

УДК 539.3

Сніжко Н.А., канд. техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Овсянніков О.С.
Шевченко Ю.В.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ БАШТОВОЇ ГРАДИРНИ АЕС ПІД ДІЄЮ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Найбільш універсальним чисельним методом, що дозволяє виконувати розрахунки будівельних конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ). Розгляд просторових моделей, вимоги до детальної дискретизації їх окремих елементів, і в той же час до збереження достатньо регулярної структури сіткової області веде до необхідності розв'язання систем рівнянь високих порядків, тому їх розв'язання проводиться, як правило, в рамках вісесиметричної і плоскої постановок. У значній кількості випадків результати, що отримані по таких наближених розрахункових схемах, не можуть задовольняти сучасним вимогам, які висуваються до точності розрахунків на міцність.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботах [5, 11] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта в порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Як свідчить аналіз літературних джерел, область застосування НМСЕ істотно обмежена однорідними тілами обертання і призматичними тілами із шарнірними граничними умовами на торцях. В [1] запропоновано розвиток методу на динамічні задачі пружного деформування тіл обертання при невісесиметричному імпульсному навантаженні. Робота [6] присвячена застосуванню НМСЕ до аналізу вільних і вимушених невісесиметричних коливань тіл обертання.

Таким чином, НМСЕ є в даний час достатньо широко розповсюдженим і ефективним методом чисельного розв'язання широкого кола просторових задач. Однак, у всіх зазначених роботах за об'єкт дослідження приймаються однорідні вздовж направляючої просторові тіла. Таке обмеження істотно зменшує область застосування НМСЕ і не дозволяє розглядати початково різнірідні об'єкти,

деформовані тіла з залежними від температури фізико-механічними характеристиками в несиметричному температурному полі, тіла з вирізами, отворами або виступами, що порушують однорідність форми.

Дана робота спрямована на залучення до області ефективного застосування методу масивних, тонкостінних і комбінованих призматичних тіл та тіл обертання із змінними по всіх координатах фізико-механічними характеристиками, розвиток методу на просторові задачі коливань зазначеного класу об'єктів.

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов для процесів пружного деформування просторових тіл під дією динамічно прикладених сил, здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системах координат Z^i на основі рівняння Гамільтона [2].

Напружено-деформований стан розглядається в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій. Це зумовлено необхідністю широкого використання косокутніх скінченних елементів (СЕ) для дискретизації складного поперечного перерізу об'єктів. Апроксимації представленого класу конструкцій в запропонованому програмному комплексі базується на спеціальних неоднорідних кільцевому чотирикутному чотирьохвузловому та прямолинійному призматичному скінченних елементах з урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині елемента та інтегруванням в явному вигляді при осередненні характеристик матеріалів в його центрі [9] (рис. 1).

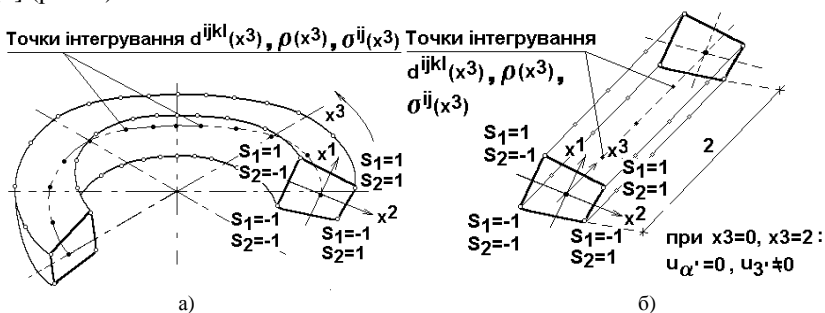


Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи
(а - замкнутий кільцевий, б - призматичний)

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (1)$$

У відповідності з основними положеннями моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [8] компоненти тензора деформацій подаються відрізками ряду Маклорена, число членів яких знаходиться в точній відповідності із ступенем полінома, що апроксимує переміщення:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad (2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} + h_{33,(3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33,\alpha} \right] x^{\alpha} \right\},$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{(ii),\beta} = \frac{g_{(ii),\beta}}{g_{(ii)}}.$$

При такому підході вдається з одного боку уникнути довготривалої процедури чисельного інтегрування по площі скінченного елемента, з іншого – досягти високої швидкості збіжності результатів.

