

УДК 539.3

## АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНОЇ РЕАКЦІЇ ПРУЖНОЇ ОБОЛОНКИ НА ІМПУЛЬСНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

**О.П. Кривенко,**

канд. техн. наук, старший науковий співробітник

**Ю.В. Ворона,**

канд. техн. наук, доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2018.101.26-37>

Наведено методику дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Методика побудована на основі скінченноелементної моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки і створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі. Виконано порівняння розв'язків з результатами розрахунків, що отримані за допомогою програмного комплексу SCAD.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, універсальний просторовий скінченний елемент, редукована модель, імпульсне навантаження.

**Вступ.** Оболонки як елементи будівельних конструкцій широко застосовуються в різних галузях техніки. З огляду на різноманітність застосування, оболонкові конструкції для підвищення надійності і зниження матеріаломісткості, а також з технологічних міркувань можуть проектуватися у вигляді неоднорідних систем (неоднорідних оболонок). Вони можуть мати гладку і ступінчасто-змінну товщину, бути підкріплені ребрами і накладками, послаблені отворами, виїмками і каналами, гранованими, зі зламами серединної поверхні, багат шаровими. У цьому випадку всю конструкцію необхідно розглядати як оболонку змінної жорсткості, для розрахунку якої застосування класичних розрахункових схем, методів і алгоритмів є малоефективним або зовсім непридатним.

У роботі поняття оболонка неоднорідної структури (неоднорідна оболонка) використовується у широкому розумінні. Це є оболонки, що можуть мати: 1) геометричні особливості за товщиною у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зламами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках; 3) неоднорідні навантаження; 4) багат шарову структуру матеріалу.

У НДІ будівельної механіки КНУБА протягом багатьох років проводяться дослідження нелінійного деформування, стійкості та критичної поведінки пружних оболонок неоднорідної структури при дії термосилових навантажень. Опис, обґрунтування та застосування розробленого методу представлено у 2-х книгах [1, 2].

В останній час авторами приділено значну увагу до вивчення нестационарних коливань пружних оболонок. У першу чергу це стосується задач про реакцію оболонок на короткочасне (ударне й імпульсне) навантаження.

**1. Скінченно-елементна модель неоднорідної оболонки.** Побудова скінченно-елементної моделі оболонки (СЕМО) виконується в рамках методики, розробленої в [1, 2]. Методика базується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та побудована із використанням апарата тензорного числення і застосуванням моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). При розробці методики використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Методика призначена для чисельного дослідження статичних процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких оболонок при термосилових навантаженнях.

Для розробки СЕМО застосований ефективний підхід – апроксимація тонкої оболонки по товщині одним просторовим скінченним елементом (СЕ). Особливості напружено-деформованого стану тонкої пружної оболонки враховані використанням двох неklasичних гіпотез: про сталість нормальних напружень обтиснення волокон шару по товщині та деформівної прямій в напрямку товщини. Застосування останньої кінематичної гіпотези дозволило виконати стикування елементів обшивки та її ділянок з геометричними особливостями без порушення нерозривності за координатами і переміщеннями.

Моделювання неоднорідної оболонки реалізується модифікованим універсальним просторовим СЕ, який побудований на базі стандартного 8-ми вузлового ізопараметричного просторового скінченним елементом з полілінійними функціями форми. За рахунок введених додаткових змінних параметрів модифікований універсальний просторовий СЕ може бути ексцентрично зміщеним відносно серединної поверхні обшивки та може змінювати свої розміри в напрямку товщини для моделювання ребер і виїмок. Під обшивкою оболонки розуміється оболонка без геометричних особливостей за товщиною. На базі універсального СЕ розроблена єдина розрахункова модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів неоднорідної оболонки: обшивку змінної товщини, ребра і накладки, виїмки, канали й отвори, злами серединної поверхні, тощо.

