

УДК 539.3

Киричук О.А., д-р техн. наук,  
Палій О.М.

## ВПЛИВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА СТІЙКІСТЬ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Оболонкові конструкції, які є елементами сучасних споруд, в процесі експлуатації сприймають інтенсивні технологічні навантаження, в тому числі і динамічні, що змінюються періодично за часом. Найбільшу увагу дослідників, при вивченні динамічної стійкості конструкцій, привертають випадки, коли частота змушених коливань наближається до однієї з власних частот коливань конструкції. Це призводить до різкого збільшення амплітуд коливань конструкцій, що є неприйнятним з експлуатаційної точки зору. В той же час і при фіксованій частоті коливань збільшення амплітуди періодичного навантаження може привести до різного збільшення амплітуди коливань оболонки або змінити її форми коливань.

Мета даної роботи полягає у дослідженні впливу геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень.

Будемо розглядати оболонки з ковзним кріпленням вздовж твірної на одному кінці, а інший край оболонки вважатимемо жорстко закріпленим. При дії періодичного навантаження невеликої інтенсивності коливання оболонок відбуваються по симетричним відносно осі формам. Збільшення інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті може переводити їхні симетричні моди в циклічно симетричні. За певних умов, залишаючись симетричними, коливання оболонок можуть різко збільшити амплітуду і змінити форму коливань. Перераховані явища характеризують втрату стійкості усталеного руху.

Для дослідження стійкості вимушених нелінійних коливань оболонок використовується метод криволінійних сіток, за допомогою якого здійснюється перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь[1]. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона –Канторовича. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають

симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника, а рівень інтенсивності навантаження, що відповідає цьому стану, характеризує критичне динамічне навантаження [2,3,4].

В рамках даної статті розглянута циліндрична оболонка, матеріал якої характеризується параметрами: коефіцієнт Пуассона  $\mu=0,3$ , модуль пружності  $E=2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; щільність  $\gamma=7800$  кг/м<sup>3</sup> під дією періодичного за часом рівномірно розподіленого повздовжнього навантаження з інтенсивністю  $q=q_1 \cos \omega t$ . З метою вивчення впливу зміни геометричних параметрів даної оболонки на стійкість її усталених нелінійних коливань товщина  $h$  оболонки змінювалась в межах від 0,001 м до 0,004 м. Розглядалися варіанти, коли радіус  $R$  набував значень 0,2 м, 0,4 м, 0,8 м та висота  $L$  оболонки дорівнювала 0,48 м, 0,72 м та 0,96 м.

В таблиці 1 наведені критичні значення  $q_1^*$  амплітуд навантаження при відповідних кругових частотах коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $R=0,2$  м,  $L=0,48$  м, а також номери гармонік  $n$ , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості коливань. Товщина оболонки  $h$  змінювалась в межах від 0,004 м до 0,001 м.

Таблиця 1

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,004$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
0	6	11000,05	2900	4	10500,05	4300	5	7000,05
100	6	11000,05	3000	4	10300,05	4400	5	6000,05
300	6	11000,05	3100	4	10000,05	4500	5	4700,05
500	6	11000,05	3300	4	9300,05	4600	5	2650,05
700	6	11000,05	3600	4	7900,05	4630	5	1550,05
1000	6	10950,05	3800	4	6600,05	4640	5	850,05
1400	6	10950,05	4000	4	4850,05	4645	5	0,05
1700	6	10900,05	4200	4	1250,05	4700	3	9050,05
2000	6	10850,05	4210	4	600,05	4800	3	8000,05
2200	6	10800,05	4211	4	500,05	4900	3	6700,05
2400	6	10750,05	4212	4	350,05	5000	3	5000,05
2600	6	10700,05	4213	4	100,05	5100	3	2100,05
2800	6	10650,05	4214	4	0,05	5120	3	0,05
2850	4	10650,05	4220	5	7650,05	5200	5	910,05

