

УДК 621. 01

В.С. Ловейкін, д.т.н., професор КНУБА,

Ю.В. Човнюк, к.т.н., професор МКА,

М.Г. Діктерук, к.т.н., доцент КНУБА

ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ У НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТАХ МЕХАНІЗМУ ПІДЙОМУ ВАНТАЖУ МОСТОВИХ КРАНІВ НА СТАДІЇ ЇХ ПУСКУ

Відомо [1, 2], що характер руху основних ланок механізмів і машин суттєво впливає на якість виконання технологічних процесів машиною, її продуктивність, надійність, довговічність тощо. На стадії пуску мостових кранів у їх пружних елементах механізмів підйому вантажу (тобто у канатах) можуть виникати значні динамічні навантаження, у тому числі і навантаження коливного характеру, які діють не тільки на власне канат, але й на інші ланки машини (вантажний візок, власне вантаж).

Метою даної роботи є аналіз динамічних навантажень у нелінійно-пружних елементах механізму підйому вантажу мостових кранів на стадії їх пуску, що є узагальненням лінійного варіанту моделі (механізму підйому крана) [2], де використана двомасова динамічна модель з лінійно-пружним канатом (рис. 1).

На цьому рисунку прийняті такі позначення: m_1, m_2 – зведені до підйомного нелінійно-пружного канату маси відповідно привідного механізму з барабаном та вантажу; x_1, x_2 – узагальнені координати відповідно мас m_1 й m_2 ; \vec{F}_1 і \vec{F}_2 – рушійна сила приводу і вага вантажу, зведені до вантажного каната; $c_{нел.}$ – нелінійна жорсткість канату (узагальнене позначення нелінійного характеру закону Гука для канату); \vec{g} – прискорення вільного падіння.

Рівняння руху розглянутої моделі механізму підйому вантажу мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - c \cdot (x_1 - x_2) - d \cdot (x_1 - x_2)^3; \\ m_2 \ddot{x}_2 = c \cdot (x_1 - x_2) + d \cdot (x_1 - x_2)^3 - F_2, \end{cases} \quad (1)$$

де c – лінійна складова жорсткості канату ($c > 0$), d – нелінійна складова жорсткості канату ($d > 0$ й $d < 0$). Систему (1) можна звести до рівняння:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + \varepsilon \cdot x^3 = \frac{F_1}{m_1} + \frac{F_2}{m_2}, \quad (2)$$

$$\text{де } x = x_1 - x_2, \omega_0^2 = c \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \varepsilon = d \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \quad (3)$$

У (3) ε може приймати різні знаки, що відповідає м'якій ($d < 0, \varepsilon < 0$) й жорсткій ($d > 0, \varepsilon > 0$) нелінійностям пружних властивостей [3] канату. Права частина (2) є функцією пришвидшення режиму пуску привідного механізму мостового крану, яка залежить від часу t , тобто:

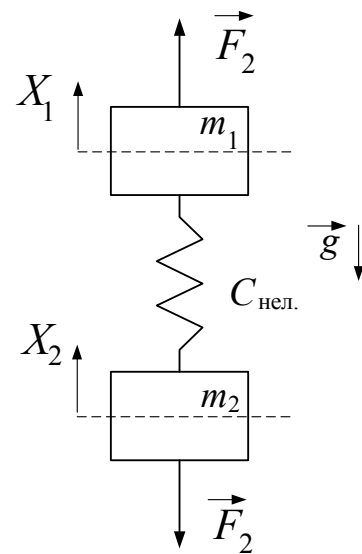


Рис. 1. Двомасова динамічна модель механізму підйому крана з нелінійно-пружним елементом (канатом)

$$a(t) = \frac{F_1}{m_1} + \frac{F_2}{m_2}. \tag{4}$$

Розглянемо точні аналітичні розв'язки (2) за нульової правої частини, а потім за заданого закону від t .

1. Точні розв'язки рівняння (2) за нульової правої частини (рівняння Дюффінга). Еліптичні функції Якобі.