Вивчення такого класу задач через їхню складність і можливу неоднозначність одержуваних розв'язків складно реалізувати у вигляді стандартної обчислювальної процедури. У зв'язку з недостатністю еталонних нелінійних розв'язків для неоднорідних оболонок проблемним є підтвердження достовірності та точності одержуваних нелінійних розв'язків. Тому у роботі [3] з метою подальшого обґрунтування достовірності розв'язків, одержуваних за методикою [1, 2], проведено порівняльний аналіз скінченно-елементних моделей і результатів розрахунку нелінійного деформування і стійкості тонких пружних неоднорідних оболонок при використанні трьох програмних комплексів (ПК), що засновані на методі скінченних елементів. Використовувались розроблений авторами комплекс, що побудований на використанні МССЕ, та програмні комплекси SCAD і ЛІРА. При цьому були виявлені деякі особливості використання ПК SCAD і ЛІРА для розв'язання зазначених задач. Це стосується побудови розрахункової схеми для апроксимації оболонки ступінчасто-змінної

товщини та застосування алгоритмів розв'язання нелінійних задач. Виявлені особливості можуть бути корисні для користувачів комплексів при проведенні розрахунків геометрично нелінійного деформування та стійкості тонких панелей ступінчасто-змінної товщини.

**2. Чисельна методика дослідження пружних оболонок від дії нестационарних динамічних навантажень з використанням редукованих моделей.** Побудова рівнянь руху скінченно-елементної моделі оболонки виконується на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Даламбера

$$\sum_{FE} (\delta W_{FE} - (\delta T_{FE} + \delta A_{FE})) = 0, \quad (1)$$

де  $T_{FE}$ ,  $W_{FE}$  та  $A_{FE}$  – робота сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, відповідно;  $\sum_{FE}$  – сума за скінченними елементами СЕМО.

Процедура інтегрування та лінеаризації (1) здійснюється звичним для МСЕ чином. У результаті приходимо до розв'язувальної системи рівнянь у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{{}^t u\} - \{{}^t P\} = 0, \quad (2)$$

де  $\{u\}$ ,  $\{\ddot{u}\}$  –  $N$ -вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі конструкції ( $N$  – загальне число ступенів свободи моделі);  $[M]$  – матриця мас усієї моделі конструкції, вона характеризує інерційні властивості оболонки;  $[K]$  – матриця жорсткості СЕМО;  $\{P\}$  – вектор узагальнених вузлових сил; верхній лівий значок « $t$ » показує залежність векторів від часу. Система (2) доповнюється початковими умовами для поля переміщень  $\{{}^0 u\}$  і швидкостей  $\{{}^0 \dot{u}\}$

$$\{u(t)\}|_{t=t_0} = \{{}^0 u\}, \quad \{\dot{u}(t)\}|_{t=t_0} = \{{}^0 \dot{u}\}. \quad (3)$$

Методика дослідження нестационарних коливань оболонок від дії короткочасних навантажень базується на застосуванні редукованих моделей. В даний час використовується чимало різних підходів до редукування. Слід зазначити, що підходи до редукування розрізняються за точністю, простоті застосування й обсягом потрібних обчислювальних ресурсів. У роботі для побудови редукованої моделі застосований ефективний підхід, що базується на методі базисних вузлів [3, 4].

Редукована система рівнянь має вигляд

$$[\tilde{M}]\{\ddot{q}\} + [\tilde{K}]\{{}^t q\} - \{{}^t \tilde{P}\} = 0, \quad (4)$$

де

$$[\tilde{M}] = [U]^T [M] [U], \quad [\tilde{K}] = [U]^T [K] [U], \quad \{{}^t \tilde{P}\} = [U]^T \{{}^t P\},$$

відповідно матриці мас і жорсткості, які характеризують рух редукованої моделі, а також вектор узагальнених сил для нової моделі. Правий верхній значок « $T$ » означає транспоновану матрицю.  $[U]$  – матриця перетворень, яка встановлює зв'язок між переміщеннями  $\{u\}$  вихідної СЕМО та новими невідомими (що мають назву – нові узагальнені координати) редукованої СЕМО  $\{q\}$ . Цей зв'язок визначається за формулою

$$\{ {}^t u^k \} = [U_{kr}] \{ {}^t q^r \}, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, \Omega}, \quad (5)$$

де  $N$  і  $\Omega$  – число ступенів свободи вихідної та редукованої моделей.

