УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, ст. наук. співр.
Н.А. Гречух, наук. співр.

КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНЧАСТИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ПРИЄДНАНИХ МАС, ПРУЖНИХ В'ЯЗЕЙ І ВИРІЗІВ

Викладені алгоритми розв'язання задач про власні коливання континуальних конструкцій з використанням редукованих скінченноелементних моделей, що дають змогу враховувати такі особливості конструкцій, як наявність приєднаних мас і пружність опор. Приведені результати розв'язання задач з урахуванням цих особливостей, які порівнюються з результатами, що отримані за допомогою інших методів.

Побудова розрахункових моделей континуальних конструкцій виконується на основі методу скінченних елементів співвідношення для яких побудовані на основі положень тривимірної теорії пружності. Використання універсальних тривимірних схем МСЕ в задачах динаміки оболонок і пластин дає змогу зберігати властивості гіперболічності систем розв'язувальних рівнянь за рахунок природного урахування сил інерції зсуву і повороту. Останнє особливо важливе при дослідженні багаточастотних режимів коливань і хвильових процесів.

Забезпечення сталості обчислень по відношенню помилок округлення при розрахунку тонких і середньої товщини пластин і оболонок виконується шляхом використання у якості розв'язувальних функцій переміщень вузлів на серединній поверхні елемента та узагальнені кути повороту, які подаються як різниця переміщень вузлів на обмежуючих поверхнях [1]. Окрім цього, використовується гіпотеза про сталість напружень обтиснення по товщині оболонки. Введення такої гіпотези замість більш сильної умови $\sigma^{11}=0$ (координата x^1 орієнтована по товщині) не вносить не усувної похибки в просторовий скінченний елемент, дає змогу врахувати поперечне деформування оболонки і позбавляє необхідності переходу до переміщення в місцевій системі координат. Останнє має суттєве значення при дослідженні комбінованих конструкцій для яких умови контакту окремих фрагментів можуть бути подані у єдиній глобальній системі координат без виконання попередніх перетворень.

У кожний окремо взятий момент часу натужно-деформований стан оболонки як тривимірного тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху, яке у відповідності з принципом Лагранжа-Даламбера має вигляд:

$$\int\limits_v \sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dv - \int\limits_v \rho\left(F_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)\delta u^i\,dv - \int\limits_s X_i\delta u^i\,ds = 0\,. \qquad (1)$$

При побудові системи рівнянь руху дискретної моделі МСЕ спочатку необхідно у варіаційному рівнянні (1) перейти від інтегрування по об'єму тіла до суми інтегралів по об'ємам скінченних елементів, використовуючи співвідношення для матриць жорсткості, мас і узагальнених сил. Приймаючи до уваги, що в цих співвідношеннях невідомими є залежні від часу значення вузлових узагальнених переміщень, отримаємо співвідношення:

$$\sum_e \delta\{u\}_e^T [K]_e \{u\}_e + \sum_e \delta\{u\}_e^T [M]_e \{\ddot{u}\}_e - \sum_e \delta\{u\}_e^T \{Q(t)\}_e = 0\,, \qquad (2)$$

де $\{u\}_e$, $\{\ddot{u}\}_e$ – вектори узагальнених переміщень і прискорень, що визначаються у вузлах скінченних елементів; $[K]_e$, $[M]_e, \{Q(t)\}_e$ – відповідно матриці жорсткості, мас скінченного елемента та вектор вузлових сил, еквівалентних зовнішнім навантаженням. Символ $\sum\limits_e$ означає підсумування по всім елементам моделі.

В подальшому в (2) виконується перегрупування і зведення подібних членів таким чином, щоб перейти від підсумування по елементам до підсумування по індексам компонент вектора переміщень усієї дискретної моделі. При цьому відповідність між номерами вузлів усієї моделі конструкції і локальними номерами вузлів у скінченних елементах установлюється за допомогою матриць відповідності або "шаблонів" сіткової області.

