

УДК 539.3

О.І. Гуляр<sup>1</sup>, д-р. техн. наукС.О. Пискунов<sup>1</sup>, д-р. техн. наукО.О. Шкриль<sup>1</sup>, канд. техн. наук<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

## ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

На основі НМСЕ розроблено новий призматичний скінченний елемент з перемінною площею поперечного перерізу вздовж твірної, який за рахунок чисельного інтегрування повністю враховує змінність всіх величин в поперечному перерізі. Виявлено, що розроблений варіант СЕ дозволяє отримувати достовірні результати для призматичних тіл із змінною площею поперечного перерізу вздовж твірної.

**Ключові слова:** просторова задача, напіваналітичний метод скінчених елементів, матриця жорсткості, чисельне інтегрування, пружне деформування.

**Вступ.** Ефективність використання СЕ комплексів значною мірою визначається різноманітністю СЕ бази. В даній роботі реалізовано варіант скінченного елемента, матриця жорсткості і вузлові реакції якого визначаються на основі чисельного інтегрування в області поперечного перерізу.

**1. Скінченний елемент з чисельним інтегруванням в поперечному перерізі.** Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи  $N$  СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного призматичного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.1)$$

Представимо фізичні деформації через ненормовані коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перетині СЕ

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \xi_{ij};$$

де

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)}; \quad \xi_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \xi_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right) x^{(3-\alpha)}; \\ \xi_{33} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) x^{\alpha}. \end{aligned}$$

Тоді формулу (1.1) із використанням нефізичних компонентів напружень та деформацій представимо в матричному вигляді

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{ \xi \}^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} \{ \xi \}^T &= \{ \xi_{11} \quad 2\xi_{12} \quad \xi_{22} \quad 2\xi_{23} \quad 2\xi_{13} \quad \xi_{33} \}, \\ \{ \sigma \} &= \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{33} \}. \end{aligned}$$

Співвідношення (2.11) [1], що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами (2.3) [1], у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{ \xi \} = \sum_{l=0}^L \left( [B_1] \varphi^{(l)} + [B_2] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \};$$

де

$$\begin{aligned} \{ u \}_l^T &= \{ u_{l(-1;-1)}^T u_{l(1;-1)}^T u_{l(-1;1)}^T u_{l(1;1)}^T \}; \\ \{ u \}_{l(S_1, S_2)}^T &= \{ u_{1(S_1, S_2)}^l \} \{ u_{2(S_1, S_2)}^l \} \{ u_{3(S_1, S_2)}^l \}; \\ [B_\alpha] &= \left[ [B_\alpha]^{(-1;-1)} \quad [B_\alpha]^{(1;-1)} \quad [B_\alpha]^{(-1;1)} \quad [B_\alpha]^{(1;1)} \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Склад матриць  $[B_\alpha]^{(S_1, S_2)}$  є наступним:

$$\left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + (B_1)_1 x^2 & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + (B_1)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} \right) & \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + (B_1)_3 x^1 & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + (B_1)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} S_1 + (B_1)_5 x^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} S_2 + (B_1)_6 x^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_1)_1 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_1)_2 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime 2} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} h_{11,2};$$

$$(B_1)_3 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + \frac{S_2}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_1)_4 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime 2} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} h_{11,2};$$

$$(B_1)_5 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} h_{11,2};$$

$$(B_1)_6 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} h_{22,1}.$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + (B_2)_1 x^2 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + (B_2)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + (B_2)_3 x^1 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + (B_2)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} + (B_2)_5 x^1 + (B_2)_6 x^2 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_2)_1 = \frac{1}{4} \left( 2 S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_2)_2 = \frac{1}{4} \left( 2S_2 z_{,1}^{2'} + z_{,12}^{2'} \right) - \frac{1}{8} z_{,1}^{2'} h_{1,2};$$

$$(B_2)_3 = \frac{1}{4} \left( 2S_1 z_{,2}^{1'} + z_{,12}^{1'} \right) - \frac{1}{8} z_{,1}^{1'} h_{1,2};$$

$$(B_2)_4 = \frac{1}{4} \left( 2S_2 z_{,1}^{2'} + z_{,12}^{2'} \right) - \frac{1}{8} z_{,1}^{2'} h_{1,2};$$

$$(B_2)_5 = \frac{1}{2} S_1 z_{,3}^{3'}; \quad (B_2)_6 = \frac{1}{2} S_2 z_{,3}^{3'}.$$

Підставляючи (1.3) в (1.2), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення  $\{u\}$  та вузлові реакції  $\{r_\sigma\}$ :

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_\sigma\}, \quad (1.4)$$

де

$$\{r_\sigma\} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.5)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[ [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j H_k \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_k^3)}, \quad (1.6)$$

де  $I, J, K$  - кількість точок інтегрування по  $x_i^1, x_j^2, x_k^3$ , відповідно,  $H_i, H_j, H_k$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2, x_k^3$  - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (1.7)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці  $[D]$  визначаються згідно формул (2.7) [1].

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.8)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу перемішень, отримуємо:

$$\delta W = \delta\{u\}^T [k] \{u\}, \quad (1.9)$$

де  $[k]$  - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.10)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{\kappa=1}^K [B]^T [D] [B] \sqrt{g} H_i H_j H_\kappa \Big|_{(x_i^1, x_j^2, x_\kappa^3)}. \quad (1.11)$$

**2. Контрольні приклади.** Для обґрунтування достовірності розробленого підходу для призматичних тіл було розглянуто тестовий приклад про деформування в умовах плоскої деформації в площині  $z^1 - z^3$  стержня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (рис. 1). Зміна площі в даному випадку є тотожною зміні характерного розміру перерізу в напрямку в напрямку  $z^1$ . Модуль пружності  $E = 0.1 \text{ МПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . В дискретній моделі МСЕ (рис. 2) розташування центрів СЕ вздовж вісі стержня збігається із розташуванням точок інтегрування в дискретній моделі НМСЕ. Дискретна модель НМСЕ утворена із використанням одного призматичного СЕ змінної площі поперечного перерізу і за виглядом повністю ідентична розрахунковій схемі.

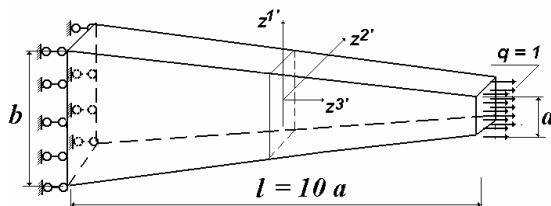


Рис. 1. Розрахункова схема призматичного стержня зі змінною площею поперечного перерізу в умовах розтягу

При розгляді розтягу стержня (рис. 1) співвідношення площ торцевих

перерізів прийнято 2:1 ( $b=2a$ , співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини становило 1/10).

Отримані результати – розподілення напружень  $\sigma_{z^3}$  і переміщень  $U^{z^3}$  вздовж вісі стержня (за напрямком  $z^{2'}$  – в МСЕ і  $z^{3'}$  в НМСЕ) наведені на рис. 2. Із використанням МСЕ і НМСЕ отримані тотожні результати розподілення переміщень і напружень вздовж вісі СЕ, похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1%.

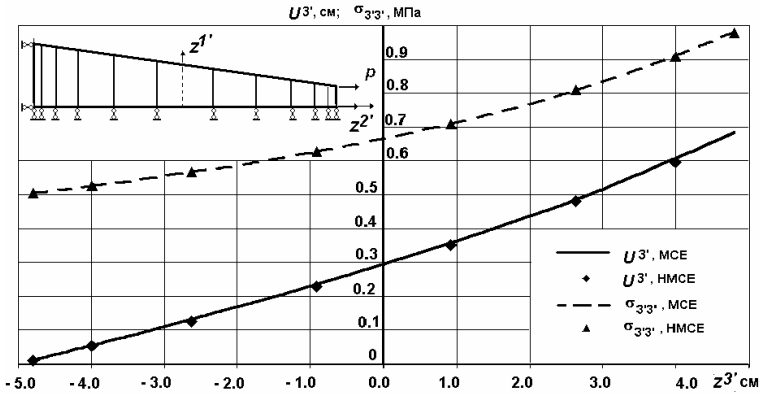


Рис. 2. Розподілення параметрів напружено-деформованого стану в стержні змінної площі поперечного перерізу

При розв'язанні тестової задачі про згин шарнірно обпертої балки змінної площі поперечного перерізу під впливом розподіленого навантаження (рис. 3) співвідношення площ торцевих перерізів становило 1,5:1 ( $b=1,5a$ , співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини становило 1/20).

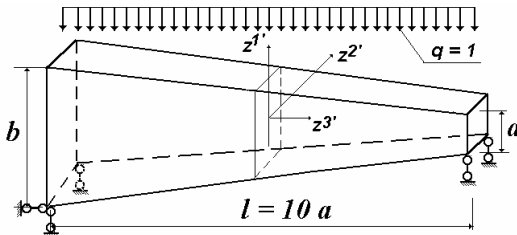


Рис. 3. Розрахункова схема призматичного стержня зі змінною площею поперечного перерізу в умовах згину

Використані при розв'язанні задачі дискретні моделі є такими ж, як і

випадку розтягу. Результати, отримані із використанням МСЕ і НМСЕ також добре узгоджуються, що підтверджується отриманими розподіленнями прогинів по довжині балки (рис. 4) і розподіленням напружень по висоті в найбільш навантаженому перерізі (рис. 5). Збільшення співвідношення площ перерізів до 2:1 (як у випадку розтягу) призвело до більших відмінностей у величинах максимальних напружень – до 10-12%.