Відповідно до (3) невідомі шукані функції  $\{ {}^t q \}$  мають задовольняти початковим умовам

$$\{ {}^{t=t_0} q \} = \{ {}^{t_0} q \}, \quad \{ {}^{t=t_0} \dot{q} \} = \{ {}^{t_0} \dot{q} \}. \quad (6)$$

Згідно з методом базисних вузлів за нові змінні (нові узагальнені координати)  $\{ q \}$  приймаються переміщення деякої сукупності вузлів вихідної СЕМО, що довільним чином розташовані у сітковій області моделі (тобто довільним чином виділені із повного набору вузлів моделі). Ці вузли називаються базисними (або опорними) вузлами редукованої СЕМО. Згідно з методом базисних вузлів компонентами матриці  $[U]$  є так звані базисні вектори. Побудова базисних векторів виконується шляхом розв'язання основної системи на змушені одиничні переміщення накладених в'язей у базисних вузлах моделі. Таким чином, число ступенів свободи  $\Omega$  редукованої моделі відповідає числу переміщень тільки заданої (спеціально вибраної) сукупності базисних вузлів, а число компонент базисних векторів, що входять до складу матриці перетворень  $[U]$  у (5), збігається з числом ступенів свободи повної СЕМО. Таким чином, побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної СЕМО. Методика побудови матриці перетворень  $[U]$  докладно описана в [3, 4].

За своєю суттю, отримане після редукування матричне рівняння (4) є системою звичайних диференціальних рівнянь за часовою координатою. Ця система є зв'язаною, і тому одним із варіантів побудови її загального розв'язку, що визначає поведінку редукованої моделі за часом, полягає в перетворенні зв'язаної системи диференціальних рівнянь до незв'язаної. Це можливо, оскільки матриці мас  $[\tilde{M}]$  і жорсткості  $[\tilde{K}]$  в співвідношенні (4) є симетричними та додатно-визначеними величинами, а також є редукованими завдяки застосуванню методу базисних вузлів. Після низки перетворень [5] остаточно отримуємо  $\Omega$  задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, тобто

$$\frac{d^2 \{ {}^t q^{**} \}}{dt^2} + \lambda_i^{K*} \{ {}^t q^{**} \} = \{ {}^t P^{**} \}, \quad (i = \overline{1, \Omega}), \quad (7)$$

$$\{ {}^{t=t_0} q^{**} \} = \{ {}^{t_0} q^{**} \}, \quad \{ {}^{t=t_0} \dot{q}^{**} \} = \{ {}^{t_0} \dot{q}^{**} \}.$$

Розв'язання кожної окремої задачі Коші виконується за методом Рунге-Кутти четвертого порядку точності. Враховуючи, що метод Рунге-Кутти орієнтований на розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, застосуємо стандартну процедуру (вводячи нові змінні – вузлові швидкості  $\{ {}^t v^{**} \}$ ) і подамо систему (7) у вигляді  $2\Omega$  рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d \{ {}^t q_j^{**} \}}{dt} = \{ {}^t v_j^{**} \}, \\ \frac{d \{ {}^t v_i^{**} \}}{dt} = -\lambda_{(i)}^{K*} \{ {}^t q_i^{**} \} = \{ {}^t P_i^{**} \}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \Omega}; \quad i = \overline{\Omega+1, 2\Omega}. \quad (8)$$

з початковими умовами вигляду  $\{t=\tau q_i^{**}\} = \{\tau q_i^{**}\}$ ,  $\{t=\tau v_j^{**}\} = \{\tau v_j^{**}\}$ .

Для кожного моменту часу після знаходження розв'язків відповідних  $\Omega$  задач Коші (значення компонент векторів переміщень  $\{t q_i^{**}\}$  і швидкостей  $\{t v_j^{**}\}$ ) виконується зворотній перехід від знайденого переміщення  $\{t q^{**}\}$  до переміщення  $\{t q\}$ , що визначає шуканий розв'язок для редукованої системи рівнянь (4). Підставляючи знайдений розв'язок  $\{t q\}$  у формулу перетворень (5), знаходимо переміщення вузлів вихідної СЕМО, за якими визначається напружено-деформований стан неоднорідної оболонки в момент часу, що розглядається.

**3. Аналіз розрахунку за методом базисних вузлів власних коливань циліндричної панелі.** Ефективність застосування методу базисних вузлів показана на класичному тестовому прикладі – визначення власних коливань циліндричної консольної панелі (рис. 1) [6]. Ця задача використовується дослідниками для тестової апробації різних СЕ у задачах динаміки.

