

УДК 539.3

Є.О.Гоцуляк, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук

О.О. Лук'яниченко, канд. техн. наук

## ПОБУДОВА РЕДУКОВАНОЇ МОДЕЛІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ЧИСТОМУ ЗГІНІ

Побудована динамічна модель параметричних коливань циліндричної оболонки при дії прикладених на торцях пар сил. Дискретизація континуальної моделі виконана за допомогою методу скінченних елементів із застосуванням сучасного обчислювального комплексу. Редукування дискретної моделі оболонки здійснено на основі методу узагальнених координат. Досліджено питання вибору базисних функцій для адекватного описання докритичної поведінки оболонки при чистому згині.

Питання про стійкість тонкостінних циліндричних оболонок при чистому згині виникає при розрахунку, наприклад, довгих трубопроводів, елементів авіаційних конструкцій. Стійкість таких оболонок вивчалася в двох постановках. Вперше Л. Бразье в 1927р. розглядав геометрично нелінійну залежність деформації оболонки від моменту в припущенні, що всі поперечні перерізи оболонки при її згинанні деформуються однаково. Але ця модель не враховує утворення місцевих вм'ятин при втраті стійкості. Теоретичне вивчення стійкості оболонки при згинанні з урахуванням утворення вм'ятин вперше було виконано В. Флюгге. Надалі ця модель аналізу стійкості циліндричної оболонки при згинанні став переважаючим. Вона розвивалася багатьма дослідниками, результати робіт яких детально висвітлені у відомих монографіях С.П. Тимошенко (1961 р.), А.С. Вольміра [1] та ін. Але і ці дослідження другого напрямку не привели до результатів, які дозволили б визначити величину критичного навантаження, що задовільно узгоджується з результатами експериментальних досліджень для достатньо довгих оболонок. Останніми роками урахування докритичної геометрично нелінійної деформації є вагомим уточненням розрахунку критичного навантаження на оболонку. Цьому напрямку присвячені дослідження конкретних задач, які наведені в книзі [2].

Теорія динамічної стійкості є одним із ще менш розвинених розділів механіки деформованих тіл. Першими дослідниками динамічної стійкості пружних систем були В.М. Беляєв (1924 р.), Н.М. Крилов, Н.Н. Боголюбов (1935 р.), В.А. Боднер (1938 р.), В.Н. Чаломей (1939 р.) та інш. Динамічну стійкість циліндричних оболонок вперше дослідили А.Н. Марков (1949 р.) та О.Д. Оніашвілі (1950 р.). Глибокі дослідження динамічної стійкості

циліндричних оболонок при дії осьового стиснення та поверхневого тиску представлені в фундаментальній монографії В.В. Болотіна [3]. Задача динамічної стійкості тонкостінних циліндричних оболонок при чистому згинанні залишаються недостатньо дослідженою. Проблема полягає у її складності та відсутності необхідної кількості експериментальних даних.

Метою даної роботи є побудова динамічної моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при дії прикладених на торцях пар сил, які б дозволили дослідити стійкість оболонки та визначити області її динамічної нестійкості. Побудова редукованої динамічної моделі виконується за допомогою чисельної методики, що розроблена авторами і представлена в статті [4]. Континуальна модель може бути отримане з рівняння рівноваги для статичної задачі стійкості додаванням даламберових сил інерції із врахуванням складових незбудженого напружено-деформованого стану оболонки, які залежать від часу. В роботі робиться перехід від системи диференціальних рівнянь в частинних похідних до дискретної моделі за допомогою методу скінченних елементів із застосуванням сучасного обчислювального комплексу [5]. Дискретна модель має велику розмірність, тому необхідно виконати її редукування. Для цього застосовується метод узагальнених координат. Але непротим питанням є вибір базисних функцій. Якщо форми власних коливань та форми втрати стійкості однакові, наприклад при дії поверхневого тиску на оболонку, частіше за базисні функції приймаються вектори власних коливань. Якщо форми втрати стійкості та власних коливань різні, треба прийняти за базис форму, яка б адекватно описала докритичну поведінку оболонки. Для визначення базисних функцій при побудові редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки досліджується її докритична поведінка при згині в лінійній та нелінійній постановці, розв'язується задача на власні коливання.

