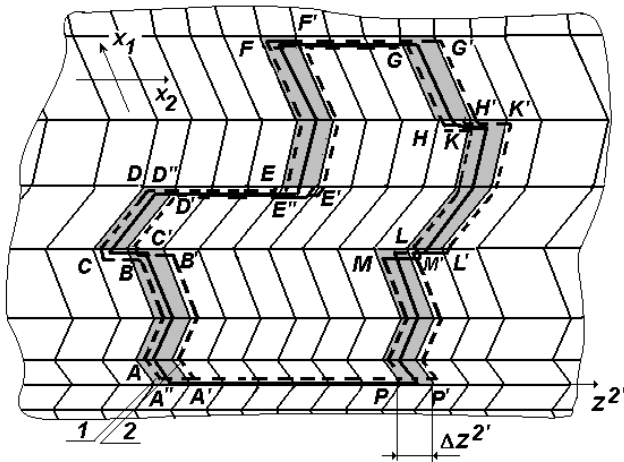


Рис. 16. Розташування контура інтегрування для двох станів тіла

Запишемо наступну тотожність:

$$J = -\frac{\partial W}{\partial \ell} = \int_V \frac{\partial W}{\partial \ell} dV - \int_V \frac{\partial W}{\partial \ell} dV, \quad (17)$$

де W – енергія деформування об'єму V , $\partial \ell$ – нескінченно малий зсув контура.

Перший складник в виразі (17) для розглядуваного фрагмента дискретної моделі згідно із теоремою Клапейрона може бути поданий як різниця величин робіт вузлових реакцій на відповідних переміщеннях:

$$\frac{1}{\Delta z^{2'}} \left(\frac{1}{2} \{u\}_1 \{R\}_1 - \frac{1}{2} \{u\}_2 \{R\}_2 \right). \quad (18)$$

Подамо другий складник в формулі (17) у вигляді добутку двох величин:

$$\left(\frac{\{u\}_1 - \{u\}_2}{\Delta z^{2'}} \right) \left(\frac{\{R\}_1 + \{R\}_2}{2} \right). \quad (19)$$

Після розкриття дужок отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\{u\}_1 - \{u\}_2}{\Delta z^{2'}} \right) \left(\frac{\{R\}_1 + \{R\}_2}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} \left(\{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2 - \{u\}_2 \{R\}_1 + \{u\}_1 \{R\}_2 \right). \end{aligned}$$

Згідно із теоремою Бетті про взаємність робіт $\{R\}_2 \{u\}_1 = \{R\}_1 \{u\}_2$.

Таким чином:

$$\frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2) \equiv \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 - \{u\}_2) (\{R\}_1 + \{R\}_2).$$

Отже, величина J -інтегралу (17) по замкненому контуру тотожно дорівнює нулю:

$$J = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2) - \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 - \{u\}_2) (\{R\}_1 + \{R\}_2) = 0. \quad (20)$$

Оскільки розглядуваний фрагмент знаходиться в стані рівноваги, для кожного внутрішнього вузла обох під областей реакції дорівнюють нулю. Відповідно, величина J -інтегралу, отримана із використанням виразів (16) і (20) для даного випадку буде однаковою.

Проведене застосування розробленого підходу до визначення величин J -інтеграла до задачі про згин призматичного тіла з боковою тріщиною засвідчило незалежність величини J -інтеграла від контуру інтегрування і майже повну тотожність з еталонним розв'язком (рис. 17). Крім того слід відзначити, що при застосуванні для обчислення J -інтеграла величин переміщень і вузлових реакцій на відміну від результатів, отриманих із застосуванням величин напружень і градієнтів переміщень, похибка δ_{JO} обчислення J -інтеграла по замкненому контуру не перевищує 1% при будь-яких розмірах контура.

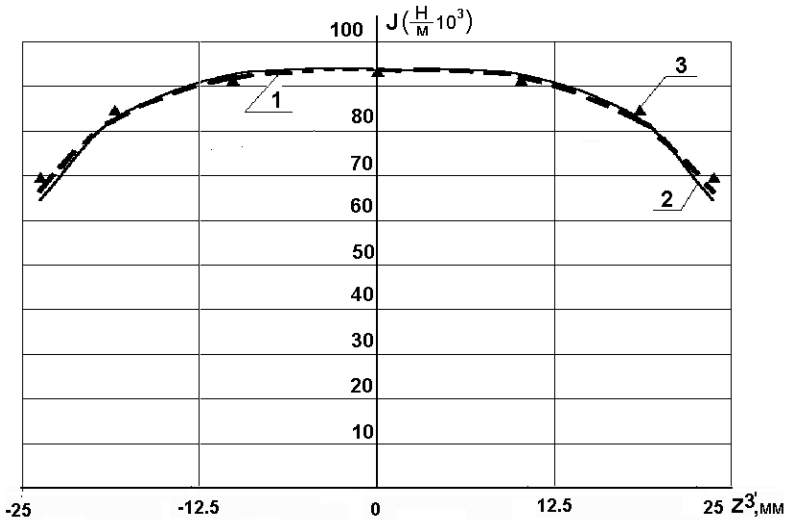


Рис. 17. Розподіл J -інтеграла вздовж фронту тріщини :
1 – контур з 3 елементів; 2 – контур з 9 елементів; 3 – прямий метод.

Проведені дослідження збіжності результатів розв'язання задачі засвідчили, що для забезпечення збігу із еталонним результатом при обчисленні J -інтеграла за величинами напружень і градієнтів переміщень, необхідним є значне згущення скінчено-елементної сітки що, відповідно, призводить до невиправданих обчислювальних витрат (рис. 18). Це наглядно демонструється в порівнянні з результатами, отриманими із використанням величин вузлових реакцій і переміщень. Так, для отримання величини J -інтеграла з точністю порядку 2,5% в цьому випадку достатньо скінчено-елементної сітки розміром лише 5×10 SE. Слід відзначити, що збіжність досягається при використанні як ортогональних (рис. 3), так і косокутних (рис. 19) дискретних моделей, а також при розгляді даного об'єкта як тіла з поперечною тріщиною.

Характерний розмір СЕ в вершині тріщини при цьому є майже в 25 разів меншим, ніж для досягнення тієї ж точності при обчисленні J -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень.

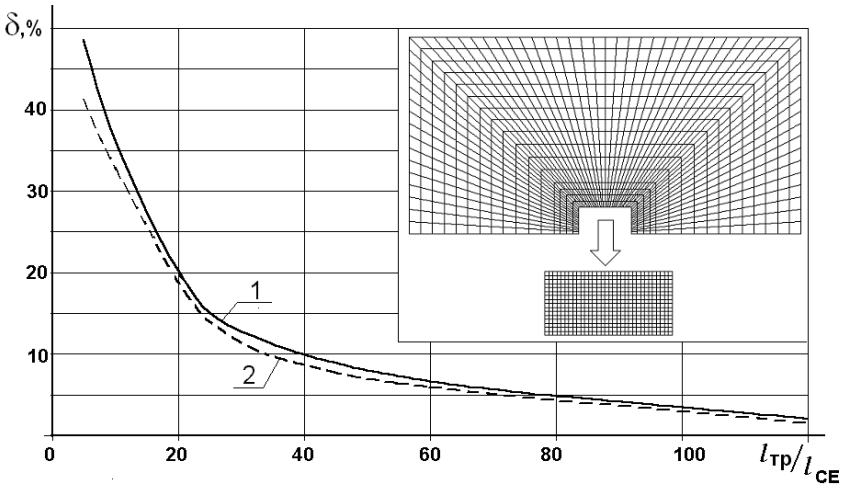


Рис. 18. Збіжність метода при використанні контура з 3 елементами:
1 – похибка обчислення J -інтеграла по замкнутому контуру;
2 – похибка обчислення J -інтеграла

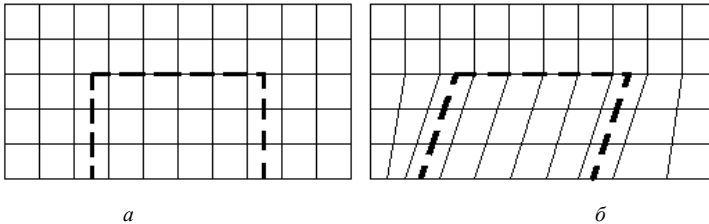


Рис. 19. Контури для обчислення J -інтеграла за методом реакцій, побудовані на ортогональній (а) і косокутній (б) СЕ сітках

Отримані в даній роботі результати засвідчили, що визначення J -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень при розв'язанні задач механіки руйнування на основі МСЕ призводить до складних обчислювальних процедур. При цьому отримані в просторовій постановці розподілення величини J -інтеграла вздовж фронту тріщини містять не лише суттєві кількісні, а й якісні відмінності, що спостерігаються як при використанні різних контурів інтегрування, так і при порівнянні із прийнятим за еталонний результатом обчислення J -

інтеграла на основі прямого методу. Уточнення результатів призводить до необхідності згущення скінчено-елементної сітки до досягнення характерними розмірами СЕ величин, що є на два порядки меншими ніж довжина тріщини. Розроблений підхід обчислення J -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень є вільним від зазначених недоліків: В цьому випадку суттєво спрощується процедура обчислення J -інтеграла в кожній з точок фронту тріщини, отримані результати є інваріантними відносно контура інтегрування, а необхідні для досягнення високої точності обчислення величини J -інтеграла характерні розміри СЕ є в 24 рази більшими, ніж в попередньому випадку, що забезпечує порівняно невелику розмірність дискретних моделей.

Таким чином, розроблений новий підхід до обчислення J -інтеграла на основі МСЕ забезпечує вірогідність отримуваних результатів і є ефективним засобом розв'язання просторових задач механіки руйнування.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ./ Под ред. С.Атлури.* – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. *Дж. Райс* Математические методы в механике разрушения. В книге: Разрушение т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975 – 764 с.
5. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
6. *Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г.* Расчет энергетического интеграла для тел с вырезами и трещинами при упругопластическом деформировании. // Тр. ЦКТИ – 1988. – №246. – С. 67 – 73.
7. *MP 1-95.* Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. Механика катастроф. – М.: МИБСТС, 1995. – с.7 – 82.
8. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
9. *Никишков Г.П.* Метод эквивалентного объемного интегрирования для для расчета параметров механики разрушения несимметричных трещин. – Препринт МИФИ. – 031-87. – 20 с.
10. *Носиков А.И., Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.* Инвариантность J -интеграла для трещины в материале с негладкой диаграммой деформирования.// Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Тр. VI Межд. конф. – С.-Петербург: СПбГТУ, 2005. – С. 350–359.
11. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука. – 1985. – 504 с.
12. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

13. *Синайський В.М.* Определение параметров разрушения методом рентгеноструктурного анализа. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – т.68. – № 4. – С.35 – 38.
14. *Сиратори М., Миецу Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения / Пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
15. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
16. *Anderson T.L.* Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – CRC Press Boca Raton, Ann Arbor, Boston, 2000. – 793 p.
17. *Hellen T.K.* On the Method of Virtual Crack Extensions. – Int. Journal for Numerical Methods of Engineering. – Vol.9. – 1975. – pp.187–207.
18. *Kishimoto K., Aoki S., Sakata M.* On the path independent integral J . – Engineering Fracture Mechanics. – 1980. – V.13.– p.841–850.
19. *de Lorenci H.G.* On the Energy Release Rate and J -integral of 3–D Crack Configurations. – Int. Journal of Fracture. – Vol.19. – 1982. – pp.183–193.
20. *de Lorenci H.G.* Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. – Engineering Fracture Mechanics. – Vol.21. – 1985. – pp.129–143.
21. *Murakami T., Salo T.* Three-dimensional J -integral calculations of path-trough surface crack problems // Comput. And Structures. – 1983. – V.17. – N 5-6. – p.731–736.
22. *Parks D.M.* A stiffness Derivative Finite Elements Technique for Determination of Crack Tip Intensity Factors // Int. Journal of Fracture. – Vol.10. – 1974.– pp.487–502.
23. *Parks D.M.* The Virtual Crack Extensions Method for Nonlinear Material Behavior. – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – Vol.12. – 1977. – pp.353–364.
24. *Shih G.F., Moran B., Nakamura T.* Energy Release Rate Along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. – Int. Journal of Fracture. – Vol.30. – 1986.– pp.79–102.
25. *Smith C.W.* Measurement of fracture parameters in three dimensional cracked body problems. //Прикладная механика – 2003. – т.39, № 5. – С.3 – 27.

Надійшла до редколегії 18.11.2005 р.