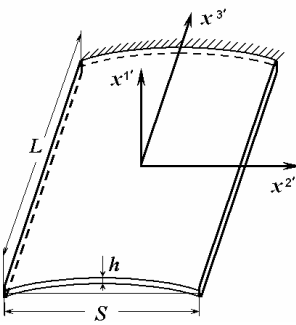


Рис. 1

Вихідними геометричними даними є: розмір панелі у плані  $L = S = 0.3048$  м, радіус кривизни  $R = 0.6096$  м, товщина панелі  $h = 0.003048$  м; характеристики матеріалу такі:  $E = 0.2 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup> модуль пружності,  $\nu = 0.3$  коефіцієнт Пуассона,  $\rho = 0.704 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup> питома густина.

Спочатку задача була розв'язана методом ітерації підпростору (МПП), як найбільш розробленого і апробованого, для нередукованої СЕМО з метою аналізу та подальших порівнянь розв'язків, отриманих за методом базисних вузлів, та оцінки їхньої точності. Порівняння збіжності розв'язків задачі для восьми нижчих частот, що отримані за ПІМ, виконано з розв'язком при сітці  $30 \times 30$  СЕ. Для розглядуваних частот гарний результат дає використання рідкої сітки  $10 \times 10$  СЕ. Для СЕМО з розбиттям  $15 \times 15$  СЕ різниця не перевищує 2%.

Таблиця 1

Порівняння розв'язків, що отримані різними авторами

№ тону	сітка $20 \times 20$ МССЕ, Гц	сітка $30 \times 30$ МССЕ, Гц	сітка $20 \times 20$ SCAD, Гц	сітка $20 \times 20$ Голованов [6], Гц	Експеримент Olson, Linberg [6], Гц
1	89.658	89.494	91.0345	89.5	85.60
2	145.23	144.99	146.94	144	134.50
3	256.91	256.11	256.02	258	258.90
4	359.28	357.82	364.03	359	350.60
5	401.74	400.45	404.81	406	395.20

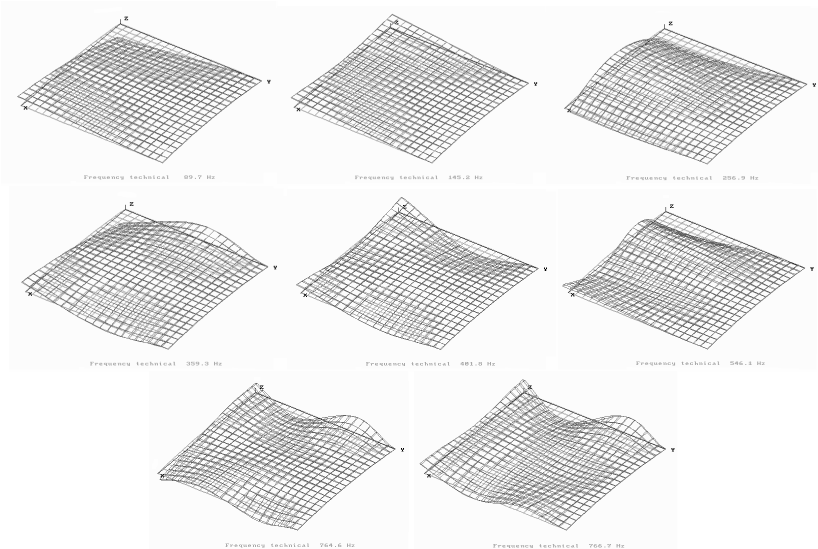


Рис. 2

Порівняння результатів розрахунку п'яти власних частот та відповідних форм коливань, обчислених авторами за МССЕ, з отриманими у роботах інших авторів, а також за допомогою програмного комплексу SCAD, добре узгоджуються між собою (табл. 1). Форми, що відповідають першим восьми частотам власних коливань панелі, приведено для СЕМО з сіткою  $20 \times 20$  СЕ (рис. 2). Для кожної форми нижній правий край є жорстко затиснутим.

Таблиця 2

Збіжність розв'язків за кількістю БВ при сітці  $20 \times 20$  СЕ

№	12 БВ, Гц	$\Delta$ , %	16 БВ, Гц	$\Delta$ , %	20 БВ, Гц	$\Delta$ , %	МШ, Гц
1	90.153	0.55	89.850	0.21	89.809	0.17	89.658
2	147.18	1.34	146.04	0.56	145.84	0.42	145.23
3	268.00	4.32	263.79	2.68	259.58	1.04	256.91
4	380.71	5.96	373.96	4.09	367.91	2.40	359.28
5	433.42	7.88	420.75	4.73	414.52	3.18	401.74
6	616.37	12.85	580.31	6.25	568.21	4.03	546.17
7	938.02	22.69	842.61	10.21	827.73	8.26	764.56
8	962.32	25.52	853.75	11.36	828.27	8.03	766.68

Аналіз збіжності розв'язків задачі, що отримані методом базисних вузлів (табл. 2), виконано за кількістю базисних вузлів (БВ). Порівняння виконано з відповідним розв'язком, що знайдено при використанні методу ітерацій підпростору. У табл. 2 наведено результати розрахунку при сітці  $20 \times 20$  СЕ для вихідної СЕМО. Оскільки задана кількість базисних вузлів визначає ступінь свободи редукованої СЕМО, тому отримані результати демонструють ефективність розробленого методу.

**4. Аналіз нестационарної реакції балки на дію короткочасного навантаження.** Дослідження нестационарних коливань тонкостінної конструкції від дії короткочасного навантаження проведено на прикладі шарнірно опертої балки (рис. 3).

Вихідні дані взяті відповідно до [7]. Геометричні характеристики балки: довжина  $l = 800$  см, ширина  $b = 40$  см та висота перерізу  $h = 80$  см; характеристики матеріалу (бетон марки М100): модуль пружності  $E = 3 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ , питома густина  $\rho = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; інтенсивність імпульсу  $P_0 = 8 \cdot 10^8$  Н, час його дії  $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$  с. Для даного одновимірного елемента конструкцій за точні вважались результати, для яких у [7, 8] балки моделювалися як стержні, і для яких у [8] наведено аналітичні розв'язки.

У роботі моделювання балки виконувалося просторовим універсальним СЕ, який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла [1, 2]. Згідно з вихідними даними балка при апроксимації просторовим СЕ умовно відповідає оболонці середньої товщини, оскільки  $h/l = 10^{-1}$ , що є верхньою границею можливостей методики.

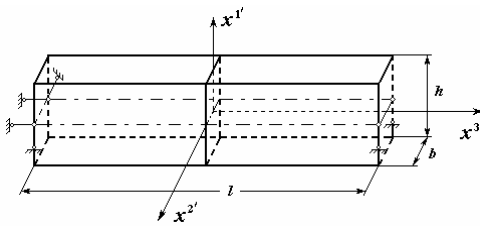


Рис. 3

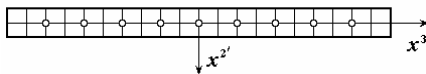


Рис. 4. СЕМО балки та вибрані базисні вузли

Виходячи зі складного виду деформування балок [7, 8], за розрахунків приймалися скінченно-елементні моделі балки з сітками  $2 \times 20$ ,  $2 \times 32$  та  $2 \times 40$  СЕ. При побудові редукованої моделі задачі використовувалося 9, 15 та 19 базисних вузлів. На розрахунковій схемі (рис. 4) для сітки  $2 \times 20$  СЕ показано вибір опорних точок методу базисних

вузлів в площині серединної поверхні  $x^2x^3$ .

Відслідковувалися компоненти вектора переміщень у центрі балки на заданому часовому інтервалі у вигляді діаграм «амплітуда – час» (« $u^1 - t$ ») та форми деформування у характерні моменти часу. Переміщення  $u^1$  є вузловим переміщенням на серединній поверхні балки.

#### 4.1. Рівномірно розподілений по довжині балки миттєвий імпульс.

На всіх ділянках діаграми «амплітуда – час» (рис. 5 (а)) спостерігається гарний збіг розв'язків при усіх сітках. Порівняння діаграми « $u^1 - t$ », що отримана за МССЕ, з результатами SCAD [7] показує практично повний їх збіг із незначним розходженням у верхній точці кривої (рис. 5 (б)), що відповідає максимальній амплітуді коливань.

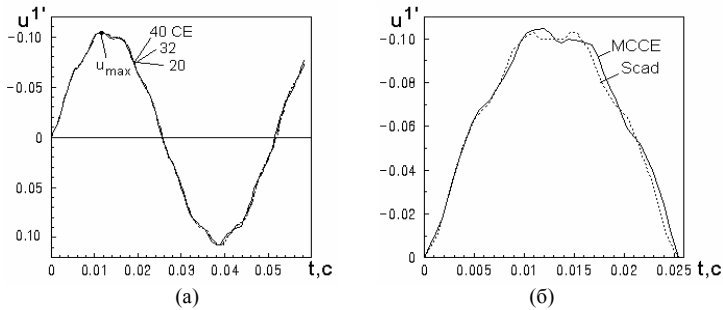


Рис. 5. Діаграми « $u' - t$ »: (а) для різних сіток CE; (б) порівняння з розв'язком [7]

Маємо гарний збіг розв'язків за амплітудою коливань (рис. 6): на інтервалі дії імпульсного навантаження  $t \in [0, \tau]$  – на середині  $t = \tau/2$  та на кінці  $t = \tau$  проміжку часу його дії, а також у момент часу, що відповідає  $u_{max}$ .

При  $t \in [0, \tau]$  спостерігається крайовий ефект переміщень балки біля її кінців. Для першої більш рідкої сітки ефект хвильової деформації поширюється майже на всю довжину балки. Порівняння в момент часу  $t = t_{u_{max}}$  прогинів балки, що отримані з використанням МССЕ та ПК SCAD, показало практично повний їх збіг.

Як достатню для СЕМО балки можна взяти сітку  $2 \times 32$  CE.

**4.2. Зосереджений миттєвий імпульс, що прикладений в середині прольоту балки.** Діаграми « $u' - t$ », що відповідають випадку дії зосередженого імпульсу (рис. 7 (а)), мають більш складний вигляд, ніж при дії рівномірно розподіленого. Маємо досить гарний збіг розв'язків для усіх сіток. Незначну розбіжність діаграм, отриманих за МССЕ і в [8] (рис. 7 (б)), можна віднести до особливостей застосування уточненої методики МССЕ [1, 2], що використовує просторові скінченні елементи і розглядає балку як тривимірне тіло, у той час, коли в [7, 8] балка розглядалась як стержень.

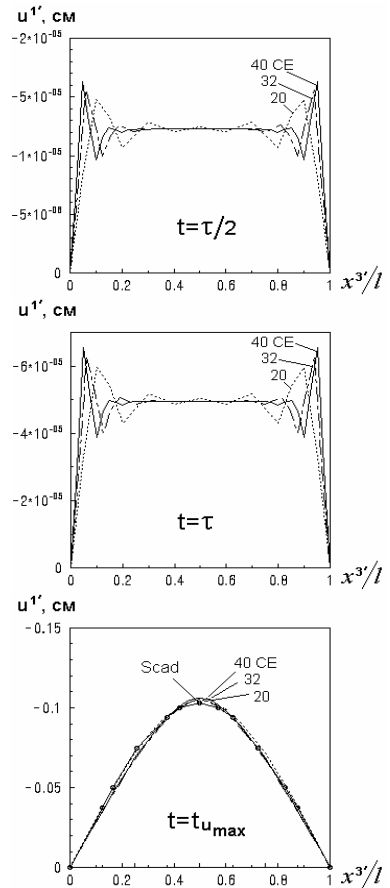


Рис. 6. Епюри прогинів у різні моменти навантаження  $t q$



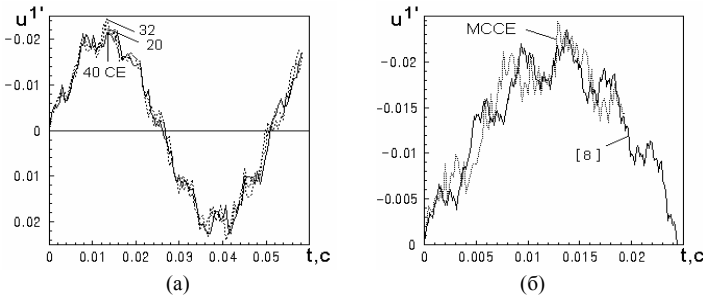


Рис. 7. Діаграми « $u' - t$ »: (а) для різних сіток CE; (б) порівняння з розв'язком [8]

