УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Ворона Ю.В., канд. техн. наук,
Щербатюк О.М.

ПОБУДОВА ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ

Пропонується методика дослідження реакції комбінованих пружних систем на квазістаціонарні стохастичні впливи. Комбінована система може складатись з масивних та тонкостінних елементів. Узагальненими координатами, за допомогою яких будується динамічна модель, є власні форми коливань окремих елементів та форми деформованого стану системи внаслідок одиничних переміщень точок контакту елементів. Викладений алгоритм побудови матриць мас та жорсткості комбінованої системи в базисі узагальнених координат.

В даній роботі реакція системи на стохастичний вплив розглядається як результат взаємодії двох моделей – моделі нестаціонарного стохастичного навантаження та моделі комбінованої конструкції. Серед важливих стохастичних впливів, що діють на реальні конструкції, ознаками явної нестаціонарності характеризується сейсмічний. В наш час оптимальною з точки зору адекватності та простоти справедливо вважається квазістаціонарна модель, в рамках якої прискорення точок ґрунту представляється у вигляді добутку деякої функції, що залежить тільки від часу, та функції, яка відповідає стаціонарному випадковому процесу [1]:

$$\ddot{u}_g(t) = A_0 P(t)\varphi(t)\,, \tag{1}$$

де A_0 - деяка додатна константа; $\varphi(t)$ - центрована стаціонарна випадкова функція часу, $P(t)$ - квазіогинаюча, яку обирають, як правило, у вигляді обмеженої детерміністичної функції, що спочатку зростає до максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля при збільшенні t [1].

Випадкову функцію часу можна подати у вигляді стохастичного інтегралу Фур'є:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \tag{2}$$

де спектр $Q(\omega)$ - центрована узагальнена випадкова функція частоти ω, що задовольняє умову стохастичної ортогональності:

$$\left\langle \overline{Q}(\omega) Q(\omega')\right\rangle = S_Q(\omega)\delta(\omega-\omega'); \qquad (3)$$

$S_Q(\omega)$ - спектральна щільність процесу.

Внаслідок такого представлення навантаження задача в будь-якій постановці зводиться до багаторазового розв'язання рівняння (диференціального, алгебраїчного чи інтегрального), що містить в правій частині складову навантаження $A_0 P(t)e^{i\omega t}$, при різних значеннях параметра ω з подальшим чисельним визначенням кореляційної функції реакції об'єкту:

$$K_u(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega)\overline{u}_{j\omega}(x,t_1)u_{j\omega}(x,t_2)d\omega \cong \\ \cong \sum_{l=-L}^{L} S_\varphi(\omega_l)\overline{u}_{j\omega}(x,t_1)u_{j\omega}(x,t_2)\Delta\omega . \qquad (4)$$

При цьому у виразі (1) квазіогинаюча $P(t)$ до деякого моменту повинна дорівнювати нулю, після чого досить швидко зростати до максимуму, а потім повільно спадати. З огляду на такі обставини для квазіогинаючої можна обрати аналітичний вираз:

$$P(t) = \eta(t)te^{-ct}, \qquad (5)$$

де $\eta(t)$ - одинична функція Хевісайда.

Така модель є універсальною по відношенню до об′єкту розрахунку, тобто її з однаковим успіхом можна застосовувати для моделювання навантаження плоских і просторових, тонкостінних і масивних, однорідних та комбінованих конструкцій.

Будемо розглядати комбіновані пружні системи, які складаються з оболонково-стержневих та масивних конструкцій. Складна конструкція представляється як сукупність взаємозв'язаних елементів. Деформований стан окремих елементів записується в узагальнених координатах, які визначаються через характерні переміщення. Характерні переміщення відносяться до двох класів: переміщення, які обумовлені наявними в'язями, та внутрішні переміщення елементу, що визначають зміну положень внутрішніх точок цього елементу відносно в'язів. Для оболонково-стержневих підконструкцій обидва класи переміщень будуються методом скінчених елементів, а для масивних підконструкцій - на основі апарату методу потенціалу. Внутрішні переміщення будуються на основі форм власних коливань окремих підконструкцій.