Рівняння руху. Система розрахункових рівнянь НМСЕ при апроксимації тіла неоднорідними СЕ має вигляд:

$$\sum_{m=0}^L ([M]_{lm} \{\ddot{U}\}_m + [K]_{lm} \{U\}_m) = \{Q\}_l, \quad l = 0, \dots, L. \quad (3)$$

Амплітудні підматриці мас $[M]_{lm}$ та жорсткості $[K]_{lm}$ зформовані для дискретної моделі шляхом асамблювання відповідних підматриць СЕ. Коефіцієнти «неузгоджених» амплітудних підматриць мас елемента визначаються виразом:

$$m_{lm}^{k'}(S_1, S_2, P_1, P_2) = \frac{1}{4} \delta_{P_1}^{S_1} \delta_{P_2}^{S_2} \rho_{lm}^{k'} g^{kk'} \sqrt{g}, \quad (4)$$

де

$$\rho_{lm}^{k'} = \int_{x^3} \rho \psi_{(k')}^l \psi_{(k')}^m dx^3, \quad (5)$$

- для кільцевого СЕ:

$$\psi_1^l = \psi_2^l = \cos lx^3, \quad \psi_3^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi,$$

- для призматичного СЕ:

$$\psi_1^l = \psi_2^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_3^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2.$$

Амплітудні підматриці жорсткості СЕ подаються у вигляді:

$$[k]_{lm} = \left[\sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_{l_1}^T [D_\beta]_{lm} [B_\beta]_m + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_\beta]_{\alpha l}^T [D_\beta]_{\alpha m} [B_\beta]_{\alpha m} \right]. \quad (6)$$

Вирази для коефіцієнтів матриць $[B_\beta]_l$, $[B_\beta]_{\alpha l}$, $[D_\beta]_{lm}$ і $[D_\beta]_{\alpha m}$ наведені в [2, 9]. Інтегрування вздовж x^3 в (5) та при обчисленні коефіцієнтів матриць $[D_\beta]_{lm}$ і $[D_\beta]_{\alpha m}$ виконується чисельно. Це дозволяє узагальнити НМСЕ на тіла із змінними вздовж направляючої характеристиками матеріалів.

Компоненти узагальненого вектора зовнішніх амплітудних навантажень обчислюються за формулою:

$$\{q^{k'}\}_{(s_1, s_2)} = \left[\{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} + \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right] \sqrt{g}. \quad (7)$$

При обчисленні компонент векторів $\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ і $\left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$, інтегрування по площі поперечного перерізу СЕ і його границям виконується чисельно по формулі трапецій. Вздовж координати x^3 компоненти масових і поверхневих сил подаються відрізками ряду Фур'є:

$$\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} = \sum_{l=l_0}^L \left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} \psi_{(k')}^l, \quad \left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} = \sum_{l=l_0}^L \left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} \psi_{(k')}^l.$$

Компоненти $\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ і $\left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ обчислюються по відомим формулам чисельного гармонічного аналізу.

З рівняння (3) можуть бути отримані важливі частні випадки рівнянь руху НМСЕ для неоднорідних тіл.

Модальний аналіз. При дослідженні вільних коливань неоднорідних тіл рівняння руху (3) перетворюється до вигляду:

$$\sum_{m=0}^L ([K]_{lm} - \theta^2 [M]_{lm}) \{\varphi\}_m = 0, \quad l = 0, \dots, L, \quad (8)$$

θ , φ - відповідно частота і форма власних коливань тіла.

Визначення форм і частот власних коливань виконується на основі метода зворотніх ітерацій [3], що застосовується до коефіцієнтів ряду Фур'є в розкладі власних форм:

$$[K]_{ll} \Delta \{\varphi\}_{jl}^{n+1} = (\theta_j^k)^2 [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n - [K]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n. \quad (9)$$

Тут $\{\varphi\}_{jm}^n$ - m -тий коефіцієнт j -тої форми коливань тіла на n -тій ітерації; $\Delta \{\varphi\}_{jl}^{n+1}$ - приріст l -того коефіцієнта j -тої форми на $n+1$ ітерації; θ_j^n - значення j -тої власної частоти на n -тій ітерації. Початкові наближення для виконання ітераційного процесу (9) визначаються методом ітерацій у підпросторі для діагональних підматриць.