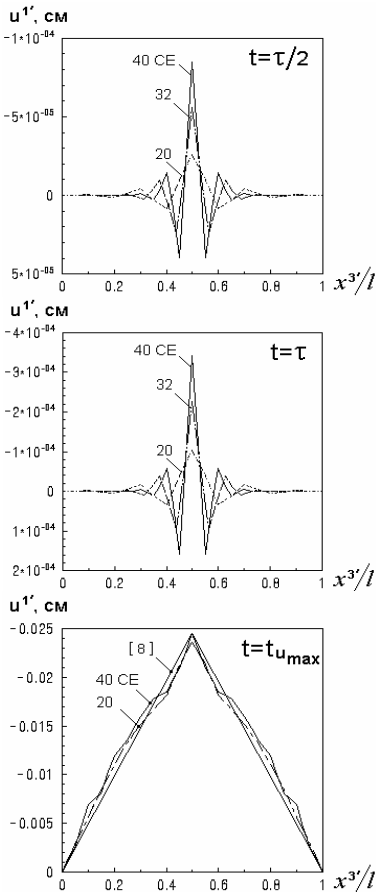


Рис. 8. Епюри прогинів у різні моменти миттєвого навантаження

Аналіз форм деформування балки для різних сіток показав гарний збіг розв'язків у різні моменти часу (рис. 8). Для моменту часу  $t = t_{u_{max}}$ , коли амплітуда коливань балки досягає максимуму  $u'_{max}$ , форма деформування набуває більш простого вигляду. Порівняння епюр з результатами роботи [7, 8] показало гарний збіг розв'язків. Більш ускладнений вигляд епюри, яка отримана за МССЕ, можна пояснити використанням просторового CE [1, 2] для апроксимації балки. Для цього випадку навантаження за достатню можна прийняти сітку  $2 \times 40$  CE.

### Висновки.

Запропоновано метод розв'язання задач про нестационарні коливання оболонок неоднорідної структури при дії короточасних динамічних навантажень. Метод побудовано на основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки та створеної на її базі редукованої моделі за методом базисних вузлів. Застосування методу базисних вузлів забезпечило можливість переходу від зв'язаної системи диференціальних рівнянь, що описує рух системи, до системи незв'язаних рівнянь, розв'язок

якої знаходиться за добре розробленим чисельним методом Рунге–Кутти.

На прикладі тонкої консольної циліндричної панелі досліджено збіжність розв'язків, що отримані на базі методу базисних вузлів, та проведено порівняння з результатами, отриманими за допомогою програмного комплексу SCAD.

Ефективність побудованої методики дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень продемонстровано на прикладі розрахунку балки сталого поперечного перерізу на дію різних імпульсних навантажень. На тестових задачах показана можливість застосування розробленого методу для оцінки впливу короткочасного навантаження на поведінку тонкостінної конструкції.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Bazhenov V., Krivenko O.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2018. – 97 p.
4. *Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованих скінченноелементних моделей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 72-88.
5. *Чибіряков В.К., Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Деформування пружних неоднорідних оболонок під дією нестационарних динамічних навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 123-141.
6. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
7. ScadSoft: Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/68](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68)
8. *Рабинович И.М., Силицын А.П., Лузин О.В., Теренин Б.М.* Расчет сооружений на импульсивные воздействия. – М.: Из-во по строительству, 1970. – 303 с.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* Nelineine deformuvannya ta stiikest pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure). – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structures: Models, methods, algorithms, poorly-studied and new problems). – M.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Bazhenov V., Krivenko O.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2018. – 97 p.
4. *Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Analiz vlasnykh obolonok neodnorodnoi struktury z vykorystanniam redukovanykh skinchennoelementnykh modelei (Analysis of natural vibrations of shells with inhomogeneous structure using reduced finite element models)// Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2017. – Vyp. 98. – S. 72-88.
5. *Chybiriakov V.K., Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Deformuvannya pruzhnykh neodnorodnykh obolonok pid diieiu nestatsionarnykh dynamichnykh navantazhen (Deformations of elastic inhomogeneous shells under the action of non-stationary dynamic loads) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2017. – Vyp. 99. – S. 123-141.

6. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsey (Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures). – М.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
7. ScadSoft: Svobodno opertaya balka s raspredelennoy massoy pod deystviem ravnomerno raspredelenного mgnovennogo impulsa (udar balki o nepodvizhnyie oporyi) (A simply supported beam with a distributed mass under the action of a uniformly distributed instantaneous pulse (impact of a beam on fixed supports) [Elektroniy resurs]. – Rezhim dostupu [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/68](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68).
8. *Rabinovich I.M., Sinitsyn A.P., Luzhin O.V., Terenin B.M.* Raschet sooruzheniy na impulsivnyie vozdeystviya (Calculation of constructions at impulsive effects). – М.: Iz-vo po stroitelstvu, 1970. – 303 s.

