

Е.В. Федусенко, А.А. Федусенко

Київський національний університет будівництва і архітектури

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СПРОСА МЕТОДАМИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

*Рассмотрена проблема построения математической модели спроса с учетом основных экономических факторов, влияющих на него. Разработанная и предложенная в статье математическая модель может быть использована для моделирования потребительского спроса на группу товаров, выпускаемых предприятием, в процессе всего жизненного цикла.*

**Ключевые слова:** многокритериальная оптимизация, системный анализ, методы экспертных оценок, весовые коэффициенты, спрос

### Постановка проблемы и анализ основных исследований

В современных экономических условиях в Украине, при наблюдающемся спаде производства и уменьшении доходов потребителей, а соответственно и их покупательной способности, очень важно иметь наиболее четкий прогноз спроса на группу товаров, выпускаемых или продаваемых предприятием. Поскольку такой прогноз поможет избежать существенных финансовых и временных потерь за счет сокращения выпуска продукции, которая не будет пользоваться спросом и соответственно увеличения выпуска продукции, которая необходима потребителям в данный момент времени. При этом под спросом будем понимать объем товара, который может быть реализован на рынке в определенный период времени по заданной цене.

Следовательно можно сказать, что задание прогнозирования и моделирования потребительского спроса на группу товаров, которые выпускаются предприятием, является достаточно актуальным. А внедрение таких моделей позволит увеличить экономическую эффективность и рентабельность работы предприятия. Для прогнозирования спроса в работе предлагается использовать методы многокритериального математического моделирования и оптимизации.

Следует отметить, что предлагаемые ранее модели прогнозирования спроса, не позволяют учитывать все многообразие факторов, которые влияют на спрос. При этом данные факторы могут носить как количественный, так и качественный характер и измеряться в разных единицах измерения. Кроме этого, большинство разработанных ранее математических моделей не

учитывают ограничения по максимальным объемам товара, которое может выпустить предприятие без дополнительного наращивания мощностей.

**Целью работы** является повышение эффективности управления предприятием за счет планирования выпуска продукции.

Для достижения цели была поставлена задача - разработать математическую модель для исследования потребительского спроса на группу товаров, выпускаемых предприятием.

### Основной материал исследования

#### Анализ факторов, которые влияют на спрос

Спрос на продукцию серьезно ограничивает объем ее производства, т.е. влияет на предложение товаров предприятия потребителям. На спрос может влиять множество факторов, рассмотрим их более подробно (рис. 1).

Сразу следует отметить, что влияние внешнеэкономических факторов на спрос учитывать будет достаточно сложно, поскольку доля влияния данных факторов может существенно колебаться в зависимости от видов товаров, состава населения, мест продажи товаров и т.п. Кроме того, само влияние данных факторов на спрос достаточно сложно определить как при помощи математических методов, так и при помощи методов экспертных оценок.

Поскольку влияние внешнеэкономических факторов достаточно сложно учесть и процент их влияния на спрос, как видно из рис. 2, невелик, то в дальнейшем будем рассматривать только экономические факторы.

При этом необходимо учитывать то, что значение данных факторов для каждого товара также может значительно колебаться.

