

УДК 539.376

Пискунов С.О., канд. техн. наук,  
 Рутковський В.А., канд. техн. наук,  
 Шкриль О.О.

## ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗМІННОЇ ГЕОМЕТРІЇ

На основі корегування величин компонент метричного тензора отримані вирази матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій напіваналітичного неоднорідного призматичного скінченного елемента змінної геометрії для моделювання напружено-деформованого стану, наближеного до поздовжнього розтягу.

**Вступ.** Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є ефективною модифікацією методу скінчених елементів (МСЕ) [2, 3, 5], що дозволяє суттєво підвищити ефективність чисельного розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану (НДС) просторових тіл канонічної форми. Одним з таких класів об'єктів є призматичні тіла, що утворені рухом геометричної фігури складної форми, яка визначається контуром поперечного перерізу тіла, вздовж прямолінійної утворюючої.

Традиційно НМСЕ використовується для розрахунку призматичних тіл, геометричні характеристики яких в напрямку  $z^3$  є незмінними. У розрахунковій практиці зустрічаються призматичні тіла змінної в напрямку вісі  $z^3$  площі поперечного перерізу  $A = A(z^3)$  (рис. 1).

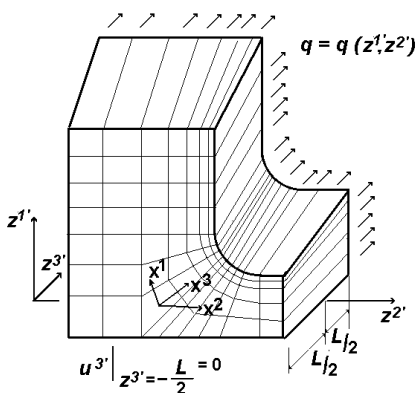


Рис.1. Призматичне тіло змінної площі поперечного перерізу

У частковому випадку завантаження спрямованим вздовж вісі  $z^3$  розтягуючим навантаженням  $q = q(z^1, z^2)$ , що розподілене по торцю тіла, або розподіленим по об'єму відцентровим навантаженням, розглядуваний об'єкт знаходиться в умовах деформування, наближених до поздовжнього розтягу. Одним із найхарактерніших прикладів таких об'єктів є лопатки турбін.

Метою даної роботи є розробка розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл змінної геометрії, перевірка вірогідності і демонстрація можливостей застосування на прикладі практичної задачі енергетичного машинобудування про визначення НДС лопатки газової турбіни.

**Матриця жорсткості вектор вузлових реакцій неоднорідного призматичного СЕ змінної геометрії.** При застосуванні НМСЕ для моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних призматичних тіл нанесення скінчено-елементної сітки проводиться в поперечному перерізі тіла (рис. 1). По довжині використовується один прямолінійний елемент змінної жорсткості – призматичний неоднорідний скінчений елемент (СЕ, рис. 2).

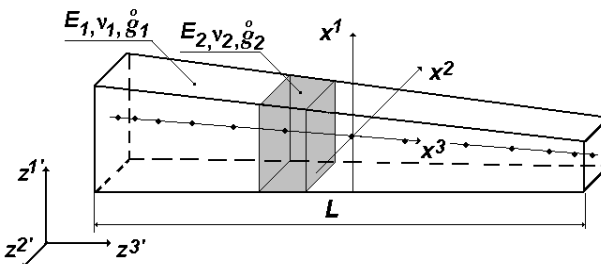


Рис.2. Призматичний неоднорідний скінчений елемент змінної жорсткості

Вздовж вісі СЕ, згідно до вимог правила інтегрування Гауса, розташовано  $M$  точок інтегрування. Розподілення переміщень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом, а в напрямку утворюючої для апроксимації переміщень використовується розкладення за системою координатних функцій  $\varphi^{(l)}$ , утвореною на основі поліномів Лагранжа і Міхліна [1, 2, 3, 5]:

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{m'}^l \varphi^{(l)}.$$

Згідно до моментної схеми скінченних елементів [4] величини напружень і деформацій подаються у вигляді розкладу в ряд Маклорена. Вирази матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій отримані виходячи з варіаційного принципу Лагранжа на основі методики, викладеної в [5]. Для урахування зміни площі поперечного перерізу СЕ вздовж утворюючої в підінтегральні вирази розв'язувальних співвідношень введені величини, що характеризують площу поперечних перерізів  $A_m$  в точках інтегрування. Кінцеві вирази вектора амплітудних вузлових реакцій і матриці жорсткості неоднорідного призматичного СЕ змінної геометрії мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} = & \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{s\}_l + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{s\}_{l3} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^M \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha 3} \right) \right\}, \\ [K]_{ln} = & \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{00}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{30}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \\ & + \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{03}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{33}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{00\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{30\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{03\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{33\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \right) \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \{s\}_l = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m,$$

$$\{s\}_{l3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m,$$

$$\{s\}_{1\alpha} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\{s\}_{1\alpha 3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{30}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{03}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{33}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\begin{aligned} [T]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \\ &= \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m , \end{aligned}$$

$$[T]_{30\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 =$$

✘

$$[T]_{03\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{33\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 =$$

$$= \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\left( \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m = \frac{A_m}{A|_{z^{3'}=0}} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} ,$$

$A_m$  – площа поперечного перерізу в точці інтегрування  $m$ .

Для обґрунтування вірогідності такого підходу було розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах плоскої деформації в площині  $z^1 - z^3$  стрижня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (розміром в напрямку  $z^1$ ), розрахунок якого був проведений із використанням МСЕ і НМСЕ (рис. 3).

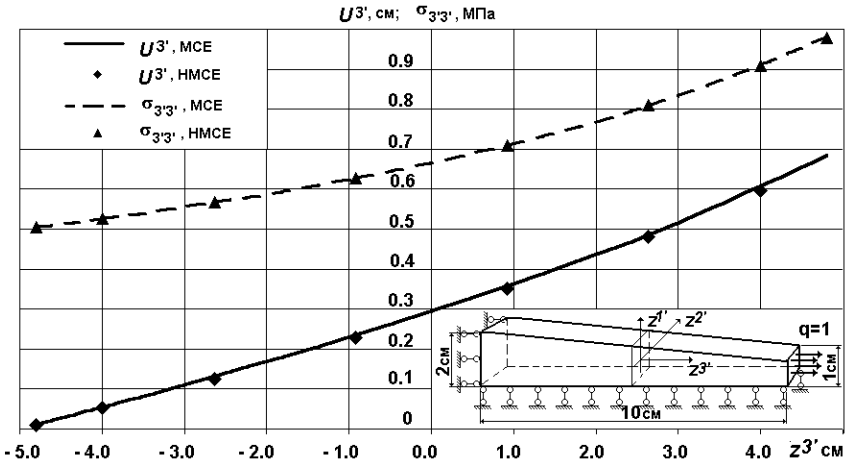


Рис. 3. Стрижень із змінною площею поперечного перерізу: розрахункова схема та розподілення напружень і переміщень по довжині стрижня

Отримані результати розподілення напружень  $\sigma_{z^3 z^3}$  і переміщень  $U^{z^3}$  за напрямком  $z^3$  свідчать, що похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% (рис. 3). Таким чином розроблений в межах НМСЕ підхід може бути використаний для розв'язання прикладних задач.

Визначення напружено-деформованого стану лопатки газової турбіни. Розглядувана лопатка являє собою просторове тіло складної форми,

характерні розміри якого по висоті значно перевищують розміри поперечного перерізу. Лопатка закручена відносно вертикальної вісі, має змінну по висоті площу поперечного перерізу і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур.

Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки, виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного МСЕ засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті, так і в межах поперечних перерізів. На основі цих результатів було обрано поперечний переріз лопатки  $R^*$ , комбінація усередненого напруження  $\sigma_0$  і усередненої температури  $T_0$  в якому є найнебезпечнішою з точки зору порушення суцільності матеріалу і подальшого виникнення тріщини. Для проведення чисельного моделювання деформування пера лопатки було розглянуто його фрагмент в околі небезпечного перерізу  $R^*$ ,  $0.94 R_0 < R < 1.06 R_0$  (рис.4, *a*), в межах якого спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень. Моделювання впливу верхньої частини лопатки здійснюється шляхом прикладення до перерізу  $R=1.06 R_0$  нерівномірно розподіленого навантаження, що відповідає діючим в цьому перерізі напруженням. Крім того, фрагмент завантажений розподіленим за об'ємом відцентровим навантаженням  $p$ . Розглядуваний фрагмент лопатки може бути віднесений до неоднорідних призматичних тіл. Відповідна дискретна модель НМСЕ, утворена із використанням неоднорідних призматичних СЕ наведена на рис.4, *б*.

Прийнята розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ передбачає відсутність закручування відносно вісі  $z^3$  і незмінність площі поперечного перерізу лопатки, що є характерним для кола об'єктів, розрахунок яких традиційно здійснюється на основі НМСЕ. Для урахування впливу закручування фрагмента лопатки на напружено-деформований стан був застосований підхід, що ґрунтується на змінненні вихідної щільності матеріала по площині поперечного перерізу: в центральній частині перерізу (в околі точок 1 та 2), для якої закручування призводить до збільшення напружень, вихідна щільність була збільшена, для периферійних частин перерізу – зменшена. При цьому усереднена по перерізу величина щільності залишилась незмінною.

Лопатка знаходиться в полі дії відцентрових сил, що спрямовані вздовж вісі лопатки і спричиняють напружено-деформований стан, наближений до умов поздовжнього розтягу. Це дозволяє моделювати змінення розмірів поперечного перерізу лопатки в плані із використанням неоднорідних призматичних СЕ змінної жорсткості.

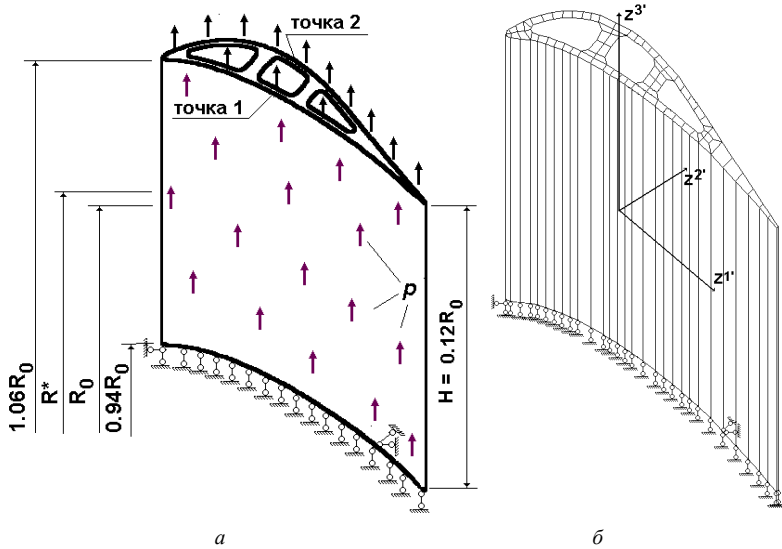


Рис.4. Фрагмент лопатки газової турбіни: а) загальний вигляд; б) дискретна модель НМСЕ

Отримані з урахуванням збіжності в залежності від кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі в поперечному перерізі і за напрямком  $z^3$  розподілення напружень вздовж радіуса фрагмента лопатки (штрихова лінія) в найбільш навантажених точках перерізу в порівнянні з результатами, отриманими із використанням тривимірного МСЕ наведені на рис. 5. Розбіжність результатів становила 3-4%.

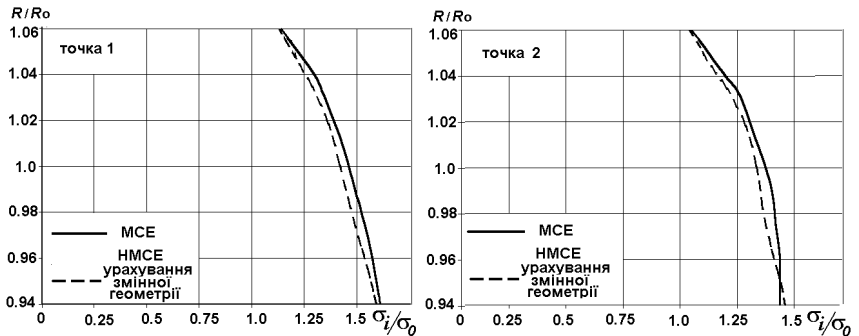


Рис.5. Розподілення інтенсивності нормальних напружень по висоті фрагмента лопатки

Таким чином, застосування розроблених співвідношень дозволяє з високою ефективністю отримувати вірогідні результати розподілення параметрів напружено-деформованого стану для реальних об'єктів без збільшення кількості невідомих, порівняно із випадком дослідження деформування тіл сталої геометрії.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 1 Разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов и алгоритмы решения континуального разрушения при ползучести. // Проблемы прочности.— №5. – 2002.— С.5-16.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 2 Исследование достоверности результатов и эффективности полуаналитического метода конечных элементов.. // Проблемы прочности". – №6. – 2002. – С 14-19.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 3. Практическое приложение // Проблемы прочности". – №1. – 2003. – С 67-75.
4. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ Под общ. ред. *А.С. Сахарова и И. Альтенбаха*. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с.
5. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / *В.А.Баженов, А.И.Гуляр, А.С.Сахаров, А.Г.Топор*. – Киев: НИИ СМ, 1993. – 376 с.

*Надійшла до редколегії 07.11.2005 р.*