

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ТРОХОЇДАЛЬНОЇ МОДЕЛІ МОРСЬКИХ ХВИЛЬ З МЕТОЮ ВИКОРИСТАННЯ ЇХ ЕНЕРГІЇ

Національний університет цивільного захисту України

Наведено якісний аналіз геометричного моделювання профілів морських хвиль у товщі та на поверхні води, розробленого на основі трохойдальної моделі формоутворення цих хвиль.

Постановка проблеми. Використання енергії морських хвиль займає одне з чільних місць у низці поновлювальних джерел енергії. В основі функціонування хвильових енергетичних станцій лежить силовий вплив хвиль на робочі органи, виконаних у вигляді поплавків, маятників, лопаток, оболонки, тощо. Механічна енергія їх переміщень перетворюється в електричну за допомогою спеціально розроблених електрогенераторів. Загальноприйнятою вважається точка зору, згідно з якою енергію хвиль доцільно використовувати у відкритому морі, а не біля берегів, де рівень зазначеної енергії суттєво знижується внаслідок тертя води об дно та зворотної циркуляції води. Для обґрунтування схеми практичного використання цього різновиду джерела енергії необхідно мати якісну картину формоутворення профілів хвиль залежно від глибини. Дана робота являє собою певний крок до розв'язання цієї проблеми.

Огляд відомих результатів. Профіль морської хвилі віддалено нагадує плоску синусоїду, яка є розв'язанням певного класу диференціальних рівнянь. Класичний підхід при складанні зазначених рівнянь полягає в намаганні враховувати переміщення часток води з позицій механіки суцільного середовища. Тому дослідження хвиль з позицій механіки розвивалися у напрямку ускладнення вигляду (нелінійності) диференціальних рівнянь з метою одержання розв'язків, більш адекватних дійсності.

Принципово іншим шляхом досліджень є геометричне моделювання профілів хвиль. Вигляд руху водяних часток під час хвилювання товщі води вперше було знайдено експериментальним шляхом братами Веберами [1, 2]. Ці спостереження були підтверджені теоретичними дослідженнями Роселя, Сен-Венана, Бусінеска, Ері. Було виявлено такі властивості хвиль [4-6]: у підповерхневому прошарку рідини частки рухаються за еліптичними траєкторіями; рух часток з траєкторіями у вертикальних площинах здійснюється в одній фазі; у товщі води хвилі не викликають масопереніс рідини; потужність, яка переноситься хвилями, пропорційна квадрату їх амплітуди й періоду.

Постановка задачі. Навести якісний аналіз геометричного моделювання профілів морських хвиль у товщі та на поверхні води, розроблений на основі трохойдальної моделі формоутворення цих хвиль.

Основна частина. Відомо, що висота хвиль, утворена падінням каменя на поверхню води, швидко убуває з відстанню r від місця падіння каменя. Можна назвати відразу дві головні причини, що ведуть до ослаблення хвиль. Перша пов'язана з розходженням кругових хвиль: збереження потоку енергії веде до падіння амплітуди (висоти) хвилі за законом $H \sim r^{-1/2}$. Інший ефект менш тривіальний: швидкість хвиль на воді залежить від їхньої довжини (у більш довгих хвиль і швидкість більше); у результаті з відстанню хвилі стають більш довгими.

У цьому випадку виявляється дисперсія хвилі, коли початкове збурення, утворене в місці падіння каменя, «розтаскується» на спектральні компоненти. Кожна із хвиль рухається зі своєю швидкістю, і вперед виходять більш довгі. Цей ефект можна пояснити на прикладі задачі, коли мандрівники A і B виходять із одного пункту з різними швидкостями в одному напрямку й відстань між ними згодом зростає лінійно. Переходячи тепер до великої кількості таких мандрівників, швидкості яких різні, легко зрозуміти, що «щільність» мандрівників (їх число на один метр) падає з відстанню від вихідного пункту. Аналогічні оцінки для хвиль, виходячи із закону збереження енергії, також приводять до залежності $H \sim r^{-1/2}$. Спільний вплив цих двох причин веде до сумарного ослаблення висоти хвилі (внаслідок дисперсії й розходження) за законом $H \sim r^{-1}$.