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
0	8	2800,05	3030	5	750,05	3340	6	350,05
100	8	2800,05	3050	5	600,05	3347	6	100,05
300	8	2800,05	3060	5	500,05	3348	6	0,05
500	8	2800,05	3070	5	350,05	3360	4	1700,05
700	8	2850,05	3080	5	100,05	3370	4	1650,05
1000	8	2850,05	3081	5	0,05	3390	4	1550,05
1400	8	2800,05	3085	6	1850,05	3400	4	1500,05
1700	8	2750,05	3090	6	1800,05	3450	4	1150,05
2000	8,9	2750,05	3100	6	1800,05	3500	4	700,05
2300	5	2600,05	3150	6	1600,05	3520	4	400,05
2500	5	2350,05	3160	6	1600,05	3528	4	0,05
3000	5	950,05	3200	6	1400,05	3550	7	2550,05
3010	5	900,05	3330	6	500,05	3600	7	2500,05
$h=0,0015$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
50	10	1570,01	2100	6	1480,01	2775	5	100,01
100	10	1570,01	2200	6	1400,01	2776	5	60,01
200	10	1565,01	2300	6	1290,01	2777	5	0,01
300	10	1565,01	2400	6	1170,01	2780	7	1410,01
600	10	1565,01	2500	6	1010,01	2800	7	1400,01
700	10	1565,01	2600	6	820,01	2900	7	1280,01
900	10	1560,01	2700	6	520,01	3000	7	1100,01
1000	10	1560,01	2750	6	230,01	3100	7	810,01
1200	10,11	1560,01	2760	6	100,01	3199	7	0,01
1400	10	1550,01	2762	6	0,01	3220	4	1270,01
1600	10	1550,01	2763	5	250,01	3250	4	1170,01
1800	10	1540,01	2765	5	230,01			
2000	10,11	1540,01	2770	5	180,01			
$h=0,001$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
50	13	690,002	1600	13	680,002	2350	7	90,002
100	13	690,002	1800	6	625,002	2356	7	35,002
200	13	690,002	2000	6	485,002	2357	7	0,002
300	13	690,002	2100	6	382,502	2400	5	445,002
600	13	687,502	2200	6	227,502	2450	5	355,002
700	13	687,502	2250	6	40,002	2500	5	232,502
900	13	687,502	2252	6	0,002	2530	5	92,5025
1000	12,13	687,502	2260	7	327,502	2536	5	0,002
1200	13	685,002	2280	7	295,002	2550	8	540,002
1400	13	682,502	2300	7	255,002			

На рис. 1 відображені залежності критичних значень  $q_1^*$  амплітуд навантаження, що періодично змінюється з часом, від кругової частоти коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $R=0,2$  м,  $L=0,48$  м. При цьому  $h$  набуває значень  $h=0,004$  м (рис. 1а),  $h=0,002$  м (рис. 1б),  $h=0,0015$  м (рис. 1, в, г),  $h=0,001$  м (рис. 1,д)

Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис.1в), вони приведені в більшому мірілі на рис. 1, г.

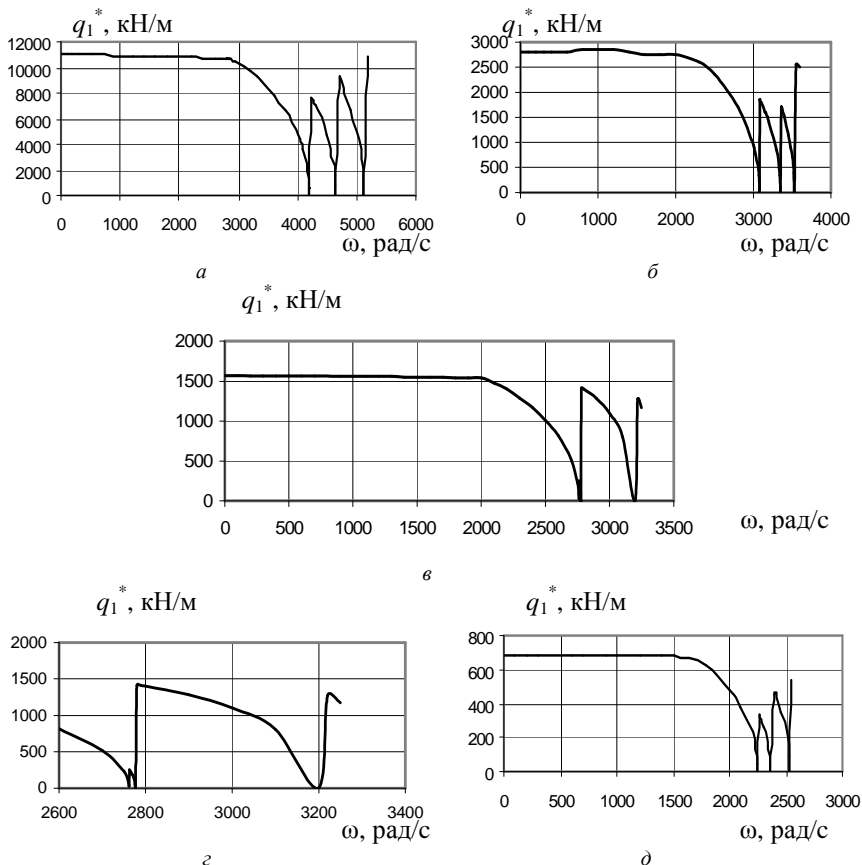


Рис.1. Залежність критичного значення  $q_1^*$  амплітуди навантаження від частоти при  $R=0,2$  м,  $L=0,48$  м а)  $h=0,004$  м, б)  $h=0,002$  м, в, г)  $h=0,0015$  м, д)  $h=0,001$  м

В табл. 2 наведені результати обчислень для оболонки з  $h=0,002\text{м}$ ,  $R=0,2\text{м}$  для випадків:  $L=0,48\text{ м}$ ,  $0,72\text{м}$ ,  $0,96\text{м}$  при відповідних значеннях кругової частоти.

Таблиця 2

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002\text{ м}, R=0,2\text{ м}, L=0,48\text{ м}$								
0	8	2800,05	3030	5	750,05	3340	6	350,05
100	8	2800,05	3050	5	600,05	3347	6	100,05
300	8	2800,05	3060	5	500,05	3348	6	0,05
500	8	2800,05	3070	5	350,05	3360	4	1700,05
700	8	2850,05	3080	5	100,05	3370	4	1650,05
1000	8	2850,05	3081	5	0,05	3390	4	1550,05
1400	8	2800,05	3085	6	1850,05	3400	4	1500,05
1700	8	2750,05	3090	6	1800,05	3450	4	1150,05
2000	8,9	2750,05	3100	6	1800,05	3500	4	700,05
2300	5	2600,05	3150	6	1600,05	3520	4	400,05
2500	5	2350,05	3160	6	1600,05	3528	4	0,05
2800	5	1700,05	3180	6	1500,05	3550	7	2550,05
3000	5	950,05	3200	6	1400,05	3600	7	2500,05
3010	5	900,05	3330	6	500,05			
$h=0,002\text{ м}, R=0,2\text{ м}, L=0,72\text{ м}$								
0	9	1820,005	2050	4	560,005	2420	9	1710,005
100	9	1820,005	2080	4	305,005	2440	6	1705,005
200	9	1820,005	2092	4	50,005	2460	6	1695,005
300	9	1820,005	2100	5	1095,005	2500	6	1680,005
400	9	1815,005	2200	5	625,005	2600	3	1575,005
600	9	1815,005	2210	5	550,005	2700	3	845,005
800	9	1810,005	2220	5	465,005	2720	3	590,005
1000	9	1800,005	2230	5	355,005	2730	3	405,005
1200	9	1795,005	2240	5	190,005	2738	3	0,005
1400	9	1785,005	2245	5	0,005	2740	6	1490,005
1600	4,9	1775,005	2250	9	1725,005	2750	6	1470,005
1800	4	1415,005	2300	9	1720,005			
2000	4	825,005	2400	9	1715,005			

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002$ м, $R=0,20$ м, $L=0,96$ м								
0	15	1080,005	1500	4	630,005	1783	3	0,005
100	15	1080,005	1550	4	365,005	1784	15	1025,005
200	15	1080,005	1560	4	280,005	1800	15	1025,005
300	15	1080,005	1570	4	150,005	1900	5	1005,005
400	15	1080,005	1575	4	0,005	2000	5	275,005
600	15	1075,005	1580	15	1040,005	2007	5	0,005
800	15	1070,005	1600	15	1040,005	2050	15	1010,005
1000	15	1065,005	1700	3	845,005	2100	15	1005,005
1200	15	1055,005	1750	3	535,005			
1400	4	935,005	1760	3	445,005			

Рисунок 2 демонструє залежності  $q_1^*$  -  $\omega$  для оболонки з  $h=0,002$ м,  $R=0,2$ м, для випадків:  $L = 0,48$ м (рис. 2,а),  $L = 0,72$ м (рис.2, б),  $L = 0,96$ м (рис. 2,в).

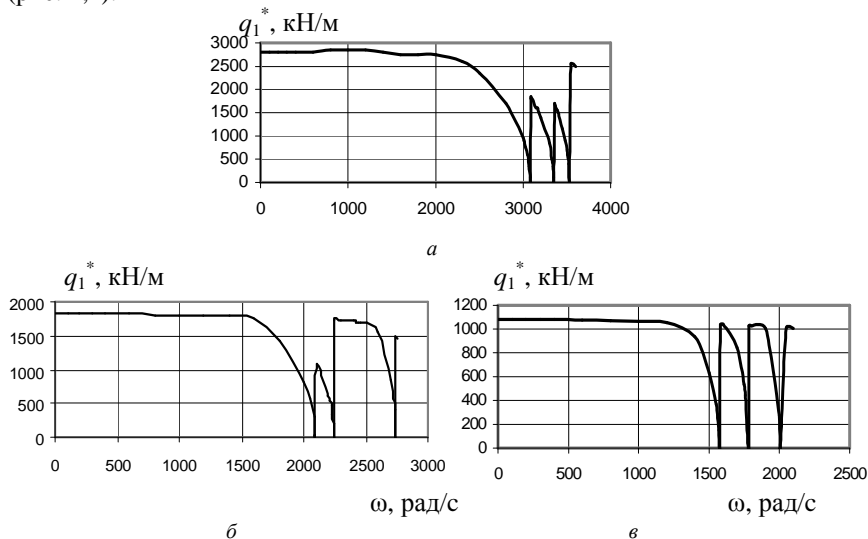


Рис. 2. Залежність  $q_1^*$  від частоти при значеннях параметрів оболонки  $h=0,002$ м,  $R=0,2$ м: а)  $L=0,48$ м; б)  $L=0,72$ м; в)  $L=0,96$ м

В таблиці 3 приведені результати обчислень для оболонки з  $h = 0,002$ м,  $L=0,72$ м для випадків:  $R = 0,2$ м,  $R=0,4$ м,  $R=0,8$ м.

Таблиця 3

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
$h=0,002 \text{ м}, R=0,2 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	9	1820,005	2000	4	825,005	2400	9	1715,005
100	9	1820,005	2050	4	560,005	2420	9	1710,005
200	9	1820,005	2080	4	305,005	2440	6	1705,005
300	9	1820,005	2092	4	50,005	2460	6	1695,005
400	9	1815,005	2200	5	625,005	2500	6	1680,005
600	9	1815,005	2210	5	550,005	2600	3	1575,005
800	9	1810,005	2220	5	465,005	2700	3	845,005
1000	9	1800,005	2230	5	355,005	2720	3	590,005
1200	9	1795,005	2240	5	190,005	2730	3	405,005
1400	9	1785,005	2245	5	0,005	2738	3	130,005
1600	4,9	1775,005	2250	9	1725,005	2740	6	1490,005
1800	4	1415,005	2300	9	1720,005	2750	6	1470,005
$h=0,002 \text{ м}, R=0,4 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	12,13	930,005	1300	7	660,005	1550	8	200,005
100	12,13	930,005	1400	7	455,005	1560	8	90,005
200	12,13	930,005	1450	7	299,005	1562,5	8	17,005
400	12,13	930,005	1460	7	240,005	1562,6	8	0,005
600	13	930,005	1480	7	60,005	1563	6	230,005
700	12,13	925,005	1481,5	7	0,005	1565	6	220,005
900	12,13	920,005	1482	8	490,005	1570	6	175,005
1000	12,13	920,005	1485	8	485,007	1579,5	6	0,005
1100	7	890,005	1490	8	470,005	1580	9	820,005
1200	7	795,005	1500	8	435,005	1600	9	800,005
$h=0,002 \text{ м}, R=0,8 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	15	465,005	1040	11	70,005	1049	10	205,005
100	15	465,005	1042	11	55,005	1050	10	200,005
200	15	465,005	1043	11	50,005	1060	10	175,005
300	15	465,005	1044	11	25,005	1070	10	140,005
400	14,15	465,005	1044,5	11	15,005	1080	10	95,005
600	15	460,005	1044,62	11	0,005	1085	10	55,005
700	12-15	460,005	1044,7	12	50,005	1086	10	35,005
800	12	425,005	1045	12	50,005	1087	10	35,005
900	11	350,005	1046	12	35,005	1087,67	10	0,005
1000	11	205,005	1047	12	15,005	1088	13	35,005
1010	11	185,005	1047,5	12	0,005	1090	13	270,005
1020	11	155,005	1048	10	205,005			

Рисунок 3 відображає залежності  $q_1^*$  від частоти коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $h=0,002\text{м}$ ,  $L=0,72\text{м}$ . При цьому  $R$  набуває значень:  $R=0,2\text{м}$  (рис. 1,а),  $R=0,4\text{м}$  (рис. 1,б,в),  $R=0,8\text{м}$  (рис. 1, г,д). Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис. 3,б,г), вони приведені в більшому мірілі на рис. 3,в,д.

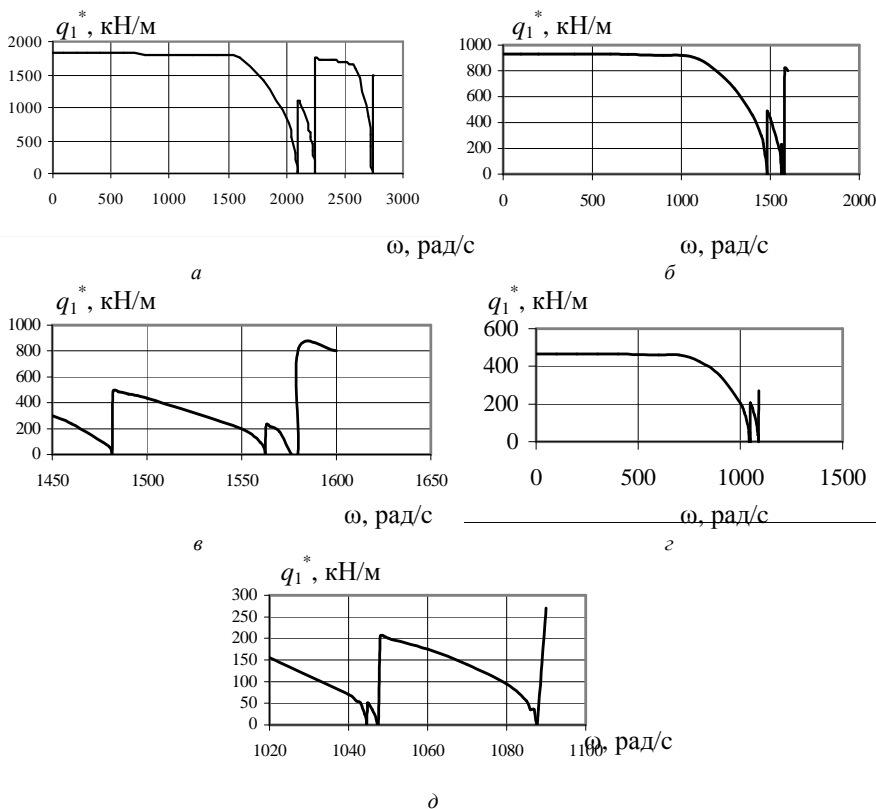


Рис.3. Залежність  $q_1^*$  від частоти при  $h=0,002\text{м}$ ,  $L=0,72\text{м}$ : а)  $R=0,2\text{м}$ ; б),в)  $R=0,4\text{м}$ ; г),д)  $R=0,8\text{м}$

В таблицях 1, 2, 3 існують області частот параметричних коливань, при яких критичні значення  $q_1^*$  амплітуд навантаження наближаються до нуля. На відповідних залежностях, що показані на рис. 1, 2, 3, існують зони, в яких зазначені криві перетинають вісь частот. Втрата стійкості в



таких станах набуває резонансного характеру, а значення частот відповідають власним частотам вільних коливань.

Аналіз отриманих результатів (табл. 1, рис. 1) дозволяє зробити висновок: при зменшенні товщини та при фіксованих значеннях радіуса та висоти циліндричної оболонки значення нижчих власних частот та критичних навантажень зменшуються; втрата стійкості реалізується по циклічно симетричним формам.

При різних значеннях висоти оболонки та при  $h/R = \text{const}$  (табл. 2, рис. 2) збільшення висоти приводить до пониження амплітуди критичного навантаження та власних частот коливань оболонки. Так, при збільшенні висоти в два рази значення першої нижчої власної частоти знижується майже вдвічі; втрата стійкості розглянутих оболонок відбувається по циклічно-симетричним формам.

У випадку, коли радіус оболонки збільшувався вдвічі та в чотири рази (табл. 3, рис. 3) при однакових значеннях товщини та висоти оболонки, результати дослідження вказують на зменшення нижчих власних частот та амплітуд критичного навантаження. Втрата стійкості відбувається по циклічно-симетричним формам, кількість гармонік в коловому напрямку при збільшенні радіуса збільшується.

Результати проведених дослідження засвідчують, що втрата стійкості коливань циліндричних оболонок в діапазоні частот, що розглядається, відбувається по циклічно симетричним формам. В межах кожного діапазону частот, обмежених резонансними точками, збільшення частоти змусених коливань приводить, як правило, до пониження критичних амплітуд навантажень.

1. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.Н., Жадрасинов Н.Т. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев, КИСИ (Рукопись деп. в УкрНИИТИ - N 2557) - 23 стр.
2. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Численное исследование устойчивости нелинейных вынужденных колебаний тонких оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности.- Горький, 1981.-№19. – с.51 – 60.
3. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Устойчивость нелинейных колебаний оболочек вращения //Прикладная механика. – Киев, 1982, т.18, №6. – с.50 – 56.
4. Гайдайчук В.В Киричук А.А., Палий О.Н. Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. – Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003, -55-58с.