Для дослідження об′єктів неканонічної форми використовують чисельні процедури, що базуються на дискретизації розрахункової області. Результатом застосування таких процедур зазвичай є матричні рівняння відносно значень переміщень у вузлах сітки, яка покриває об′єкт:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{G\} . \tag{6}$$

В наш час найбільш поширеним сітковим методом є метод скінченних елементів (МСЕ), який поєднує прозорість основних співвідношень та універсальність по відношенню до більшості інженерних задач [2]. З особливою опуклістю переваги МСЕ проявляються в задачах про напружений стан тонкостінних конструкцій (пластин, оболонок, стержнів та їх комбінацій). Що стосується розрахунку масивних елементів конструкцій, то в цьому випадку привабливою виглядає ідея розділити співвідношення, які пов′язують між собою невідомі на границі об′єкту, та представлення, які визначають переміщення та напруження всередині розрахункової області. Таку ідею реалізує метод потенціала, один з варіантів якого метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) базується на наступному інтегральному представленні (формулі Соміліани [3,4])

$$0.5u_k(x)+\int_\Gamma u_j(y)T^*_{jk}(y,x)d\Gamma_y=\int_\Gamma \tau_j(y)U^*_{jk}(y,x)d\Gamma_y, \tag{7}$$

де U^*_{jk} та T^*_{jk} - відповідно фундаментальна матриця задачі та її узагальнена похідна.

В свою чергу для багаторазового розв′язання задачі можна обрати три шляхи. Перший з них – кроковий за часовою змінною, коли розв′язок в даний момент часу є водночас початковою умовою для задачі в наступний момент. Такий підхід є надто трудомістким, оскільки при високих значеннях параметра ω функція $A_0P(t)e^{i\omega t}$ є швидкоосцілюючою і тому виникає потреба в дуже малих кроках за часом.

Інший підхід, пов′язаний з перетворенням Фур′є задачі, приводить до диференціальних рівнянь еліптичного типу, що описують усталені коливання конструкції. Для розв′язання таких рівнянь з успіхом може бути застосований будь-який чисельний метод. Так, застосування методу потенціала в цьому випадку базується на інтегральних рівняннях з ядрами В.Д. Купрадзе [3], чисельне розв′язання яких за МГІР не становить труда. Нажаль, переваги цього підходу нівелюються необхідністю багаторазово виконувати зворотне перетворення Фур′є, що робить і цю процедуру надто трудомісткою.

Зрозуміло, що для підвищення ефективності алгоритму необхідно виділити і накопичити інформацію, яка є інваріантною відносно параметрів навантаження. Такою інваріантною інформацією є дані про частоти і форми власних коливань окремих елементів конструкції, за допомогою яких можна побудувати ефективний метод розв′язку динамічної задачі.

Будемо застосовувати метод нормальних координат, тобто подавати кожну складову переміщення наступним чином [6]

$$u_{j\omega}(x,t)=\sum_{m=1}^{M}\varphi_j^{(m)}(x)y_m(\omega,t), \tag{8}$$

де $\varphi_j^{(m)}(x)$ - m-а форма коливань об'єкту, нормована таким чином, що

$$\int_V \varphi_j^{(m)}\varphi_j^{(n)}dV=\delta_{mn}\ . \tag{9}$$

Тут через V позначена область, яку займає об'єкт розрахунку.

Отже, незалежно від типу вихідної системи, використовуючи (8) та (9), приходимо до системи незв′язаних диференціальних рівнянь другого порядку відносно нормальних координат

$$\ddot{y}_m(\omega,t)+\Omega_m^2 y_m(\omega,t)=G_m(t)\ , \tag{10}$$

де

$$G_m(t)=-A_0P(t)e^{i\omega t}\int_V \varphi_j^{(m)}dV\ .$$

Чисельне розв′язання кожного з цих рівнянь, наприклад, за методом лінійних прискорень, не викликає жодних труднощів та дозволяє отримати результати з достатньою точністю.

Таким чином, ключовим моментом пропонованого методу є визначення частот і форм власних коливань всієї конструкції, після чого легко можуть бути знайдені залежності від часу нормальних координат, а потім за (8) складові переміщення.

Будемо виходити з того, що для кожної складової підконструкції вже визначені власні частоти і форми, причому точки, які є спільними для суміжних підконструкцій, вважаються жорстко закріпленими. Надалі для простоти обмежимось двома суперелементами: пружним масивним фундаментом, що лежить на скальному грунті, та пружною рамною конструкцією, яка спирається на фундамент. Знаходження власних частот і форм рами з легкістю може бути здійснено за допомогою будь-якої з відомих скінченно-елементних програм [7]. Аналогічні характеристики масива пропонується визначати на основі співвідношень методу потенціала [8,9,10]. Зазначимо, що власні форми як рами, так і масиву зазвичай визначаються в декартовій системі координат, яку будемо вважати природним базисом. В цьому базисі досить просто будується матриця мас всієї конструкції за умови, що всі інерційні характеристики є зосередженими. Поряд з природним створимо допоміжний базис, який зручно використовувати для побудови матриці жорсткості всієї моделі, а також для утворення матриці мас, якщо маси є розподіленими. Кожна узагальнена координата допоміжного базису є вектором, довжина якого дорівнює загальній кількості ступенів свободи всієї конструкції. При цьому кожна узагальнена координата відповідає або певній формі коливань одного з суперелементів (при цьому інший елемент є нерухомим), або реакції всієї системи на одиничне переміщення вздовж в′язі між суперелементами (при цьому переміщення вздовж інших в′язей дорівнюють нулю).

Структурна схема матриці переходу $[C]$, яка пов′язує між собою величини, що характеризують жорсткість, інерційні та демпфіруючи властивості системи в природному та допоміжному базисах для випадку двох суперелементів, наведена на рис. 1.

<table>
<tr><td>F_1
F_2
--
--
F_{m1}</td><td>Форми коливань першого суперелемента</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>F_{m1+1}
F_{m1+2}
--
--
F_{m1+m2}</td><td>0</td><td>Форми коливань другого суперелемента</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$F_{m1+m2+1}$
--
--
$F_{m1+m2+m3}$</td><td colspan="2">Переміщення точок конструкції внаслідок одиничного переміщення в′язей</td><td>1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
--
0 0 0 0 0 1</td></tr>
</table>

Рис. 1. Структурна схема матриці переходу

В структурній схемі використані наступні позначення: F_i – i-та узагальнена координата в допоміжному базисі $[F]$; m_1, m_2 – кількість взятих до уваги форм коливань відповідно першого та другого суперелементів; m_3 – кількість в′язей між суперелементами. Зазначимо, що елементи кожного рядка матриці переходу $[C]$ є природними координатами відповідної узагальненої координати F_i .

Згідно [5] узагальнена компонента матриці мас буде мати вигляд:

$$m_{lk} = \rho \sum_{j} \int_{V} F_j^{(m)} F_j^{(k)} dV \ . \qquad (11)$$

Внаслідок того, що ми розділили переміщення на дві категорії - переміщення, викликані зсувом в′язів, та внутрішні переміщення (форми коливань) підконструкції – матриця мас набуває вигляду, схематичне зображення якого наведене на рисунку 2.

$$[M]^a = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & - & 0 & M_{1,m1+m2} & - & m_{1,N} \\ 0 & 1 & - & 0 & M_{2,m1+m2} & - & M_{2,N} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 & - & - & - \\ \hline M_{m1+m2,1} & M_{m1+m2,2} & - & - & M_{m1+m2,m1+m2} & - & M_{m1+m2,N} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ M_{N,1} & M_{N,2} & - & - & - & - & M_{N,N} \end{array}\right]$$

Рис. 2. Структура матриці мас

Зазначимо, що діагональна одинична підматриця (лівий верхній блок) утворюється завдяки ортогональності та нормуванню форм власних коливань для кожної підконструкції.

Окремо слід зупинитись на випадку, коли для комбінованої системи обрана модель із зосередженими масами. Внаслідок такої моделі алгоритм побудови узагальненої матриці мас в допоміжному базисі починається з утворення матриці мас $[M]^n$ в природному базисі, де вона є діагональною. Перехід в допоміжний базис легко здійснюється за допомогою матриці переходу:

$$[M]^a = [C]^T [M]^n [C] . \qquad (12)$$

Як наслідок, матриця $[M]^a$ набуває такого самого вигляду, що й у загальному випадку (рис. 2).