В результаті отримаємо дискретний аналог варіаційного рівняння (1) у вигляді матричного рівняння:

$$\{u\}^T\left([K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} - \{Q(t)\}\right) = 0\,, \qquad (3)$$

де $\{u\}$, $\{\ddot{u}\}$ – n-вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів скінченноелементної моделі, яка має n степенів вільності; $[K]$, $[M]$ – матриці жорсткості і мас дискретної моделі конструкції; $\{Q(t)\}$ – вектор узагальнених вузлових сил.

Необхідною і достатньою умовою, що задовольняє рівняння (3) при довільних можливих (сумісних із в'язями) варіаціях вектора $\{u\}$ є умова рівності нулю співвідношення, яке в (3) розміщено в дужках:

$$[K]\{u\}+[M]\{\ddot{u}\}=\{Q(t)\}\,. \tag{4}$$

Методи розв'язку системи звичайних диференційних рівнянь руху дискретної моделі МСЕ (4) при заданих початкових умовах

$$\{u(t)\}\big|_{t=0}=\{u(0)\}\,,\quad \{\dot{u}(t)\}\big|_{t=0}=\{\dot{u}(0)\} \tag{5}$$

досить повно розроблені у теорії малих коливань [2].

Стосовно задачі про власні коливання при $\{Q(t)\}=0$, матричне рівняння (4) допускає розв'язок у вигляді

$$\{u\}=\{r\}Sin(\omega t+\alpha) \tag{6}$$

і зводиться до узагальненої проблеми про власні значення [3]

$$\left([K]-\lambda[M]\right)=0\,. \tag{7}$$

Рівняння (7) має нетривіальний розв'язок за умов

$$\det\left|[K]-\lambda[M]\right|=0\,, \tag{8}$$

що є характеристичним рівнянням системи.

Корні $\lambda_i\,(i=1,2,...n)$ і відповідні їм вектори розв'язку системи (7) $\{r\}^{(i)}$ називаються власними значеннями і власними векторами матриці $[M]^{-1}[K]$. Підставимо їх у (7) та отримаємо рівність

$$[K][R]=[\Lambda][M][R]\,, \tag{9}$$

де $[R]$– модальна матриця, стовпцями якої є відповідним чином нормовані вектори $\{r\}^{(i)}$, $[\Lambda]$ –діагональна матриця, складена із власних значень λ_i.

Окрім самостійного використання при оцінці частот і форм власних коливань конструкції, що має важливе значення для прогнозування резонансних явищ в реальних конструкціях розв'язок проблеми (7) набуває фундаментальну роль у теорії малих коливань, а також в методах розв'язання нелінійних задач (таких як метод малого параметра , методи теорії стійкості руху, розгалуження рішень та ін.).

Нормування векторів $\{r\}^{(i)}$, що визначаються з точністю до довільної постійної, виконується за формулою

$$\{r\}^{(i)} = \{\tilde{r}\}^{(i)} \cdot \left\| \{r\}^{(i)} \right\|^{-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

де

$$\left\| \{r\}^{(i)} \right\| = \{\tilde{r}\}^{(i)^T} [M] \{\tilde{r}\}^{(i)}. \tag{11}$$

Тут $[M]$ являє собою метричну матрицю n- вимірного лінійного метричного простору розв'язку систему (4). Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення (7) дає змогу виконати перетворення системи розв'язувальних рівнянь до головного (нормального) базису простору. Важливіші для застосування властивості ортогональності власних векторів при нормалізації (9) записуються у вигляді:

$$[R]^T [M][R] = [E], \quad [R]^T [K][R] = [\Lambda], \tag{12}$$

де $[E]$ – одинична матриця.

Стосовно задачі про вільні коливання.

Розв'язок (4) за умов $\{Q(t)\} = 0$ і довільних початкових умовах (5) подано у вигляді:

$$\{u\} = [R][S(t)]\{a\} + [R][C(t)]\{b\}, \tag{13}$$

де $[S(t)], [C(t)]$ – діагональні матриці, компоненти яких є гармонічні функції, що мають вигляд:

$$S_{(i,i)}(t) = Sin\omega_i t, \; C_{(i,i)} = Cos\omega_i t, \tag{14}$$

де $\{a\}$, $\{b\}$ – вектор невідомих амплітудних значень при відповідних гармоніках;

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_{(i)}}\ ,\ (i = 1,2,...,N)\ - \qquad (15)$$

значення колових частот власних коливань.

Підставимо початкові умови (5) при $t = 0$ в (13):

$$\{u(0)\} = [R]\{b\},\quad \{\dot{u}(0)\} = [R][\Lambda]\{a\}\,. \qquad (16)$$

Розв’язуючи (16) з урахуванням того, що у відповідності з (12)

$$[R]^{-1} = [R]^T[M]\,,\ \left([R][\Lambda]\right)^{-1} = [\Lambda]^{-1}[R]^{-1} = [\Lambda]^{-1}[R][M]\,. \qquad (17)$$

Отримаємо:

$$\{b\} = [R]^T[m]\{u(0)\}\,,\ \ \{a\} = [\Lambda]^{-1}[M]\{\dot{u}(0)\}\,, \qquad (18)$$

де компоненти діагональної матриці $[\Lambda]^{-1}$ є величини $\lambda_{(i)}^{-1}$.

До розв’язку задачі, що розглядається, слід віднести такі практично важливі випадки динамічного навантаження конструкцій, як імпульс початкової швидкості; миттєве прикладання навантаження; продовження розв’язку задачі про змушені коливання , коли зовнішні сили досягли найбільшого значення.

Початкові переміщення $\{u(o)\}$ повинні бути задані відносно врівноваженого стану.

Аналізуючи описані методи розв’язання задач динаміки з точки зору їх реалізації на ПЕОМ стосовно до МСЕ, усю сукупність обчислень слід розділити на дві групи. До першої відносяться елементарні операції лінійної алгебри (обчислення суми та лінійних комбінацій векторів, скалярних добутків векторів і норм векторів у просторі розв’язків задачі, визначення сум і добутків матриць і т.п.).

Реалізація цих обчислень на алгоритмічній мові із забезпеченням оптимізації витрат машинного часу досягається за рахунок ретельно продуманої техніки програмування з використанням у більшості випадків стандартного математичного забезпечення ЕОМ.

До другої групи операцій, від ефективності реалізації яких залежить час і трудомісткість процесів завдання даних, розв’язок задачі і обробки результатів а також сама можливість отримання достовірних результатів стосовно складних конструкцій, слід віднести:

1) алгоритми реалізації співвідношень МСЕ (подання геометрії, топології, в'язей, навантажень; обчислення матриці жорсткості, мас і зведених вузлових сил в елементах і усієї конструкції);

2) розв'язання узагальненої проблеми про власні значення матриць типу (6), побудова форм коливань моделі конструкції і т.п;

3) алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Труднощі побудови і реалізації цих алгоритмів обумовлені перш за все великими розмірами систем рівнянь МСЕ для складних континуальних конструкцій. Успішний розв'язок цих проблем можливий за умови комплексного розгляду взаємопов'язаних питань механіки, системотехніки обчислювальної математики і програмування.

Стосовно розв'язку задачі про власні коливання об'єктів та ще й з урахуванням особливостей, таких як наявність вирізів, приєднаних мас, пружної піддатливості в'язей структура алгоритмів значно ускладнюється. До цього слід додати, що розв'язання задачі динаміки вимагає приблизно на порядок більше витрат машинного часу у порівнянні з витратами на розв'язання відповідної задачі статики. В той же час у більшості випадків щодо практичних застосувань слід визначити лише деяку частину власних частот нижньої частини спектру дискретної моделі.

У зв'язку з цим виникла проблема редукування (пониження порядку) системи розв'язувальних рівнянь.

Суть більшості методів редукування полягає у пошуку такого перетворення вектора невідомих

$$\{u\} = [U]\{q\}, \tag{19}$$

щоб вектор нових узагальнених координат мав значно меншу розмірність, а нижні частоти власних коливань вихідної і редукованої моделей були близькими. Можливість такого перетворення пояснюється тією обставиною, що у випадку прийняття складовими $[U]$ визначені якимось чином m власних векторів вихідної задачі, то отримаємо редуковану систему m -го порядку, власні значення якої повністю співпадають з власними значеннями, що відповідають вибраним для перетворення власним векторам вихідної моделі.

Викладене положення лежить в основі алгоритму одночасних ітерацій у підпросторі [2].

У даній роботі набув розвитку запропонований В.М. Кислооким метод базисних векторів, який не пов'язаний зі способом дискретизації вихідної задачі і найбільш повно проявив себе стосовно скінченноелементної моделі.

Суть метода полягає у переході до нових узагальнених координат за допомогою перетворення (19). Підставляючи (19) у (3) отримаємо систему руху редукованої моделі, що набуває вигляду:

$$[A]\{q\}+[B]\{\ddot{q}\}=\{q(t)\}\,, \tag{20}$$

де

$$[A]=[U]^T[K][U]\,, \tag{21}$$

$$[B]=[u]^T[M][U]\,, \tag{22}$$

$$\{q(t)\}=[U]^T\{Q(t)\}\,. \tag{23}$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі. У якості базисних векторів приймається m розв’язків статичної задачі.

$$[K][U]=[P]\,, \tag{24}$$

де $[P]$– матриця, складена з m лінійно незалежних (наприклад, одиничних) векторів

$$[U]=[K]^{-1}[P]\,. \tag{25}$$

Найпростіший варіант методу базисних векторів ґрунтується на методі переміщень будівельної механіки, коли з набору вузлових переміщень скінченноелементної моделі, яка має тисячі ступенів вільності, у якості нових узагальнених координат вибираються переміщення деякої сукупності переміщень вузлів, так званих базисних вузлів, регулярно розташованих у сітковій області скінченноелементної моделі. Будується основна система методу переміщень шляхом накладання в’язей у напрямку призначених переміщень базисних вузлів. Цим підкреслюється незалежність нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів.

Матриця базисних векторів визначається у результаті розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення по напрямку нових узагальнених координат. Задача зводиться до розв’язку системи рівнянь

$$[\overset{*}{K}][\widetilde{U}]=[\overset{*}{P}]\,, \tag{26}$$

у якій матриця $[\overset{*}{P}]$ будується зі стовпчиків матриці $[K]$, а матриця $[\overset{*}{K}]$ отримана у результаті обнуління недіагональних елементів, що стосуються переміщень, прийнятим у якості узагальнених координат.

Цей метод побудови базисних векторів, назвемо його методом одиничних станів, допускає ряд важливих узагальнень.

По-перше, розмірність базисного вектора співпадає з числом ступенів вільності вихідної скінченноелементної моделі і у зв'язку з цим побудова редукованих матриць жорсткості і мас (21), (22), виконується із збереженням просторової апроксимації переміщень і форм коливань скінченноелементної моделі конструкції.

По-друге – коефіцієнти редукованих матриць жорсткості і мас відповідають переміщенням базисних вузлів, які визначені на топологічній схемі редукованої моделі. Кожній узагальненій координаті редукованої моделі чітко визначено номер. А це дає змогу визначити положення відносно її коефіцієнта в редукованих матрицях жорсткості і мас. При необхідності урахування пружної піддатливості в'язей, накладених на конструкцію, розташування такої в'язі і її орієнтація повинні співпадати з відповідним базисним вузлом і його переміщенням, тобто узагальненою координатою редукованої моделі, пов'язаним з цим базисним вузлом. Коефіцієнт жорсткості, який характеризує пружну в'язь, додається до відповідного коефіцієнта редукованої матриці жорсткості і таким чином враховується вплив пружної піддатливості в'язей.

У разі необхідності врахувати наявність приєднаної маси на конструкції, аналогічно корегується коефіцієнт редукованої матриці мас.

Кожна узагальнена координата редукованої моделі характеризується сітковим номером вузла скінченноелементної моделі, який прийнято як базисний і номером осі глобальної системи координат, по напрямку якої базисний вузол зміщується. У загальному випадку базисний вузол має шість ступенів вільності: 3 поступальних переміщення по напрямку 3-х осей глобальної системи координат і три узагальнених кутів повороту. Кожній узагальненій координаті призначається глобальний номер у наскрізній нумерації узагальнених координат дискретної моделі. У конкретному випадку число ступенів вільності, що враховують у базисному вузлі залежить від задачі, яку слід розв'язати. Якщо необхідно визначити мінімальну частоту, то у базисному вузлі зберігають ступені вільності по напрямку найменшої жорсткості конструкції. Наприклад, при розв'язанні задачі про власні коливання пластини, в базисному вузлі слід зберігати переміщення по нормалі до поверхні пластини. Тобто у базисному вузлі зберігається один ступінь вільності.