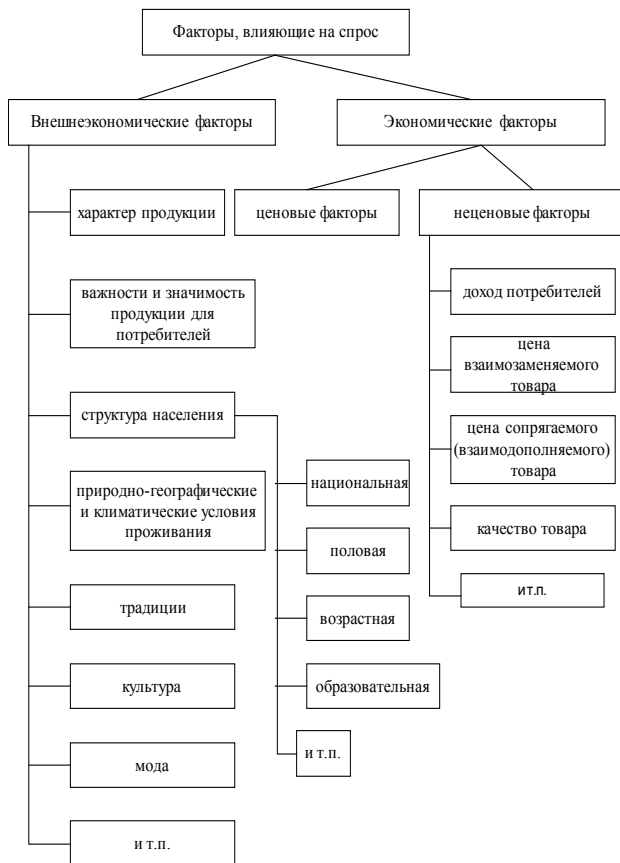


Рис.1. Факторы, которые оказывают влияние на спрос

Процент влияния факторов каждой категории на спрос показан на рис.2.

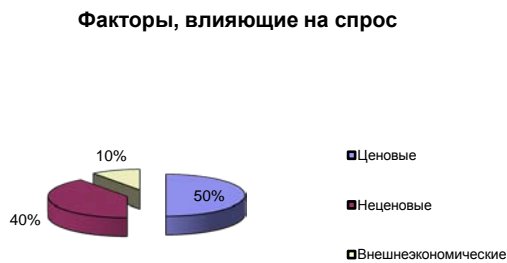


Рис. 2. Процентное отношение факторов, влияющих на спрос

Следовательно, необходимо разработать математическую модель для моделирования потребительского спроса на группу товаров, выпускаемых предприятием. При этом данная модель должна позволять учесть не только влияние экономических факторов на спрос, но и долю такого влияния для каждого из товаров.

### Постановка задачи

Рассмотрим поставленную перед нами задачу, на содержательном уровне ее можно описать следующим образом: потребитель при фиксированной цене и растущем доходе сначала

увеличивает потребление данного товара до некоего максимального значения, а затем дальнейший рост дохода ведет к снижению потребления данного товара до некоего оптимального уровня. Снижение вызывается: - во-первых, ростом затрат на транспортировку и хранение товара и ограниченностью возможностей для хранения запасов; - во-вторых, перераспределением растущего дохода в пользу более дорогих товаров, которые становятся доступны по мере роста благосостояния потребителя [1].

Если формализовать данную задачу, то можно прийти к известной «задаче о рюкзаке»: имеется совокупность объектов, обладающих двумя признаками. Необходимо составить набор таким образом, чтобы максимизировать оценку по одному из признаков, при существующем ограничении на второй признак. Задача о рюкзаке бывает двух типов – дискретная задача о рюкзаке и непрерывная задача о рюкзаке. В первом случае все предметы неделимы, а во втором делимы.

В формализованном виде постановка задачи будет строиться на следующих утверждениях.

1. Покупатель собирается потратить некую денежную сумму  $b$  на покупку множества товаров  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

2. Товары  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  продаются по цене  $p_1, p_2, \dots, p_n$  соответственно, т.е. каждому элементу множества  $X$  соответствует элемент множества  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .

3. Каждый товар из множества  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  имеет максимальный объем  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  соответственно.

4. Считается, что покупка каждого товара характеризуется некоторым коэффициентом полезности  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  соответственно.

### Параметризация задачи

Разработаем на основе предположений 1-4 математическую модель для проведения моделирования спроса. Предположения 1 и 2 можно представить в виде следующего ограничения (1):

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b \quad (1)$$

Предположение 3 дает более широкие возможности для имитационного моделирования, поскольку предлагает учитывать максимальный объем каждого товара. Ограничение, соответствующее данному предположению такое:

$$x_i \leq q_i, \quad (2)$$

где  $q_i$  – максимальный объем  $i$ -го товара.