Згідно [5] будь-який коефіцієнт матриці жорсткості може бути представлений наступним чином:

$$K_{ij} = \int_{D} \{\tau\}_i^T \{e\}_j dD \ , \qquad (13)$$

де $\{\tau\}$, $\{e\}$ – відповідно вектори напружень і деформацій, які визначаються шістьма компонентами

Як бачимо, кожен коефіцієнт матриці жорсткості дорівнює роботі, яку здійснюють напруження, що відповідають i-му узагальненому переміщенню, на деформаціях, які відповідають j-му узагальненому переміщенню. Зрозуміло, що цей коефіцієнт дорівнює також роботі, яку здійснює сукупність узагальнених зовнішніх сил, що відповідають *i*-му узагальненому переміщенню, на *j*-му узагальненому переміщенні.

З урахуванням вищенаведеного зауваження, матриця узагальненої жорсткості в допоміжному базисі може схематично бути представлена наступним чином

$$[K]=\left[\begin{array}{c|c} K^F & 0 \\ \hline 0 & K^C \end{array}\right]$$

Рис. 3. Структура матриці жорсткості

Підматриця $[K^F]$ є діагональною матрицею. Це є наслідком ортогональності форм власних коливань елементів конструкції, а також специфіки будови узагальнених координат допоміжного базису. Порядок цієї підматриці є довільним і залежить тільки від кількості форм коливань кожного суперелемента, які беруться до уваги, що в свою чергу визначається потрібною точністю. Оскільки форми коливань нормовані відносно матриці мас, то

$$K_{i,i}^F=\Omega_i^2\ , \tag{14}$$

де Ω_i – власна частота коливань суперелемента при зафіксованих в′язях.

Підматриця $[K^C]$ є матрицею жорсткості, коефіцієнти якої дорівнюють реакціям у в′язях між підконструкціями при одиничному переміщенні вздовж однієї з них. Таким чином, порядок цієї квадратної матриці дорівнює кількості в′язей між суперелементами.

Права верхня підматриця є нульовою матрицею, оскільки робота, що її виконують реакції в′язей на внутрішніх переміщеннях, дорівнює нулю (за визначенням суперелементи здійснюють власні коливання при нерухомих в′язях). З огляду на симетрію матриці жорсткості, ліва нижня підматриця також є нульовою матрицею.

Після того, як знайдені частоти і форми коливань всієї комбінованої конструкції, подальше розв’язання задачі стає досить простим. Якщо прийняти, що квазіогинаюча має вигляд (5) та припустити, що внутрішнє тертя в матеріалі характеризується незалежним від частоти коливань параметром демпфірування ξ, то рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$y_m(\omega,t)+2\xi\,\Omega_m y_m(\omega,t)+\Omega_m^2 y_m(\omega,t)=B_m t e^{(i\omega-c)t}\eta(t)\ , \tag{15}$$

де

$$B_m = A_0 \int_V \varphi_j^{(m)} dV \ .$$

Зазначимо, що система (15) є системою незалежних (непов′язаних одне з одним) диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв’язок кожного з цих рівнянь може бути знайдений в замкненій формі [10].

Після визначення розв′язку системи (15) за допомогою співвідношення (8) отримуємо кореляційну функцію реакції об’єкту:

$$K_u(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=`}^{M} \varphi_j^{(m)} y_m(\omega,t_2) \sum_{m=1}^{M} \varphi_j^{(m)} y_m(\omega,t_2) S_\varphi(\omega) \right] d\omega. \qquad (16)$$

В свою чергу дисперсію переміщень точок конструкції отримуємо, поклавши в (16) $t_1=t_2=t_2$. Тоді

$$\sigma_u^2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \varphi_j^{(m)} \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^{M} \varphi_j^{(m)} y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega \,. \qquad (17)$$

Таким чином ми побудували алгоритмічну основу для розрахунку нестаціонарних випадкових коливань комбінованих пружних систем.

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
2. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей А.С.Сахарова и И.Альтенбаха. К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
3. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 472 с.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. *Харти В.С.* Динамический анализ конструкций, основанный на исследовании форм колебаний отдельных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – том 3. – С. 130-138
6. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
7. *Басов К.А.* ANSYS в примерах и задачах. – М.: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с.
8. *Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E.* Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
9. *Chen W., Tanaka M. New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods* // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000. – vol. 1. – P. 145-151.
10. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В.* Методика чисельного дослідження нестаціонарних коливань пружних об’єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2004. – Вип. 75.– С. 3-12.

Надійшла до редколегії 16.11.2005 р.