У випадку, коли розглядається задача про коливання складної конструкції, всю сукупність базисних вузлів слід згрупувати таким чином, щоб основна система розпалася на ряд ізольованих фрагментів. Побудова редукованих матриць фрагментів виконується незалежно, але нумерація узагальнених координат виконується для цілої моделі конструкції таким чином, щоб узагальнені координати вузлів різних фрагментів, які з'єднуються мали одинакові глобальний номер.

Проведено дослідження впливу піддатливості пружних опор на частоти і форми власних коливань пластини з коловим вирізом, показаної на рис.1. Пластина по краю AB має закріплення щодо лінійних переміщень та дві пружні опори, шарнірно закріплені в точках C і D.

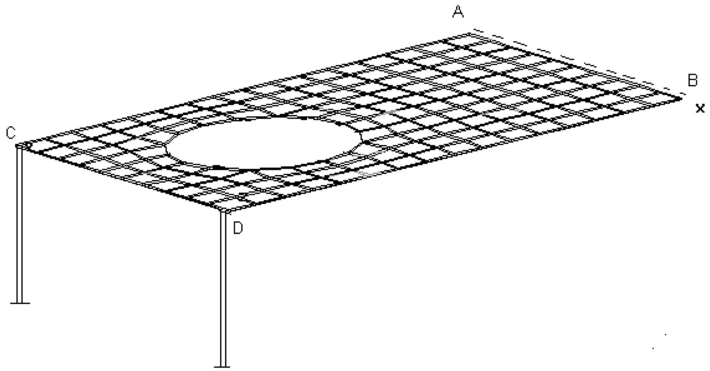
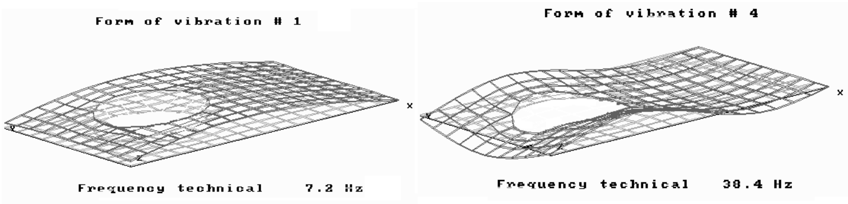


Рис. 1. Пластина з коловим вирізом

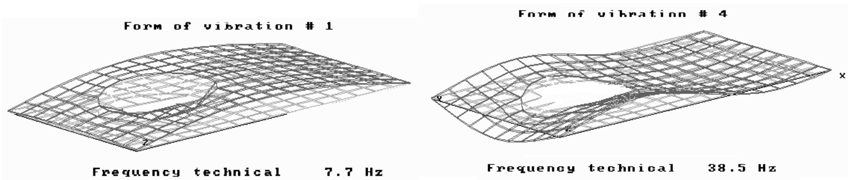
Врахування піддатливості пружних в'язей виконується за умов того, що переміщення точок контакту оболонки і пружної в'язі є спільними. Реакція пружної в'язі на змушене одиничне переміщення використовується як добавка до коефіцієнта матриці жорсткості конструкції, що відповідає узагальненому переміщенню вузла, до якого притикає пружна в'язь.

Для розв'язання задачі використана редукована модель. Базисні вузли, кожен з яких має один ступінь вільності по напрямку нормалі до поверхні пластини, показаної на рис.1, вибирається таким чином, щоб два вузли з цього набору були віднесені до вузлів сітки у точках кріплення пружних в'язей. Редукована матриця жорсткості пластини формується один раз. Надалі виконується її корегування шляхом додавання до діагональних членів редукованої матриці, які відповідають базисним вузлам з опорними в'язями, значень коефіцієнтів жорсткості опорних в'язей.

Частоти власних коливань пластини з вирізом для декількох значень параметру жорсткості стержня показані на рис. 2. Суттєвий вплив зміни жорсткості опорних в’язей стосується першої і другої частоти власних коливань. У четвертої форми коливань точки кріплення пружних в’язей розташовані на вузловій лінії і тому жорсткість опорних стержнів на четверту частоту власних коливань впливає незначним чином.



а



б

Рис. 2. Частоти власних коливань пластини з вирізом
а) збільшення жорсткості опори в 1.5 рази; б) збільшення жорсткості опори в 10 разів

Вплив приєднаних точкових мас на частоти власних коливань виконано для пластини, показаної на рис. 3.

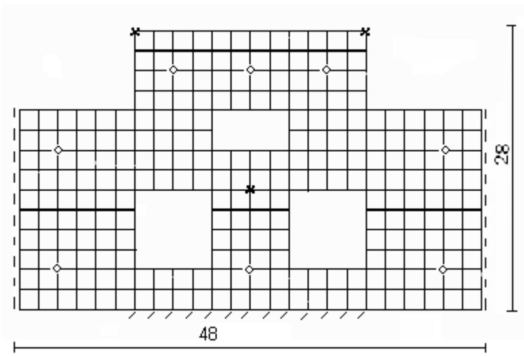
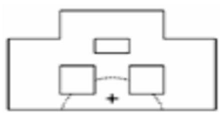
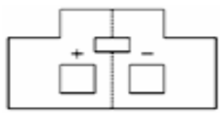
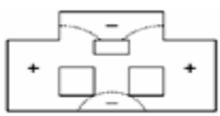
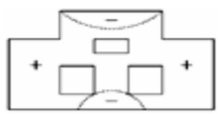
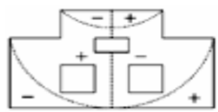


Рис. 3. Пластина з приєднаними точковими масами

Пластина з вирізами шарнірно закріплена по двох протилежних краях (пунктирні лінії), частково закріплена по третьому краю і ще має три точкові опори, позначені на схемі хрестиками. Приєднані точкові маси позначені кружечками. Товщина пластини $h = 0.3$ см, модуль пружності $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ н/м^2, щільність $-7.8 \cdot 10^3$ кг/м^3, коефіцієнт Пуассона – 0.3. Результати розв'язку цієї задачі викладені в [3]. Для нас вона розглядається як тестова задача. При побудові скінченноелементної моделі пластини приєднані маси розташовані у вузлах сітки. Ці вузли включені до складу базисних вузлів редукованої моделі. Дослідження впливу приєднаних мас на частоти і форми власних коливань виконується шляхом додавання їх до відповідних діагональних членів редукованої матриці мас моделі конструкції.

Порівняння результатів розв'язку задачі отриманих за допомогою описаної методики з даними в [3] показані в табл. 1.

Таблиця 1

Форми власних коливань	Технічні частоти власних коливань (Гц)	
	Без урахування приєднаних мас	З урахуванням приєднаних мас
	180	112
	213	183
	248	233
	478	326
	535	480

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кислоокий В.Н., Легостаэв А.Д., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Об одном варианта метода конечных элементов в задачах статики и динамики консольных оболочек. – В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1975, вип. 27. С. 45-51.
2. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
3. *Богомолов С.И., Журавлева А.М.* Колебания сложных механических систем. – Харков.: Вища школа, 1978. –136 с.

Отримано 08.05.09

Изложены алгоритмы решения задач о собственных колебаниях континуальных моделей конструкций с использованием редуцированных конечноэлементных моделей позволяющих учитывать наличие присоединенных масс, упруго-податливых связей и вырезов. Приведены результаты решения задач, в которых учтены указанные особенности конструкции. Выполнено сравнение этих результатов с полученными другими методами и экспериментально.

The algorithms of modal analysis of environments with use of the reduced final elements models are stated. These models allow to take into account presence of attached weights, elastic connections and cuts. The results of the decision of problems taking into account specified features of a design are given. The comparison of these results with received with the help of other methods and experimentally is made.