Ортогоналізація власних форм відбувається на кожній ітерації шляхом корекції коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n = \{\varphi\}_{jl}^n - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij}^n \{\bar{\varphi}\}_{ij}^n, \quad (10)$$

де

$$\alpha_{ij}^n = \frac{(\{\varphi\}_{il}^n)^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n}{(\{\varphi\}_{jl}^n)^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n}. \quad (11)$$

Визначення наближення j -тої власної частоти виконується відповідно до співвідношення Релея:

$$\theta_j^n = \frac{(\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n)^T [K]_{lm} \{\bar{\varphi}\}_{jm}^n}{(\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n)^T [M]_{lm} \{\bar{\varphi}\}_{jm}^n}. \quad (12)$$

Координатні значення j -тої форми власних коливань неоднорідного тіла подаються в остаточному вигляді:

$$\{\bar{\varphi}\}_j^{k'} = \sum_{l=0}^L \{\bar{\varphi}\}_{jl}^{k'} \psi_k^l. \quad (13)$$

Вимушені коливання. Існує два чисельні підходи до розв'язання системи звичайних диференційних рівнянь руху дискретної моделі (3) при заданих початкових умовах:

$$\{U\}_l \Big|_{t=0} = \{U_0\}_l, \quad \{\dot{U}\}_l \Big|_{t=0} = \{\dot{U}_0\}_l. \quad (14)$$

Перший підхід - використання методів прямого інтегрування диференційних рівнянь руху дискретної моделі [2], другий заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції.

Перехід до нормальних координат здійснюється в результаті лінійного перетворення:

$$\{U\}^{k'} = \sum_{i=1}^N x_i^{k'}(t) \{\varphi\}_i^{k'} = \sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^N x_i^{k'}(t) \{\varphi\}_{il}^{k'} \psi_k^l, \quad (15)$$

де $\{\varphi\}_i$ - i -та власна форма дискретної моделі, що знаходиться за допомогою модального аналізу конструкції; $x_i(t)$ - невідомі вагові коефіцієнти рішення для i -ої власної форми; N - кількість власних форм, які утримуються при лінійному перетворенні.

Виконавши підстановку (15) в (3) і домноживши зліва на $\{\varphi\}_i^T$, отримаємо систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^N \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{im} \ddot{x}_i + \{\varphi\}_{jl}^T [K]_{lm} \{\varphi\}_{im} x_i = \{\varphi\}_{jl}^T \{Q\}_l. \quad (16)$$

Враховуючи властивість ортогональності власних форм з матрицею мас і матрицею жорсткості:

$$\{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \{\varphi\}_{jl}^T [K]_{lm} \{\varphi\}_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_j, & i = j \end{cases},$$

де λ_j - власне значення j -ої власної форми, система лінійних диференціальних рівнянь руху дискретної моделі перетворюється до низки незалежних диференційних рівнянь наступного вигляду:

$$\ddot{x}_j(t) + \lambda_j x_j(t) = r_j(t). \quad (17)$$

$r_j(t) = \{\varphi\}_{jl}^T \{Q(t)\}_l$ - ваговий коефіцієнт вкладу j -ої власної форми до розкладу вектора узагальнених вузлових сил дискретної моделі.

Початкові умови мають наступний вигляд:

$$x_{0i} = \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{U_0\}_{im}, \quad \dot{x}_{0i} = \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\dot{U}_0\}_{im}. \quad (18)$$

Рішення звичайного диференційного рівняння 2-го порядку (17) з початковими умовами (18) подається інтегралом Дюамеля:

$$x_j(t) = x_{0j} \cos \theta_j t + \frac{\dot{x}_{0j}}{\theta_j} \sin \theta_j t + \frac{1}{\theta_j} \int_0^t r_j(\tau) \sin \theta_j (t - \tau) d\tau, \quad (19)$$

де $\theta^2 = \lambda$ - власне число вільних коливань, обчислення якого виконується чисельно на основі формули прямокутників [7].

Вектор координатних значень переміщень отримуємо за допомогою рівняння (15).

Результати чисельних досліджень. Збіжність результатів МСЕ і НМСЕ для неоднорідних тіл досліджені на прикладі динамічного деформування товстостінного металевого циліндру з вирізом. Циліндр знаходиться під дією радіального рівномірно розподіленого тиску, що миттєво прикладений до зовнішньої поверхні $q = 1 \text{ Н/м}^2$ (рис. 2).

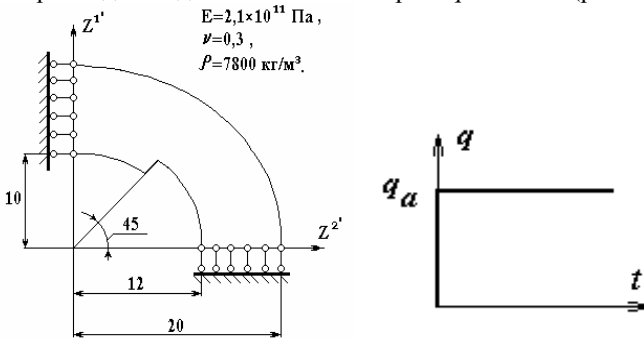


Рис. 2. - Розрахункова схема

Таблиця 1

Порівняння результатів МСЕ і НМСЕ

N форми	1	2	3	4	5
МСЕ	136.50	356.10	516.90	698.50	950.10
НМСЕ	136.60	357.60	517.60	698.70	954.20
$\varepsilon, \%$	0.06	0.25	0.14	0.06	0.41

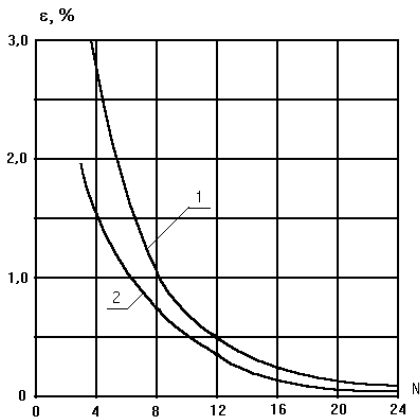


Рис. 3. Графіки збіжності максимальних переміщень точки ($r=12m$, $\varphi=90^\circ$) для МСЕ (1) та НМСЕ (2) від числа N

числа функцій форми N (скінченні елементи для МСЕ та кількість членів ряду Фур'є для НМСЕ), які апроксимують циліндр вздовж окружної координати. За еталонні прийняті відповідні значення переміщень для моделі циліндра: 25 функцій форми вздовж окружної координати, 15 СЕ в площині меридіонального перерізу, утримання 5 власних форм (подальше їх збільшення несуттєво впливало на кінцевий результат), крок інтегрування за часом $\Delta t = 10^{-4} c$.

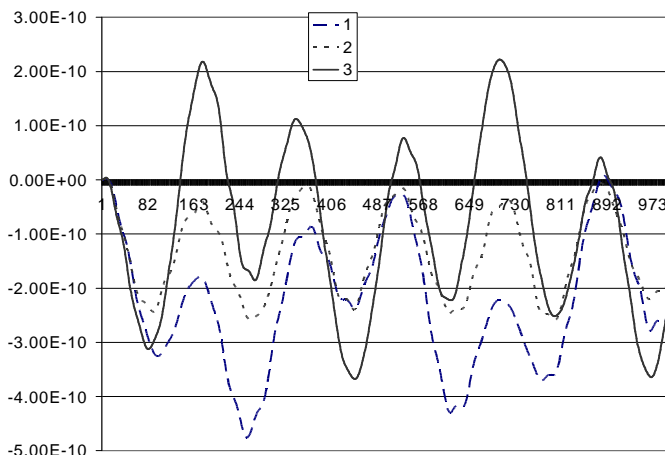


Рис. 4. Графік переміщень точок циліндра

На першому етапі був проведений аналіз власних форм та частот МСЕ та НМСЕ. Перші п'ять представлені в табл.1.

Базуючись на результатах роз'язання задачі на вільні коливання та методиці розкладу розшукуваного рішення по власним формам та частотам проведено аналіз параметрів напружено - деформованого стану циліндру НМСЕ та МСЕ під дією рівномірнорозподіленого тиску по зовнішній поверхні (рис.2).

На рис. 3 представлені графіки збіжності максимальних значень переміщень в залежності від

Наведені графіки свідчать про приблизно однакові похибки МСЕ і НМСЕ для суттєво неоднорідних тіл (наявність матеріалу, що описується нульовою жорсткістю та щільністю).