В роботі розглядається тонкостінна циліндрична оболонка радіусом

$R = 1$  м, довжиною  $L = 8$  м та товщиною стінки  $h = 2$  мм, що виготовлена із сталі з такими механічними характеристиками:  $E = 2,06 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,792 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu = 0,3$ . Оболонка шарнірно оперта по торцях. Стінка оболонки моделюється плоскими прямокутними скінченними елементами (рис. 1) у циліндричній системі координат. Твірна оболонка розбивається на 252 частини,

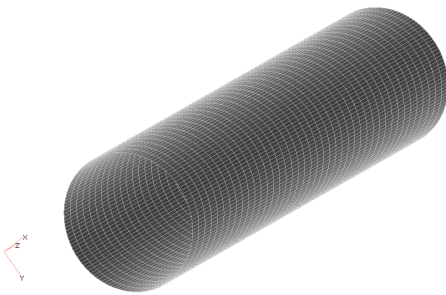


Рис. 1. Скінченноелементна модель оболонки

коло - на 64.

Дія пар сил (рис. 2) характеризується моментом пар  $M$ , що прикладений в діаметральній площині оболонки аналогічно представленню в книзі [1]. Нормальні напруження в поперечних перерізах оболонки розподіляються до випучування за законом:

$$P = \frac{M}{\pi R^2 h} \cos \frac{y}{R},$$

де  $y$  - колова координата, яка відкладається від точки перетину площини дії пари з серединною поверхнею, що розташована у розтягнутій частині перерізу.

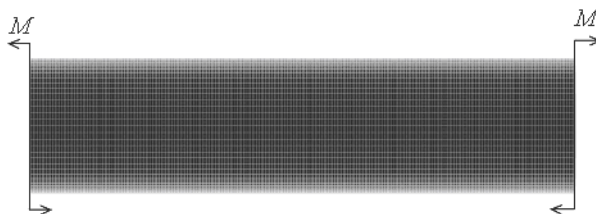


Рис. 2. Параметричне навантаження циліндричної оболонки

При розв'язанні лінійної задачі статки визначений напружено-деформований стан оболонки. На рис. 3 представлена форма деформування оболонки. Випучування оболонки відбувається в зоні максимального згинального моменту.

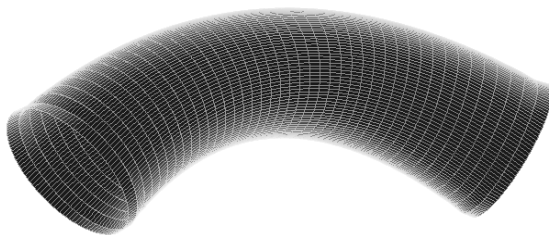


Рис. 3. Форма деформування оболонки

Виконаний розрахунок на власні коливання, визначенні форми коливань у вигляді системи векторів  $\Phi = \{\bar{\Phi}_k\}_{k=1}^m$  та відповідні їм частоти:  $\omega_1 = 10,497$  Гц;  $\omega_2 = 12,708$  Гц;  $\omega_3 = 13,603$  Гц;  $\omega_4 = 17,503$ . На рис. 4

представлені перші чотири форми власних коливань циліндричної оболонки: вздовж кола спостерігається відповідно 4, 5, 3 та 6 хвиль. Всі форми коливань оболонки мають вздовж твірної тільки одну хвилю.

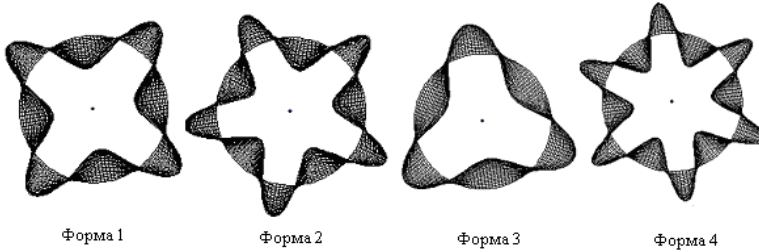


Рис. 4. Власні форми коливань циліндричної оболонки

Для отримання форм втрати стійкості оболонки при дії пар сил у вигляді системи векторів  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m$  за допомогою обчислювального комплексу [5] розв'язана лінійна задача стійкості оболонки, визначені форми втрати стійкості і відповідні критичні значення напруження. Перша форма втрати стійкості оболонки представлена на рис. 5.

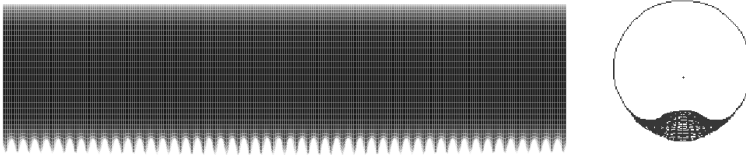


Рис. 5. Перша форма втрати стійкості оболонки

Втрата стійкості відбулася при напруженні  $P_{кр} = 2,591 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ . Видно, що вздовж кола форма втрати стійкості оболонки має одну хвилю, вздовж твірної 50 хвиль. Спектр критичних значень напруження щільний:  
 $P_{кр1} = 2,591 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $P_{кр2} = 2,596 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $P_{кр3} = 2,597 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  
 $P_{кр4} = 2,606 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

Розрахункове значення верхнього критичного напруження було визначено при дослідженні стійкості оболонки при чистому згині Вольміром А.С. [1] за формулою

$$P_{кр} = \hat{P}_{кр} \frac{Eh}{R}, \quad (1)$$

де  $\widehat{P}_{кр}$  - коефіцієнт критичного напруження, що визначається згідно графіка наведеного в [1] в залежності від параметру  $\xi$ , який знаходиться за формулою

$$\xi = \frac{L}{mR} \sqrt{h/R}, \quad (2)$$

де  $m$  – кількість хвиль вздовж твірної.

Згідно рекомендацій автора необхідно змінювати кількість хвиль для визначення меншого значення критичного напруження. За формулою (2) визначаємо параметр  $\xi$  для  $m = 1, 2, \dots, 50$ . Він знаходиться в діапазоні  $0,358 \div 0,007$ . Аналітичне значення верхнього критичного напруження (1) склало  $P_{кр} = 2,42 \cdot 10^8 \div 2,5 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> і майже співпало з розрахунковим критичним значенням.

Однак, форма втрати стійкості оболонки при лінійному розрахунку (рис. 5) відрізняється від форми деформування оболонки, що наведена в [1]. Стверджується, що для тонких оболонок зі значним відношенням довжини до радіусу оболонки, випучування відбувається по довгим півхвилям, подібно випадку рівномірного стиснення. Тому для адекватного описання поведінки оболонки при втраті стійкості треба врахувати геометричну нелінійність. Для цього в роботі розв'язана нелінійна задачі статки. Форма деформування оболонки при втраті стійкості представлена на рис. 6.

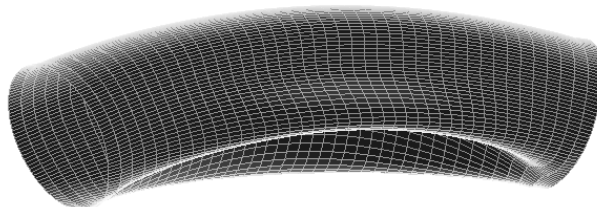


Рис. 6. Форма деформування оболонки при нелінійному розрахунку

Форма деформування оболонки є випучуванням по довгих хвилях. Втрата стійкості відбулася при напруженні  $P_{кр} = 2,42 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. При лінійному та нелінійному розрахунках стійкості оболонки критичні напруження дуже близькі за значенням, цей момент також був відмічений в [1].

Отримані критичні значення напружень можна перевірити за допомогою задачі визначення власних частот циліндричної оболонки при дії статичної складової параметричного навантаження. Параметричне навантаження має вигляд періодичної функції виду:  $f(t) = f_0 + f_t \sin \theta t$ , де  $f_0$  і  $f_t$  - статична та динамічна складові навантаження. В роботі статичною складовою навантаження є момент  $M$ , що характеризує дію пар сил. За допомогою обчислювального комплексу [5] виконаний лінійний та нелінійний динамічні розрахунки. На рис. 7 представлені криві залежності чотирьох власних частот оболонки від дії статичної складової параметричного навантаження. По осі абсцис відкладені значення напруження на елемент оболонки  $P$ , по осі ординат – власні частоти коливань навантаженої оболонки  $\omega^*$ .

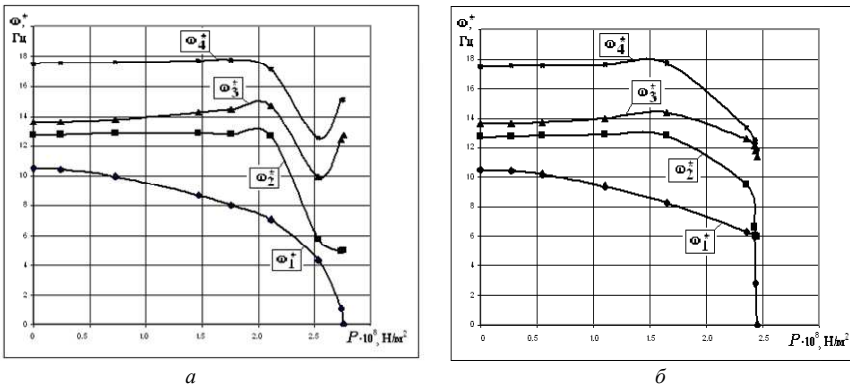


Рис. 7. Власні частоти коливань навантаженої циліндричної оболонки:  
а) лінійний розрахунок; б) нелінійний розрахунок

Розрахунки показали, що якщо статична складова параметричного навантаження дорівнює нулю, власні частоти навантаженої оболонки при лінійному та нелінійному розрахунках співпадають з власними частотами ненавантаженої оболонки і складають: 10,50; 12,71; 13,61; 17,50 (Гц). При збільшенні статичної складової навантаження власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. Напруження при нульовому значенні першої власної частоти навантаженої оболонки є розрахунковим верхнім критичним значенням напруження при втраті стійкості оболонки. При лінійному розрахунку критичне напруження склало  $P_{кр} = 2,76 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, при нелінійному –  $P_{кр} = 2,45 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. Ці значення лежать в діапазоні критичних напружень, що визначені аналітично.

Дослідження показали, що форми власних коливань та форми втрати стійкості при лінійному і нелінійному розрахунках різні, хоча відповідні критичні значення напружень близькі за значенням. Можна зробити висновок, що тільки форма втрати стійкості оболонки при нелінійному розрахунку може бути прийнята за базис редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині.

Згідно чисельної методики [4] редукована дискретна модель параметричних коливань оболонки має вигляд системи  $m$  звичайних диференціальних рівнянь

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + K^* \dot{\bar{y}}(t) + f(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0. \quad (3)$$

Тут  $M^*$ ,  $K^*$  та  $K_G^*$  - редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості розмірністю  $m \times m$  представлені відповідно виразами

$$M^* = V^T M V, \quad K^* = V^T K V, \quad K_G^* = V^T K_G V, \quad (4)$$

де  $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)^T$  - матриця розмірністю  $n \times m$ , що визначається системою базисних векторів  $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^m$ ;  $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$  - вектор узагальнених координат;  $f(t)$  - періодична функція.

В обчислювальному комплексі [4] матриця власних форм коливань  $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m$  нормована по матриці мас, тому редукована матриця мас має вигляд одиничної діагональної матриці  $M^* = \Phi^T M \Phi = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ .

Редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості визначаються за формулами:

$$K^* = \Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \quad K_G^* = \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi. \quad (5)$$

Тут вектори матриць  $K\Psi$  і  $K\Phi$  обчислюються за допомогою процедури визначення реакції системи на задане поле переміщень, яке подається у вигляді векторів форм втрати стійкості  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m$ , та форм коливань  $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m$ ;  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  - матриця критичних значень навантаження, що отримані при розв'язанні задачі стійкості оболонки;  $\omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) - вектор частот власних коливань.

Редукована модель параметричних коливань оболонки (3) переписується у вигляді

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2 \bar{y}(t) + f(t) \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi \bar{y}(t) = 0. \quad (6)$$

У зв'язку з тим, що за базисну функцію прийнятий вектор форми втрати стійкості оболонки при нелінійному розрахунку, система рівнянь (6) записується виразом

$$y(t) + \omega_1^2 y(t) + f(t) \bar{\Phi}_1^T K \bar{\Psi}_1 \lambda^{-1} \bar{\Psi}_1^T K \bar{\Phi}_1 y(t) = 0. \quad (7)$$

Після розрахунків редукована модель параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині (7) набуває вигляду рівняння

$$y(t) + 65,954^2 - 0,0856 f(t) y(t) = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) можна подати у вигляді рівняння Мат'є [3]

$$y(t) + 65,954^2 (1 - 1,96 \times 10^{-5} f(t)) y(t) = 0. \quad (9)$$

Отримане рівняння дає змогу дослідити динамічну стійкість циліндричної оболонки при чистому згині, визначити області нестійкості і оцінити вплив динамічної складової параметричного навантаження на поведінку оболонки.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
2. *Аксельрад Э.Л.* Гибкие оболочки. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 376 с.
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
4. *Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. – № 74.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.– 448с.

Отримано 30.06.09



*Е.А. Гоцуляк, Е.С. Дехтярюк, О.А. Лукьянченко*

**Построение редуцированной модели параметрических колебаний цилиндрической оболочки при чистом изгибе**

Построена динамическая модель параметрических колебаний цилиндрической оболочки при действии на ее торцах пар сил. Дискретизация континуальной модели выполнена с помощью метода конечных элементов с применением современного вычислительного комплекса. Редуцирование дискретной модели оболочки осуществлено на основе метода обобщенных координат. Исследован вопрос выбора базисных функций для адекватного описания докритического поведения оболочки при чистом изгибе.

*E.O. Gotsuliak, E.S. Dehtiaruk, O.O. Lukianchenko*

**A construction of reduce model of parametric oscillation of cylindrical shell bending**

The dynamic model of parametric oscillation of cylindrical shell under action of pair of forces applied at it ends is built. Discretizing of continual model is executed by the method of finite elements with the use of modern program. The reducing of discrete model is carried out on the basis of generalized coordinates method. The problem of choice of base functions is investigated for adequate description of precritical behavior of shell bending.