При жорсткій нелінійності пружних властивостей канату ($d > 0, \varepsilon > 0$) якісно вплив ангармонізмів ($\sim x^3$) можна врахувати, замінюючи енергію (потенціальну) руху системи:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon \cdot x^4 \tag{5}$$

наближеним виразом [3]:

$$U \approx \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon \cdot \langle x^2 \rangle \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega_*^2 \cdot x^2, \quad \omega_*^2 = \alpha \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon \cdot E}{2\alpha^2} \right], \tag{6}$$

де середнє значення $\langle x^2 \rangle$ обчислюють для гармонічного осцилятора (при $\varepsilon = 0$), E – загальна (повна) енергія руху системи. Фазовий портрет наближено має вид, аналогічний (рис. 2).

Фазові траєкторії, що відповідають різним енергіям (E), залишаються замкненими, оточуючи особливу точку типу центра. Існує важлива відмінність від динаміки гармонічного осцилятора ($\varepsilon = 0$). Рух стає неізохронним: з формули (6) випливає, що із зростанням енергії E частота коливань ω_+ теж зростає. Залежність частоти коливань від енергії (чи амплітуди) є важливою властивістю ангармонічних коливань.

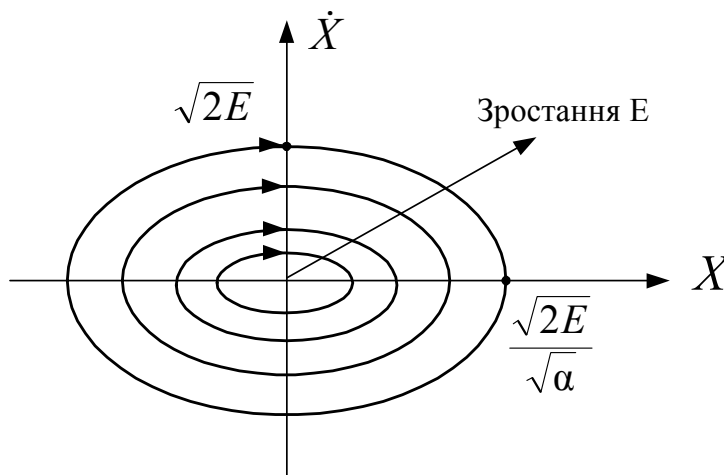


Рис. 2. Фазовий портрет системи за умови $d > 0, \varepsilon > 0$.

Для варіанту м'якої нелінійності пружних властивостей канату ($\varepsilon < 0$) рівняння Дюффінга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + \varepsilon \cdot x^3 = 0 \tag{7}$$

має періодичний розв'язок у інтервалі енергій $0 < E < E_0 \equiv \frac{\omega_0^2}{(4|\varepsilon|)}$. У граничному випадку $E \rightarrow 0$ осцилятор стає гармонічним і розв'язки рівняння (7) перетворюються у тригонометричні функції. У протилежному випадку $E = E_0$ рішення слід представляти через гіперболічний тангенс:

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{|\varepsilon|}} \cdot th(\sqrt{\alpha} \cdot t / 2). \tag{8}$$

Таким чином, загальний розв'язок (7) слід знайти такий, що буде узагальнювати тригонометричні та гіперболічні функції, включаючи їх у якості граничних випадків. Використаємо інтеграл руху (енергію) й запишемо у неявному вигляді загальний розв'язок рівняння (7):



$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega_0^2 \cdot x^2 - \varepsilon \cdot x^4 / 2}} = t - t_0. \quad (9)$$

У такому записі різні розв'язки параметризуються значенням повної енергії E . Однак зручно перейти до іншого (безрозмірного) параметру, вводячи $k = \sqrt{E_0/E - \sqrt{E_0/E - 1}}$; при зміні енергії від $E = 0$ до $E = E_0$ параметр k змінюється від 0 до 1. Тоді вираз (9) можна переписати у більш компактному вигляді:

$$\int_0^{x/x_*} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) \cdot (1-k^2 \cdot z^2)}} = \omega_0 \cdot (t-t_0) / \sqrt{1+k^2}, \quad (10)$$

де $x_* = \frac{\omega_0}{\sqrt{|\varepsilon|}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\sqrt{1+k^2}}$ відповідає амплітуді коливань маятника Дюффінга, а інтеграл у (10)

є еліптичним інтегралом першого роду. Тому загальний розв'язок (7) має наступний неявний запис:

$$F(\arcsin \frac{x}{x_*}, k) = \frac{\omega_0 \cdot (t-t_0)}{\sqrt{1+k^2}}, \quad (11)$$

де $F(\varphi, k)$ – стандартне позначення інтегралу (10) (еліптичного інтегралу першого роду з модулем k).

Значення $x = x_*$ відповідає зміщенню на максимальну величину, що дорівнює амплітуді, яка реалізується через чверть періоду коливання осцилятора. При цьому аргумент еліптичного інтегралу (11) перетворюється у $\pi/2$, а сам інтеграл – у повний еліптичний інтеграл першого роду:

$$F(\pi/2, k) = \mathbf{K}(k). \quad (12)$$

Вираз (11) задає розв'язок рівняння Дюффінга у неявному виді через еліптичний інтеграл першого роду. Для запису рішення у явному вигляді (формі) введемо функцію, обернену еліптичному інтегралу. Якщо $F(\varphi, k) = u(\varphi)$, то обернена функція $\varphi(u) = \text{am}(u, k)$ представляє собою так звану еліптичну амплітуду. Але зазвичай використовують не функцію амплітуди, а тригонометричні функції цієї величини. Зокрема, синус амплітуди задає еліптичний синус або синус Якобі: $\text{sn}(u, k) \equiv \sin \text{am}(u, k)$.

Через цю функцію рішення рівняння Дюффінга записується дуже просто:

$$x = \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot k}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \text{sn}\left(\frac{\omega_0 \cdot t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right). \quad (13)$$

Оскільки період еліптичного синусу дорівнює $4\mathbf{K}(k)$, частота коливань осцилятора виражається через модуль k наступним чином:

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2} / [\mathbf{K}(k) \cdot \sqrt{1+k^2}]. \quad (14)$$

Найбільш важливою фізичною характеристикою ангармонічного осцилятора є залежність частоти від амплітуди коливань. У даному випадку амплітуда задається виразом:

$$a = \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad (15)$$

котрий разом з формулою (14) у неявному виді визначає залежність частоти від амплітуди. Для коливань малої амплітуди (котрим відповідають малі коливання й значення параметру k) ця залежність знаходиться у явному виді:

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{|\varepsilon| \cdot a^2}{\omega_0^2} \right\}. \quad (16)$$

Таким чином, частота коливань знижується із зростанням їх амплітуди (м'яка нелінійність).

Якщо використати, як і у [3], вираз для повної енергії руху маятника E , то:

$$E = \frac{\omega_0^4 \cdot k^2}{|\varepsilon| \cdot (1 + k^2)^2}. \quad (17)$$

З формул (14) і (17) легко знайти асимптотики залежності $E = E(\omega)$ при великих і малих амплітудах коливань:

$$\begin{cases} E \approx \frac{4\omega_0^4}{3|\varepsilon|} \cdot (1 - \omega / \omega_0), \omega_0 - \omega \ll \omega_0, \\ E \approx E_0 \cdot (1 - \exp\{-2\omega_0 / \omega\}), \omega \ll \omega_0. \end{cases} \quad (18)$$

Якісний хід залежності $E = E(\omega)$, що відповідає формулі (17), наведений на рис. 3.

1. Вимушені коливання нелінійного маятника

Для розгляду вимушених коливань нелінійного маятника слід спочатку нагадати основні результати теорії вимушених коливань лінійного маятника. Зовнішня сила зазвичай вважається такою, що змінюється за гармонічним законом, і при наявності такої сили рівняння руху осцилятора має вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = A_0 \cdot \exp\{-i\omega t\}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (19)$$

де η – коефіцієнт в'язкого тертя ($\eta > 0$); A_0 – амплітуда зовнішньої сили, а ω – її частота.

Якщо ввести функцію $\psi = x + iy$, де $\omega_0 \cdot y = \frac{dx}{dt}$, то рівняння (19) можна переписати як диференціальне рівняння першого порядку для комплексної функції ψ :

$$i \cdot \frac{d\psi}{dt} = (\omega_0 - i \cdot \gamma) \psi - \frac{A_0}{\omega_0} \cdot \exp\{-i\omega t\}, \quad (20)$$

де $\gamma \approx \eta$ й $\gamma \ll \omega_0$.

Перевизначаючи амплітуду вимушеної (зовнішньої) сили, (20) можна представити у зручному для подальшого аналізу виді:

$$i \cdot \frac{d\psi}{dt} = (\omega_0 - i\gamma) \cdot \psi - A \cdot \exp\{-i\omega t\}, \quad (21)$$

де $A = \frac{A_0}{\omega_0}$ й без порушення загальності може вважатись дійсною величиною.

Частинний розв'язок цього рівняння (21), що описує вимушені коливання гармонічного осцилятора, має вигляд:

$$\psi = \frac{A \cdot \exp\{-i\omega t\}}{-\omega_0 + \omega + i\gamma} \equiv a \cdot \exp(i\delta - i\omega t), \quad (22)$$

де a – амплітуда коливання; δ – зсув фази осцилятора відносно вимушеної сили:

$$a = A \cdot [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]^{-1/2}, \quad (23)$$

$$\delta = \arctg[\gamma / (\omega_0 - \omega)]. \quad (24)$$

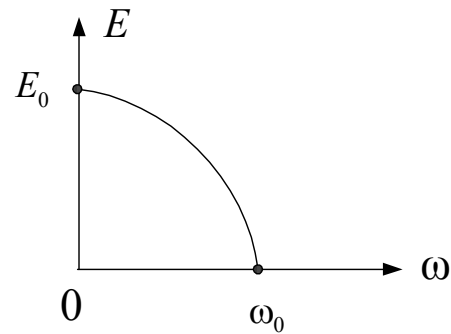


Рис. 3. Залежність $E = E(\omega)$ (17).



Амплітуда коливань на частоті резонансу ($\omega = \omega_0$) обмежена ($a_{\max} = A/\gamma$) й визначається величиною затухання γ . Зрозуміло, що $\delta > 0$, тобто за наявності тертя фаза коливання відстає від фази вимушеної сили.

Розглянемо вимушені коливання ангармонічного осцилятора, найпростішої моделі нелінійного маятника [3], що може бути зведена до аналізу рівняння:

$$i \cdot \frac{d\psi}{dt} = (\omega_0 - i \cdot \gamma) \cdot \psi - \alpha \cdot |\psi|^2 \cdot \psi - A \cdot \exp\{-i\omega t\}, \quad (25)$$

яке є узагальненням рівняння (21). У (25) α – нелінійний параметр ($\alpha \equiv |\varepsilon|$).

Простота цієї моделі (25) полягає в тому, що заміна $\psi = \varphi \cdot \exp(-i\omega t)$ зводить задачу до диференціального рівняння для φ , що явно не утримує в собі часу:

$$i \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (\omega_0 - i\gamma - \omega) \cdot \varphi - \alpha \cdot |\varphi|^2 \cdot \varphi - A. \quad (26)$$

Якщо затухання не враховувати ($\gamma \equiv 0$), то рівняння (26) має очевидний інтеграл руху, а саме:

$$E = (\omega_0 - \omega) \cdot |\varphi|^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot |\varphi|^4 - A \cdot (\varphi + \varphi^*). \quad (27)$$

У (27) E – енергія руху системи, а зірочка (*) означає спряжену (комплексну) величину.

Наявність інтегралу руху (27) дозволяє розв'язати задачу про динаміку відповідної консервативної системи ($\gamma = 0$) (динаміка за всіх припустимих значень параметрів залишається регулярною).

Слід зазначити, що за традиційного підходу, коли розглядається рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x - \alpha \cdot x^3 = A_0 \cdot \cos \omega t, \quad (28)$$

динаміка у загальному випадку досить складна. Зокрема, при великих амплітудах зовнішньої сили $A > A_{кр.} \sim 1/(\alpha\omega_0)$ поведінка системи стає стохастичною. Тому зазвичай обмежуються отриманням для такого рівняння періодичних розв'язків досить спеціального виду.

Традиційно для розгляду резонансу у нелінійній системі вважають, що під дією вимушеної сили, що гармонічно залежить від часу ($f = A \cdot \exp\{-i\omega t\}$), збуджуються одночастотні коливання, для котрих у системі координат, яка обертається $\varphi = const$. Позначимо $\varphi = a \cdot \exp(i\delta)$ й розглянемо залежність амплітуди вимушених коливань a і фази δ від частоти зовнішньої сили за заданої її амплітуди A . Вважаючи у (26) $d\varphi/dt = 0$, отримаємо:

$$a^2 \cdot \{(\omega - \omega_0 + \alpha \cdot a^2)^2 + \gamma^2\} = A^2, \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \gamma / (\omega_0 - \alpha \cdot a^2 - \omega). \quad (30)$$

За достатньо малих значень A амплітуда a також мала, тому можна знехтувати членом $\alpha \cdot a^2$ у формулі (29) й ми повертаємось до залежності (23), яка відповідає симетричному графіку з максимумом у точці $\omega = \omega_0$ (рис. 4, а). За зростання A крива на рис. 4 деформується, але спочатку зберігає свій вид – кожній частоті ω відповідає одна амплітуда (рис. 4, б).

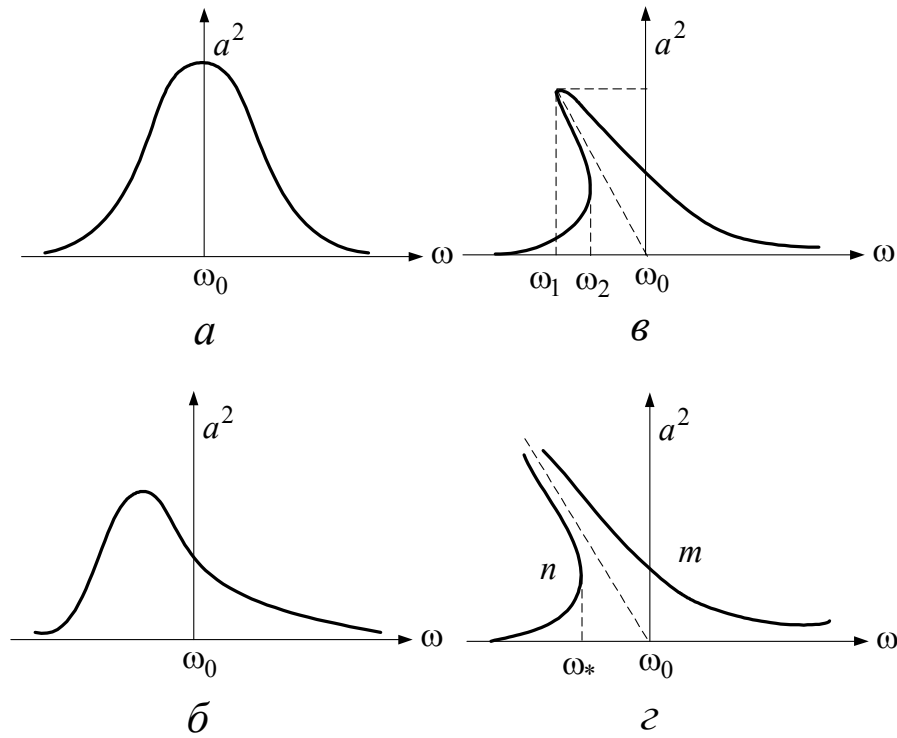


Рис. 4

Однак, починаючи з певних значень $A = A_k$, характер резонансної кривої змінюється. При кожному значенні $A > A_k$ існує область частот, де рівняння (29) має три дійсних корені (рис. 4, в). Границі відповідного інтервалу частот ω_1 і ω_2 знаходяться як корені рівняння $d\omega / da^2 = 0$. З (29) випливає:

$$\frac{d\omega}{da^2} = \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 + 4 \cdot (\omega - \omega_0) \cdot \alpha \cdot a^2 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot a^4}{2a^2 \cdot (\omega_0 - \omega - \alpha \cdot a^2)}. \quad (31)$$

Тому місцезнаходження точок ω_1 і ω_2 визначається сумісним розв'язком рівнянь (29) та:

$$(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 + 4 \cdot (\omega - \omega_0) \cdot \alpha \cdot a^2 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot a^4 = 0. \quad (32)$$

Найбільше значення амплітуди досягається у точці, де $\frac{da^2}{d\omega} = 0$. При цьому $\omega_0 - \omega = \alpha \cdot a^2$ й з (29) випливає:

$$a_{\max}^2 = \left(\frac{A}{\gamma} \right)^2. \quad (33)$$

Це значення співпадає з максимальною амплітудою при наявності резонансу у лінійній системі, яка задається співвідношенням (23).

Для обчислення значення A_k слід зазначити, що це є те значення A , за котрого обидва корені квадратного по $(\omega - \omega_0)$ рівняння (32) співпадають. Таким чином, корені співпадають за умови: $\alpha^2 \cdot a^4 = \gamma^2$, коли $\omega_0 - \omega = 2 \cdot \alpha \cdot a^2$, тому:

$$A_k = 2\gamma^3 / \alpha. \quad (34)$$

Цікавою особливістю резонансу у нелінійній системі, що розглядається, є наявність області частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, які допускають декілька (формально три) різних амплітуди коливань. Однак, за наявності трьох різних рішень динамічних рівнянь виникає питання про їх стійкість. Справа в тому, що одночастотні коливання – це надзвичайно вузький



(виділений) клас розв'язків нелінійного рівняння (25) і необхідно з'ясувати, за яким принципом вони виділені.

Зазначимо, що багатозначність функції $a = a(\omega)$ за $\omega < \omega_2$ не пов'язана з наявністю тертя у системі, тому проаналізуємо граничний випадок $\gamma \rightarrow 0$, коли $\omega_1 \rightarrow -\infty$ й $\omega_2 \rightarrow \omega_*$ (рис.4,г).

Розглянемо фазову площину (δ, a) , вважаючи амплітуду a й фазу δ функціями часу, що задаються рівнянням (26) за $\gamma = 0$:

$$\frac{da}{dt} = A \cdot \sin \delta, \quad (35)$$

$$a \cdot \frac{d\delta}{dt} = (\omega - \omega_0 + \alpha \cdot a^2) \cdot a + A \cdot \cos \delta. \quad (36)$$

На рис. 5 наведені фазові траєкторії, що відповідають різним значенням параметру $E = const$, тобто:

$$(\omega_0 - \omega - \frac{\alpha}{2} \cdot a^2) \cdot a^2 - 2a \cdot A \cdot \cos \delta = E \quad (37)$$

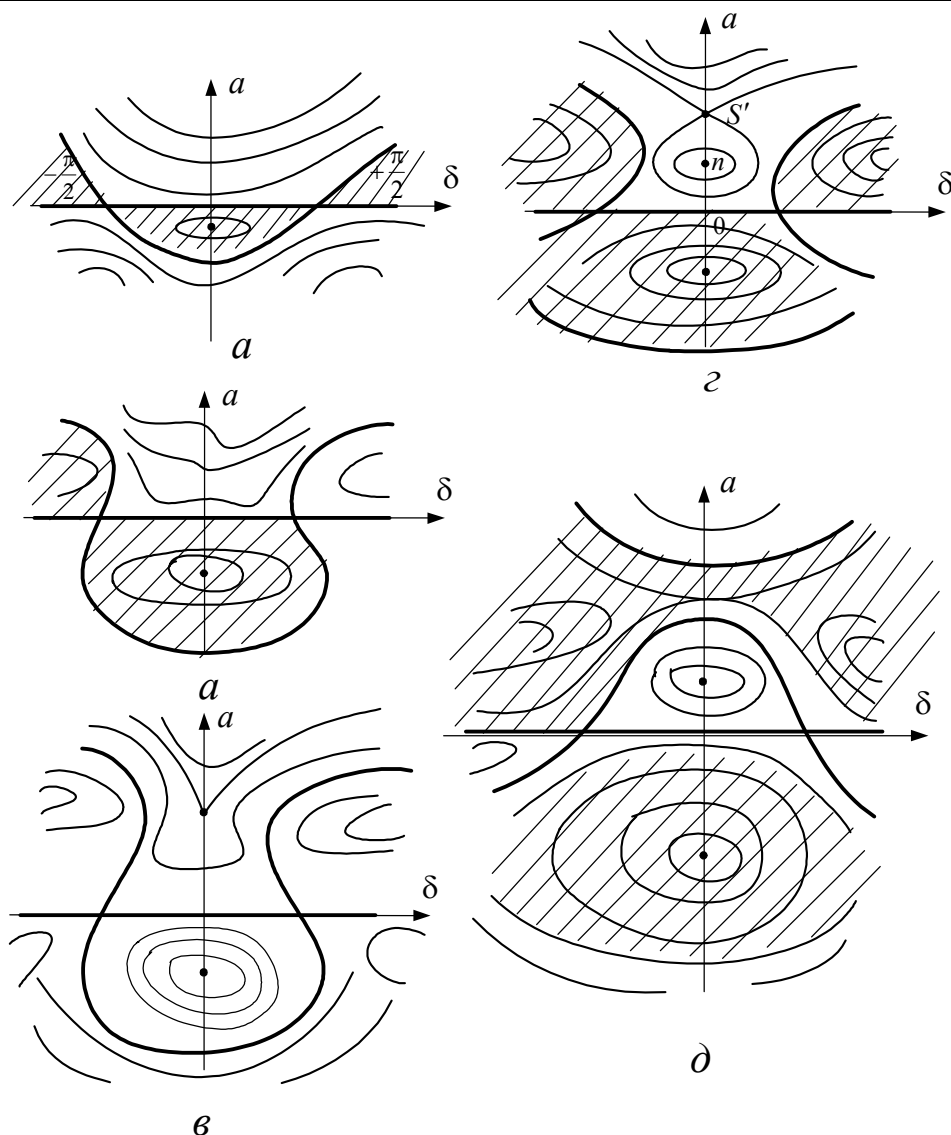
за фіксованого $A > A_k$. Зміна фазового портрету на рис. 5 відповідає зниженню частоти ω від $\omega \gg \omega_0$ до $\omega < 0, |\omega| \gg \omega_0$.

Фазові траєкторії симетричні відносно вісі ординат (а також вертикальних прямих $\delta = \pi \cdot n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$), періодичні за δ з періодом 2π й антисиметричні відносно вертикальних прямих $\delta = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Жирними лініями відмічені сепаратриси $E = 0$, які відділяють траєкторії, що відповідають $E > 0$ (заштриховані області на рис. 5), від траєкторій з $E < 0$. Напрямок руху вздовж фазової траєкторії у кожній області визначається за допомогою співвідношення (35).

Точки перетину сепаратрис є особливими точками типу "сідло". Крім того, на вісі ординат ($\delta = 0$) за $a < 0$ завжди є особлива точка типу "центр" (точка m на рис. 5). Цій точці можна поставити у відповідність верхню частину (верхню гілку) графіка на рис. 4, г – стійкий стан резонансних коливань.

За зменшення частоти фазовий портрет деформується й на ньому (за певної частоти $\omega = \omega_*$) виникає нова стаціонарна точка, котра за подальшого зменшення ω розтинається на центр (точка n на рис. 5, г) й сідло (точка s). Центр відповідає стійкому коливанию, амплітуда котрого описується ділянкою n нижньої гілки на рис. 4, г. Сідло відповідає нестійкому одночастотному коливанию (ділянка s нижньої гілки на рис. 4, г).

Наявність нестійкої гілки на резонансній кривій призводить до гістерезисної залежності амплітуди коливань від частоти. За зменшення частоти від значень $\omega > \omega_0$ до значень $\omega \ll \omega_0$ амплітуда вимушених коливань зростає, як це відбувається вздовж верхньої гілки кривої на рис. 4, в. За частоти $\omega = \omega_1$ відбувається "зрив" амплітуди (у точці А), котра стрибком "падає" до значення, яке відповідає точці В, а потім зменшується, йдучи вздовж нижньої гілки резонансної кривої. Якщо збільшити частоту, то амплітуда коливань пройде вздовж кривої ВД, а у точці Д за $\omega = \omega_2$ стрибком зростає до С, а потім зменшується, йдучи знову вздовж верхньої гілки резонансної кривої.



ВИСНОВКИ

1. Отримані точні розв'язки рівняння, яке моделює динаміку вантажопідйомного механізму крану на стадії його пуску. Рівняння Дюфінга має розв'язки у вигляді еліптичних функцій Якобі.
2. Розглянуті й проаналізовані вимушені коливання нелінійного маятника (модельної задачі). Розвинутий підхід дозволяє знайти зони стійкості коливань маятника. Побудовані фазові портрети системи дають змогу аналізувати типи коливань, що можуть виникати у ній у періоди пуску кранів.
3. Розвинутий підхід дає змогу у наступному оптимізувати управління подібними системами у перехідних режимах їх функціонування й суттєво зменшити навантаження на окремі ланки системи, зокрема, на канати.

Література

1. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160с.
2. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів//Машинознавство. – 1999. - №7(25). – С. 24-31.
3. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наукова думка, 1989. – 304с.