На рис. 4 представлені переміщення контрольних точок (1 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=0^\circ$; 2 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=45^\circ$; 3 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=90^\circ$), що отримані НМСЕ і МСЕ при використанні 16 функцій форми. Різниця складала менше 1%.

Розв'язання задач. За допомогою представленої методики проводились чисельні дослідження вимушених коливань монолітної баштової градирні під дією вітрового навантаження, що виникає внаслідок проходження смерчу.

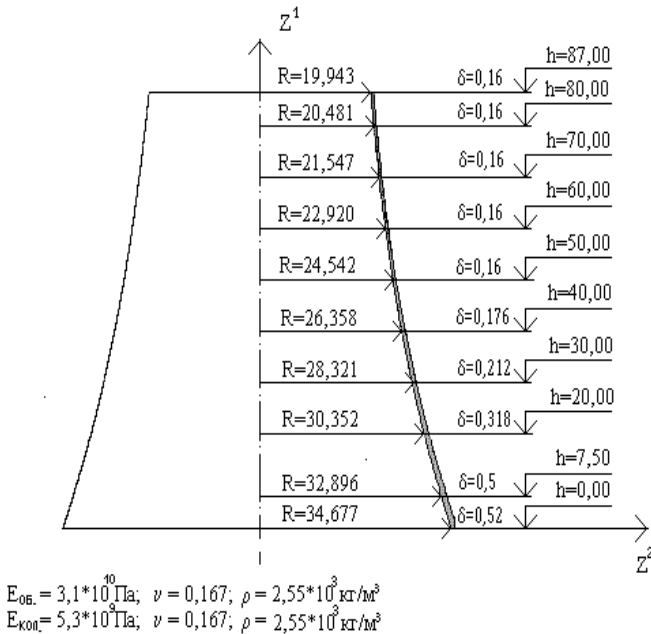


Рис. 5. - Розрахункова схема градирні

Градирня представляє собою систему взаємопов'язаних елементів, що включає оболонку витяжної вежі та опорну колонаду. Форма середньої поверхні башти (рис. 5) для висот 7.5-17.5 м - конічна з кутом $12^\circ 30'$, для висот 17.5-87 м - гіперболоїчна з радіусом середньої поверхні:

$$R = 19,952 \sqrt{1 + [(102,816 - z)/(68,794)]^2},$$

де z - вертикальна координата. На висотах 7.5-50 м товщина оболонки

відповідає лінійному закону (від 0.5 м до 0.16 м), на висотах 50-87 м товщина оболонки постійна 0.16 м. Оболонка витяжної башти спирається на 36 наклонних стійок колонади з поперечним перерізом 0.5×0.5 м. Стійки колонади жорстко пов'язані з кільцевим фундаментом. Опорна колонада градирні моделюється конічною оболонкою з приведеним (з умов еквівалентності роботи колони на тиск та згин) модулем пружності.

В основу методики розрахунку навантаження від дії вітрового потоку смерчу покладений підхід [10]. Дослідження проводилось з наступними параметрами смерчу: поступова $V_o = 18$ м/с та обертова $V_m = 92$ м/с швидкості вітру, висота вихрю $\delta_o = 458$ м, радіус вихрю $r_o = 61$ м (відстань від центру торнадо до точки, де обертова швидкість приймає максимальне значення), $x_o = 200$ м - початкове положення центру смерчу відносно градирні. Оскільки градирня відкрита незамкнена споруда, при підрахунку вітрового навантаження не враховували складову, яка описує ефект розрідження атмосфери всередині кільця смерчу.

На першому етапі було проведено аналіз вільних коливань представленої баштової градирні.

Таблиця 2

Власні частоти баштової градирні

№ форми	1	2	3	4	5	6
Частота	1.289	1.351	1.627	2.148	2.173	2.239

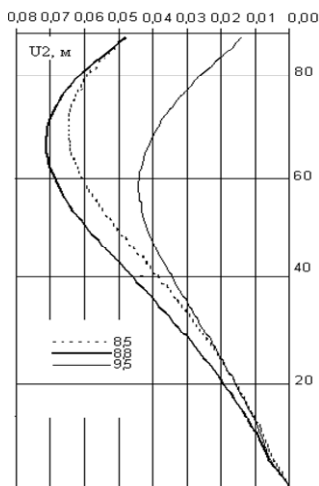


Рис. 6.

На базі отриманих власних форм та частот вільних коливань проведено аналіз напружено-деформованого стану баштової градирні під дією зовнішнього навантаження, що викликане проходженням смерчу.

Рис.6 демонструє еволюцію у часі радіальних переміщень в меридіональному перерізі градирні (полярний кут 0°). Епюри розподілу мембранних і кільцевих згинаючих напружень по висоті подані відповідно на рис.7а і 7б.

Видно, що найбільші переміщення досягаються на висоті приблизно 70 м. Максимальні напруження виникають в місцях немонотонної зміни жорсткості оболонки градирні по висоті.

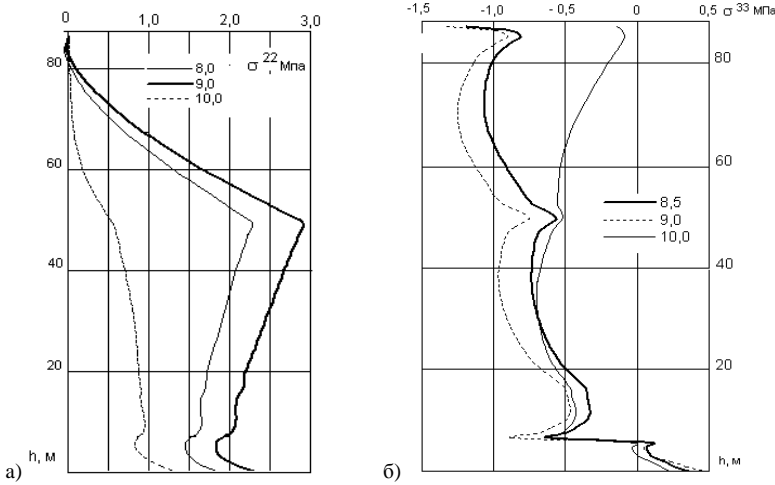


Рис. 7. а мембранні, б кільцеві згинаючі напруження

Для дискретизації башти градирні використовували кільцеві замкнені СЕ. Оболонкова частина апроксимувалась одним шаром СЕ (94 по висоті). Похибка складає менше 5% від рішення, що отримане при використанні сітки з 250 СЕ. Для апроксимації в окружному напрямку обмежувалися 11 членами ряду Фур'є.

Висновки. Як показали чисельні дослідження, запропонований варіант напіваналітичного методу скінченних елементів, орієнтований на дослідження неоднорідних вздовж направляючої призматичних тіл і тіл обертання, має високу ефективність у порівнянні з традиційним варіантом МСЕ. Розвиток методу на розв'язання просторових задач динаміки дозволяє застосовувати його для чисельного моделювання різних нестационарних процесів у складних конструкціях, що можуть бути представлені у вигляді неоднорідних по всіх координатах просторових тіл.

1. Бабич Ю.Н., Алтайдзе З.Г., Галиев Ш.У. "Напряженное состояние полого цилиндра при импульсном локальном нагружении". Пробл. прочности, 1987, № 10, с. 89-93.
2. Баженов В.А., Гуляр О.И., Топор О.Г., Солодей И.И. "Дослідження динамічної пружнопластичної взаємодії неоднорідних тіл на основі НМСЕ", Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. -К.:КНУБА, Вип.67, 2000. -с.3-18.
3. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

4. *Гуляр А.И., Топор А.Г., Овсянников А.С.* “Определение динамических характеристик неоднородных тел вращения ПМКЭ” // Сопrotивление материалов и теория сооружений. - 1997. - Вып.63.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
6. *Мирсаидов М., Мехмонов Я.* “Неосесимметричные колебания осесимметричных конструкций с присоединенными массами и выемками (выступами)”. Пробл. прочности, 1987, № 3, с. 111-116.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы.– М. Наука, 1989 – 161-165 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоокый В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Выща школа, 1982, 479 с.
9. *Солодей І.І.* “Напіваналітичний метод скінченних елементів в дослідженні пружно-пластичних коливань неоднорідних призматичних тіл”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.71, 2002. –с.3-17
10. *Wen Y. K.* “Dynamic tornado wind loads on tall buildings”. –Journ. Of Struct. Div., Proc. ASCE, 1975, ST1, p.169.
11. *Wilson E.L.* “Structural Analysis of Axisymmetric Solids”, 1965, AIAA J., Vol. 3, No 12, pp 2269-2274.

Матеріал надійшов до редакції 05.07.04.