Последнее предположение позволяет сформировать целевую функцию, разрабатываемой модели (3):

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max \quad (3)$$

При этом под коэффициентом полезности будем понимать некое обобщенное значение, на основании которого потребитель принимает решение о покупке того или иного из товаров, выпускаемых предприятием.

Данный коэффициент должен учитывать следующие параметры:

- качество товара;
- цену взаимозаменяемого товара;
- цену сопрягаемого товара;
- важность товара для потребителя и т.д.

Представим все факторы, влияющие на спрос  $i$ -го товара, учитываемые в разрабатываемой модели в виде множества  $-F_i = \{F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ki}\}$

Логично предположить, что коэффициент полезности  $i$ -го товара можно рассчитать по следующей формуле:

$$C_i = \sum_{j=1}^K F_{ij}. \quad (4)$$

Однако в данном случае возникает проблема неоднородности значений показателей  $F_{ij}$ . Действительно некоторые из них представляют собой количественные показатели, а некоторые качественные.

Для определения значений нечисловых параметров предлагается использовать пятибалльную шкалу, где 5 самая высокая оценка, а 1- самая низкая.

Однако даже после приведения качественных показателей к количественному виду, возникает проблема разной размерности показателей. Следовательно, необходимо привести показатели в безразмерный вид.

*Приведение параметров к безразмерному виду*

Как уже было сказано выше, следующим шагом для получения коэффициента полезности товара является приведения всех параметров к единому безразмерному виду:

$$f'_j(X_i) = \begin{cases} \frac{f_j^M - f_j(X_i)}{f_j^M - f_j^m} \\ \frac{f_j(X_i) - f_j^m}{f_j^M - f_j^m} \end{cases}, \quad (5)$$

где  $f'_j(X_i)$  – значение  $j$ -го критерия для варианта  $X_i$  в безразмерном виде;

$f_j(X_i)$  – значение  $j$ -го критерия для варианта  $X_i$  в определенных единицах измерения;

$f_j^M$  – максимальное;  $f_j^m$  – минимальное значения критерия  $f_j$  на определенном множестве альтернатив  $\{X_i\}$ .

Для этого можно использовать следующую функцию (5) приведенную в работе [2].

При этом верхняя формула предназначена для позитивно ориентированных критериев, а нижняя – для негативно ориентированных критериев.

Таким образом множество показателей  $F_i$  будет преобразовано в безразмерное множество  $F_i'$  следующим образом:

$$F'_{ij} = (F_{ij}^M - F_{ij}) / (F_i^M - F_i^m) \quad (6)$$

*Анализ применения методов экспертных оценок для получения весовых коэффициентов*

После приведения значений к безразмерному виду, необходимо определить весовые коэффициенты каждого из параметров для каждого из исследуемых товаров. Для расчета весовых коэффициентов можно использовать метод экспертных оценок, а именно: метод ранжирования.

На сегодняшний день данный метод применяется достаточно часто как в системах поддержки принятия решений, так и в других областях. Данный метод описан во многих источниках, например, в [2].

Содержательная постановка задачи, метода ранжирования, может быть сформулирована следующим образом. Из множества существующих вариантов решений надо выбрать наилучший, с учетом одного свойства, которое характеризуется соответствующим качественным критерием. Для решения этой задачи методом ранжирования экспертам может быть предложено сравнить варианты альтернативных решений на основе учета отдельного свойства  $l$ . При этом каждому варианту эксперт должен присвоить ранг (номер), который увеличивается с уменьшением оцениваемого свойства [2].

Рассмотрим основные моменты данного метода.

Пусть есть  $n$  вариантов решений, отдельное свойство  $l$  оценивает  $m$  экспертов. Обозначим через  $X_{ij}^l$  ранг  $l$ -того свойства  $j$ -го варианта в оценке  $i$ -го эксперта. Сумма рангов ранжирования  $i$ -го эксперта:

$$X_i^l = \sum_{j=1}^n X_{ij}^l = 0.5n(n+1). \quad (7)$$

При одинаковой оценке нескольких вариантов, эксперты должны придерживаться следующего правила: вариантам с одинаковой оценкой придается ранг, равный среднему арифметическому значению мест, которые они между собою делят. По результатам опрашивания экспертов строится матрица  $X_l$ , что отображает результаты оценок экспертов. Элементом матрицы будет значение  $X_{ij}^l$ .