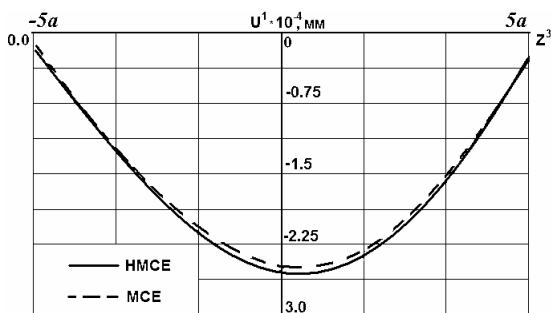


Рис. 4. Результати розподілу прогинів по довжині балки змінної площі поперечного перерізу при згині

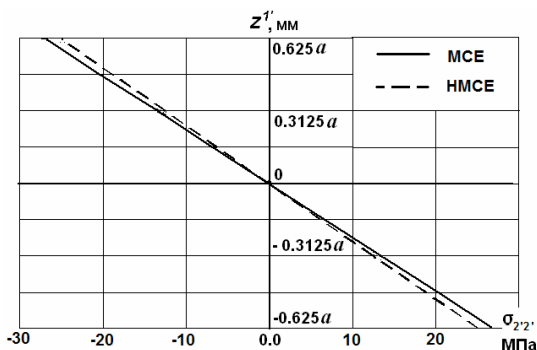


Рис.5. Розподілення напружень по висоті в найбільш навантаженому перерізі балки

Таким чином, отримані результати свідчать, що розроблені призматичні СЕ змінної площі поперечного перерізу дозволяють отримувати достовірні результати як для випадку розтягу так і для згину. Межі зміннення площі, при якій отримувані результати є достовірними для випадку згину є обмеженими, тому використання цих СЕ в певних випадках потребує попереднього дослідження достовірності результатів.

На основі аналізу отримуваних розв'язків тестових задач вперше

показано, що урахування змінності визначника метричного тензора в напрямку утворюючої забезпечило достовірне визначення напружено-деформованого стану призматичних тіл із змінною площею поперечного перерізу при різних видах напруженого стану.

Таким чином, розроблений в даному розділі на основі НМСЕ апарат чисельного визначення напружено-деформованого стану просторових тіл із змінними фізико-механічними та геометричними параметрами дає можливість створення ефективних підходів до розв'язання задач дискретного руйнування неоднорідних призматичних просторових тіл складної конфігурації з довільними граничними умовами на торцях.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкріль О.О.* Основні положення моментної схеми для напіваналітичного варіанта призматичного скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд, № 91, 2013. – С.3-12.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Pyskunov S.O., Shkryl' O.O.* Osnovni polozhennya momentnoyi skhemy dlya napivanalitychnoho varianta pryzmatychnoho skinchennoho elementa (The main provisions of the scheme for the moment semianalytic option prismatic finite element) // Opir materialiv i teoriya sporud, # 91, 2013. – S.3-12

*Стаття надійшла до редакції 27.01.2014 р.*

*Гуляр А.І., Пискунов С.О., Шкріль А.А.*

#### **ПРИЗМАТИЧЕСКИЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

На основе полуаналитического метода конечных элементов создан новый конечный элемент с переменной площадью поперечного сечения вдоль образующей, который за счет численного интегрирования полностью учитывает переменность всех величин в поперечном сечении. Показано, что полученный вариант конечного элемента позволяет получать достоверные результаты для призматических тел с переменной площадью поперечного сечения вдоль образующей.

**Ключевые слова:** пространственная задача, полуаналитический метод конечных элементов, матрица жесткости, численное интегрирование, упругое деформирование.

*Guliar A.I., Piskunov S.O., Shkryl' A.*

#### **PRISMATIC END ITEM ON THE BASIS OF MOMENT FINITE ELEMENTS SCHEMES**

Based on the semianalytical finite element method, a new finite element with a variable cross-sectional area along a generator, which is due to take fully into account the numerical integration of the variability of all the variables in cross-section. It is shown that the resulting variant finite element allows to obtain reliable results for the prismatic bodies with variable cross-sectional area along a generatrix.

**Keywords:** spatial problem semianalytic finite element method, stiffness matrix, numerical integration, the elastic deformation.