*Стаття надійшла 30.10.2018*

*Krivenko O. P., Vorona Yu. V.*

#### **ANALYSIS OF NON-STATE REACTION OF ELASTIC SHELL TO IMPULSE LOAD**

An effective numerical method for studying non-stationary vibrations of thin elastic shells is proposed. The method is based on the finite element model of a thin elastic inhomogeneous shell and the reduced model created on its basis for the dynamics problems.

The finite-element shell model is based on the relations of the three-dimensional theory of thermo-elasticity and is developed with the use a tensor calculus apparatus, a geometrically nonlinear formulation of the problem in increments and the application of the moment finite-element scheme. To develop the finite-element shell model we approximate a thin shell by one spatial finite element throughout the thickness which is an efficient approach. The structural elements of an inhomogeneous shell require the finite element to be universal: it should be eccentrically arranged relative to the mid-surfaces of the casing (of the shell's sections without stepwise-variable thickness), it should be possible to vary the thickness of the lateral edges of the finite element; the lateral edges of the neighboring finite elements should be in continuous contact; and it should be possible to model sharp bends and the multilayer structure of the shell. The universal finite element is based on an isoparametric spatial finite element with polylinear shape functions for coordinates and displacements. Additional variable parameters are introduced to enhance the capabilities of the modified finite element. Two hypotheses are used to describe the features of the stress-strain state of a thin inhomogeneous shell. The first static hypothesis assumes that the compressive stresses in the fibers throughout the thickness are constant. The next is the nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line: though stretched or shortened during deformation, a straight segment along the thickness remains straight. This segment is not necessarily normal to the mid-surface of the shell.

The method for studying non-stationary vibrations of the shells under the action of short-term loads is based on the application of reduced models. The use of the basic nodes method allowed us to develop a simple and effective algorithm for solving this problem. We have transformed a system of coupled differential equations describing the motion of a shell to independent ones. The solution of obtained Cauchy problems is easily found by the well-developed Runge-Kutta numerical method.

The possibility of applying the developed method to assess the effect of short-term load on the behavior of a thin-walled structure is shown on the test problems. Convergence of solutions is investigated and a comparison with theoretical data and results obtained with the help of the SCAD software is made.

#### **Keywords:**

thin elastic shell, universal solid finite element, reduced model, impulse load.

*Krivenko O.P., Vorona Yu.V.*

#### **АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ НА ИМПУЛЬСНУЮ НАГРУЗКУ**

Приведена методика исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Методика построена на основе конечно-элементной модели тонкой упругой неоднородной оболочки и созданной на ее базе для задач динамики редуцированной модели. Выполнено сравнение решений результатам расчетов, полученных с помощью программного комплекса SCAD.

**Ключевые слова:** тонкая упругая оболочка, универсальный пространственный конечный элемент, редуцирована модель, импульсная нагрузка.

УДК 539.3

*Кривенко О.П., Ворона Ю.В. Аналіз нестационарної реакції пружної оболонки на імпульсне навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 101. – С. 26-37.*

*Наведено методу дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Виконано порівняння розв'язків з результатами розрахунків, що отримані за допомогою програмного комплексу SCAD.*

Табл. 2. Іл. 8. Бібліогр. 8 назв.

UDC 539.3

*Krivenko O.P., Vorona Yu.V. Analysis of non-state reaction of elastic shell to impulse load // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 101. – P. 26-37. – Ukr.*

*A method for investigating the non-stationary vibrations of shells with an inhomogeneous structure under the action of short-term dynamic loads is presented. Comparison of solutions with the results obtained using the SCAD software package is given.*

Tabl. 2. Fig. 8. Ref. 8.

УДК 539.3

*Кривенко О.П., Ворона Ю.В. Анализ нестационарной реакции упругой оболочки на импульсную нагрузку // Сопроотивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 101. – С. 26-37. – Укр.*

*Приведена методика исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Выполнено сравнение решений результатам расчетов, полученных с помощью программного комплекса SCAD.*

Табл. 2. Ил. 8. Библиогр. 8 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КРИВЕНКО Ольга Петрівна

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29.

**Мобільний тел.:** +38(066) 048-32-77,

**E-mail:** [olakop@ukr.net](mailto:olakop@ukr.net).

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки КНУБА, ВОРОНА Юрій Володимирович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29.

**Мобільний тел.:** +38(050) 750-13-61

**E-mail:** [yuvv@ukr.net](mailto:yuvv@ukr.net).

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>