Наилучший вариант  $A^*$  будет тот, который соответствует условию:

$$\min\{X_j^l\}, \quad (8)$$

где  $X_j^l$  – суммарный ранг j-го варианта по свойству l;

$$X_j^l = \sum_{i=1}^m X_{ij}^l \quad (9)$$

Необходимый вариант обработки результатов опроса экспертов – определение их согласованности. Для этого рассчитывается коэффициент конкордации:

$$K^l = \frac{12S^l}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^m T_i^l} \quad (10)$$

При полном согласии экспертов коэффициент равен единице, при полном несогласии нулю, т.е.  $0 \leq K^l \leq 1$  чем ближе он к единице, тем согласованнее мнения экспертов.

Далее рассчитывается дисперсия рангов по объектам S:

$$S^l = \sum_{j=1}^n d_j^l$$

$$d_j^l = (X_j^l - X_{сеп})^2$$

$$X_{сеп} = 0.5m(n+1). \quad (11)$$

Вектор оценки одного эксперта:

$$T_i^l = \sum_{\mu=1}^M (t_{\mu}^3 - t_{\mu}), \quad (12)$$

где  $t_{\mu}$  – число повторов  $\mu$ -ранга в ранжировании i-го эксперта.

Существует два метода взвешивания критериев: нормирование рангов и перевод рангов в диапазон возможных значений. Для определения весовых коэффициентов каждого из факторов предлагается использовать первый метод:

$$x_j \text{ преобразуется в } x_j^{\wedge}$$

$$x_j^{\wedge} = (m \times n) - x_j \quad (13)$$

Значение весовых коэффициентов рассчитывают по формуле:

$$\beta_j = \frac{x_j^{\wedge}}{\sum_{j=1}^n x_j^{\wedge}} \quad (14)$$

После проведения экспертного оценивания и получения весовых коэффициентов критериев множество  $F_i$  преобразуется в множество  $F_i''$ , каждый элемент множества рассчитывается по формуле:

$$F_{ij}'' = F_{ij}' * \beta_{ij}. \quad (15)$$

*Анализ применения метода линейной свертки критериев для расчета коэффициента полезности товара*

После получения весовых коэффициентов остается только получить из множества параметров

коэффициент полезности товара. Для этого можно использовать метод линейной свертки критериев (13):

$$V_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(A_i), \quad (16)$$

где  $\alpha_j$  – степень важности критерия  $f_j$ ;

$f_i(A_i)$  – оценка параметра A по i-му критерию.

В данной статье предлагается степенью важности считать весовой коэффициент критерия.

Следовательно, коэффициент полезности i-го товара  $C_i$  можно рассчитать по формуле:

$$C_i = \sum_{j=1}^K F_{ij}'' \quad (17)$$

*Построение математической модели задачи*

Таким образом, получена следующая модель задачи:

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max$$

$$C_i = \sum_{j=1}^K F_{ij}''$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b \quad (18)$$

$$x_i \leq q_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n,$$

где  $C_i$  – коэффициент полезности цена i-го товара.

Разработанная модель является моделью задачи линейного программирования. Наиболее подходящим методом для решения данной задачи является симплекс метод. Постановку задачи симплекс метода можно найти в работах [3-5].

Данная модель отличается от предложенных ранее моделей, например в [1], наличием дополнительного ограничения, в котором учитывается максимальный объем товара, что позволяет при проведении моделирования отсеять неподходящие для предприятия варианты.

Также в разработанной модели в качестве коэффициента полезности выступает не абстрактная функция полезности, как в [1], а конкретное значение, которое учитывает степень влияния каждого экономического фактора на спрос данного товара. При этом следует отметить, что список таких факторов является не постоянным и может меняться в зависимости от группы товаров. Однако при проведении моделирования одной группы такой список должен быть одинаков для каждого из товаров, при этом весовые коэффициенты одного и того же фактора могут существенно отличаться в зависимости от товара.