Теорія трохоїдальних хвиль, розроблена Герстнером у 1802 р., за простотою своїх рішень і відповідності спостережуваному характеру хвиль брижі в природі, знайшла широке застосування й зберегла своє значення по теперішній час, особливо при розв'язанні різних інженерних питань. Побудова трохоїди по точках є очевидною. При зміні відстані r розглянутої точки від центра кола, що котиться, від 0 до R , форма трохоїди буде змінюватися - від прямої (при $r = 0$) до циклоїди (при $r = R$).

Форма трохоїди близько підходить до формі хвиль брижі, висота гребеня її більше, ніж глибина западини, тобто ця крива на відміну від синусоїди не симетрична відносно горизонтальної осі. Зіставлення трохоїди з поверхнею хвилі брижі, отриманої у хвильовому лотку, показує досить близький збіг цих кривих.

Периметр кола, що котиться, $2\pi R$ повинен дорівнювати довжині хвилі, і відстань точки інтересу від центра кола, що котиться, повинна дорівнювати $h/2$, тобто половині висоти хвилі для часток, що лежать на поверхні води. Відповідно до теорії трохоїдальних хвиль, кожна частка рідини робить рух по дузі кола радіуса R , величина якого убуває зі збільшенням глибини. Таким чином, схема руху часток по Герстнеру буде мати вигляд, показаний на дослідах братів Веббів [1,2].

Вся теорія трохоїдальної хвилі формулюється у вигляді таких положень:

- хвилеподібна поверхня трохіодального профілю може служити поверхнею рівня рідини, частки якої рухаються рівномірно по кругових орбітах, розташованих у вертикальній площині,
- формоутворення хвилі підпорядковується нерозривності, рівнянню гідродинамічної рівноваги й граничним умовам;
- теорія справедлива не тільки для хвиль нескінченно малої висоти (як більшість із теорій хвильових рухів рідини), але й для хвиль кінцевої висоти.

Однак можливість існування руху рідини, що підкоряється цим положенням, не доводить ще, що рух рідини при хвилях брижів відбуваються саме за цією схемою. Особливе значення через це має зіставлення результатів даної теорії зі спостереженнями над явищем у природі. Проводилося зіставлення форми поверхні хвилі брижі, отриманої в лабораторних умовах, з теоретичною трохіодою, що показує досить близький збіг теорії з природою. Ще більше значення має перевірка основних залежностей між елементами хвилі, отриманими з теорії трохіодальних хвиль із тими ж значеннями в природі.

Саме тому, при розв'язанні інженерних питань дотепер всі дослідники дії хвиль на спорудження й береги користувалися рівняннями теорії трохіодальних хвиль, що підкуповує своєю простотою. Все сказане тут, однак, аж ніяк не применшує наукового значення точних математичних рішень хвильових рухів. Варто лише побажати, щоб подальші дослідники довели їх до більше зручних для практичного застосування форм.

Більшість дослідників виходили із припущення про нескінченно малу висоту хвилі, що дозволяло спрощувати рішення, зневажаючи членами, що містять висоту в ступені 2 і вище. Однак хвилі, що виникають на поверхні морів і океанів під впливом сил вітру, не задовольняють цій умові, тому що - у них є величиною кінцевої, тому, застосовуючи до них виводи, засновані на розгляді нескінченно малих хвиль, ми робимо, помилку, величина якої тим більше, чим більше відношення хвилі до глибини.

Слід зазначити, що теорія трохіодальних хвиль на необмеженій глибині розв'язує завдання про поступальну хвилю (хвилі брижів) точно при кінцевій висоті хвилі, тому що вона повністю задовольняє рівнянням гідродинаміки. Єдине заперечення, що виставлялося критиками теорії трохіодальних хвиль, полягає в тому, що ці хвилі вихрові, тобто не мають потенціалу швидкості.

Висловлювалася думка що період хвилі не є постійним і змінюється при підході до берега. У зв'язку із цим варто висловити такі міркування. Зміна періоду хвилі є ні що інше, як зміна числа хвиль, що проходять в одиницю часу через певні створи. Така зміна може бути лише при загасанні окремих хвиль або утворенні з однієї хвилі двох або декількох. Це можливо й дійсно має місце в природі, коли хвиля розбивається й

рухається далі до берега у вигляді «розбитої» хвилі. Тут можливі як загасання окремих хвиль у момент розбивання їх, так і поділ однієї хвилі на дві або трохи.

У тих випадках, коли глибина води така, що позначається вплив дна на хвилювання, застосовувати рівняння руху, що припускають необмежену (нескінченну) глибину, не можна. При рівному характері дна варто вважати, що для практичних цілей треба переходити до формул, що враховують обмежену глибину при $H = L$ відносна помилка буде дорівнює нескінченності. Форма хвильової поверхні визначається еліптичною трохойдою, тобто кривою, що представляє слід точки, яка рухається по еліпсу, що у той же час переміщається з постійною швидкістю уздовж осі.

Переходячи до аналізу отриманих результатів, зауважуємо наступне: траєкторії часток при хвилях брижів на обмеженій глибині, на відміну від хвиль, що поширюються на необмеженій глибині, мають форму еліпсів з більшою віссю, розташованої горизонтально. Відштовхуючись від вище сказаного, ми можемо зрозуміти теорію впливу обмеженої глибини на виникнення хвиль.

При цьому з переходом від поверхневих часток до часток, розташованих нижче рівня води, еліпси міняють свою форму. Причому вертикальні півосі еліпсів зменшуються значно швидше, ніж горизонтальні; таким чином, траєкторії часток із глибиною здобувають обрису усе більше витягнутих еліпсів і, нарешті, на дні при $z = H$ ці еліпси здобувають форму прямих, паралельні поверхні дна. Таким чином, донні частки випробовують лише коливальні рухи по прямої лінії навколо деякого центра, що збігає з їхнім положенням у стані спокою.

Хвиля являє собою одиночний гребінь, що рухається, швидкість і довжина якого залежать від висоти хвилі. Він одержав назву солітон (від англ. solitary wave - відокремлена хвиля). Головна особливість солітонов полягає в незмінності їхньої форми в процесі поширення, і, отже, такі хвилі можуть поширюватися на великі відстані без втрати своєї енергії. Роль подань про солітонів різко зросла, коли стало ясно, що якщо початкове збурення має іншу форму, то воно скидає все зайве у хвіст і трансформується у солітони, число яких визначається законами збереження (маси, енергії). Крім того, солітони зберігають свою форму при взаємодії із собі подібними.

Ефекти, які призводять до аномально довгого існування хвиль на воді (і у воді), можна пояснити за допомогою солітонів. Для цього необхідно проаналізувати фактори, здатні перешкодити швидкому ослабленню хвильового поля. По-перше, обмеження поширення хвилі тільки одною просторовою координатою, щоб ліквідувати її розходження у вигляді кругових хвиль. Найпростіший приклад - поширення хвилі в річці. У відкритому морі природними каналами (хвилеводами) служать підводні хребти й течії струминного типу. Однак, такі хвилеводи не можуть

перешкоджати ефектам дисперсії, і, отже, хвиля однаково послабляється (хоча й не так швидко) і її довжина зростає.

Іншим фактором, про яке необхідно згадати, є нелінійність. Під цим поняттям ми будемо мати на увазі залежність швидкості поширення хвилі від її амплітуди. У всіх лінійних моделях швидкість поширення визначається характеристиками середовища (наприклад, для хвиль на воді максимальна швидкість їхнього поширення, глибиною водойми). Тим часом глибина водойми під різними частинами хвилі різна: вона збільшується під гребенем і зменшується під западиною.

Загалом кажучи, швидкість поширення хвилі залежить від локальної глибини. Але це означає, що гребінь хвилі повинен рухатися швидше її западини й, отже, профіль хвилі буде спотворюватися: його передній фронт буде ставати усе більше крутим і зрештою хвиля повинна перекинутися (так обрушуються хвилі поблизу берега).

Тепер можна зрозуміти спільний вплив нелінійності й дисперсії на трансформацію хвиль. Розглянемо, наприклад, еволюцію гребеня. Нелінійність у чистому виді, як ми вже описали, хоче, так сказати, привести до того, щоб передній фронт ставав крутіше, і гребінь прагне наздогнати підніжжя. Дисперсія ж у чистому виді прагне розтаскати хвилю на її спектральні компоненти, щоб більше короткі хвилі відставали від тих, які більш довгі. Отже, нелінійність, що сприяє утворенню більше крутого фронту хвилі (з високочастотними гармоніками), і дисперсія, що прагне потягти короткі хвилі із крутого фронту, діють у протилежних напрямках. Але тоді можлива їхня взаємна компенсація, і форма хвилі в процесі поширення буде що не змінюється (стаціонарної).

На завершення розглянемо як і чому висота хвилі зі зменшенням глибини поступово убуває. Дійсно, поки хвиля брижів не розбита, енергія її убуває при поступальному русі дуже мало за рахунок внутрішнього тертя рідини й тертя часток об дно. Таким чином, для двох сусідніх ділянок, розташованих на шляху руху хвилі, енергія зберігається постійною. Тому при зменшенні глибин та ж сама кількість енергії повинна передатися меншому об'єму рідини, у зв'язку із чим висота хвилі повинна зрости, тому що енергія хвилі пропорційна квадрату висоти хвилі. Дійсно, енергія хвилі, що доводиться на одиницю поверхні хвиль, дорівнює енергії забурунування. Як тільки хвиля забурунування переходить у розбиту хвилю, завдяки, бурхливим вихровим явищам, які супроводжують обвалення хвилі, частина енергії хвилі гаситься.

Висновок. Наведене якісне дослідження трохоїдальних профілів хвиль дозволить спростити уявлення у часі профілів морських хвиль у товщі води та на її поверхні, що буде корисним в процесі конструювання хвильових енергетичних установок поплавкового та маятникового типу.

Література

1. *Островский Л.А.* Волны на поверхности жидкости. – Режим доступа: http://www.femto.com.ua/articles/part_1/0573.html
2. *Бобылев Д.* Волны. – Режим доступа: http://gatchina3000.ru/big/022/22681_brockhaus-efron.htm
3. *Дивизинюк М.М.* Математические закономерности формирования морских волн, определяющих акустические и антропогенные свойства приповерхностного слоя вод. / *М.М.Дивизинюк, Л.В.Третьякова, И.А.Плескачева, Е.А. Шрамкова* // Сб. науч. тр. – Севастополь: СНУЯЕтаП, 2010. - Вып. 24. – С. 236 - 242.
4. *Лионе Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.-Л.Лионе* - М.: Мир, 1972.
5. *Березин Ю.А.* О численных решениях уравнения Кортевега-де Вриза. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск / *Ю.А.Березин* 1973, т.4, е2, с.20-31
6. *Miura R.M.* Korteweg-de Vries equation and generalization. II. Existence of conservation laws and constants of motion. // *R.M.Miura, C.S.Gardner, M.D. Kruscal* / *J.Math.Phys.* 1968. V.9. P. 1204-1209.
7. *Куценко Л.М.* Геометричне моделювання трохохідальних хвиль на поверхні води / *Л.М.Куценко, О.О.Савченко* // Прикладна геометрія та інженерна практика. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 46. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С. 33 - 41
8. *Савченко О.О.* Побудова профілів морських хвиль на основі трохохідальної моделі / *О.О.Савченко* // Прикладна геометрія та інженерна практика. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 51. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 187 - 193

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРОХОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МОРСКИХ ВОЛН С ЦЕЛЮ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИХ ЭНЕРГИИ

А.А.Савченко

Приведен качественный анализ геометрического моделирования профилей морских волн в толще и на поверхности воды, разработанного на основе трохохидальной модели формообразования этих волн.

TROKHOIDAL QUALITATIVE ANALYSIS MODELS SEA WAVES FOR THE PURPOSE OF USE OF THEIR ENERGY

A. Savchenko

The qualitative analysis of geometrical modeling of profiles of sea waves is provided in thickness and on a water surface, the forms of these waves developed on the basis of trokhoidal model.