Общая схема имитационного моделирования при помощи предложенной модели показана на рис. 3.

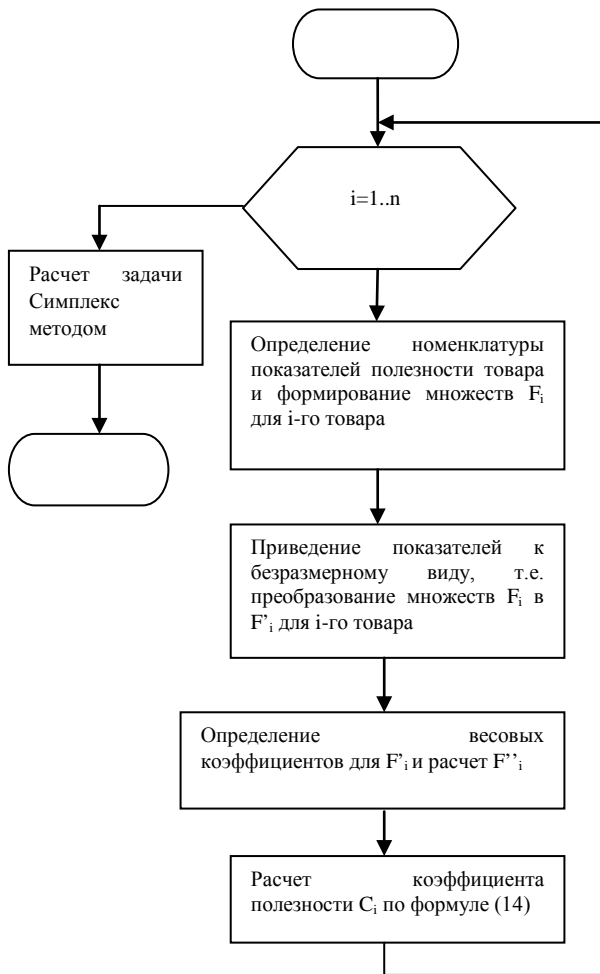


Рис.3. Схема имитационного моделирования спроса

Данный метод целесообразней всего использовать при анализе возможности изменения цены на группу товаров, которое выпускает предприятие в процессе всего жизненного цикла товаров.

### Выводы

Разработана многокритериальная математическая модель для моделирования объема продаж группы товаров, выпускаемой или продаваемой предприятием. Предложенная модель учитывает как доход потребителя, цену на товар и имеющийся объем товара, так и другие факторы, влияющие на спрос. Предложен метод расчета коэффициента полезности товара с использованием методов экспертной оценки линейной свертки критериев. Разработанная модель позволяет прогнозировать спрос на товары с достаточно большой вероятностью.

### Список литературы

1. Нецеевский А.Ю. Маркетинговая модель оптимизации ценовой политики предприятия [Текст]:

автореф. Дис. Канд. Экон. Наук / Ульянов, гос. Ун-т-СПб., 2002.- 19 с.

2. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е изд. [Текст]/ Таха Хэмди А.; пер. С англ. Минько А. А. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. — 912 с.

3. Венцель В.С. Исследование операций задачи, принципы, методология[Текст]/ Е. С. Венцель. - М.:Дрофа,2004.-208с.

4. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике. Модели, задачи, решения[Текст]/ Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П.-М.: Инфра-М.,2003.-444с.

5. Волков И.К., Загоруйко И.М. Исследование операций[Текст]/ Волков И.К., Загоруйко И.М.-М.: Моск. Гос. Техн. Ун-т им. Н.Э. Баумана,2004.- 436с.

6. Конюховский В.П. Математические методы исследования операций[Текст] /В.П. Конюховский.- СПб.: Питер, 2001.-208с.

Статья поступила в редколлегию: 28.10.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, профессор С.В. Цюцюра, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев