

УДК. 539.3

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук

Соловійов І.Л., канд. техн. наук

## **СТІЙКІСТЬ ПОДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ ОСЬОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Проблема дослідження втрати стійкості рівноваги пружних оболонок є однією з центральних у механіці деформівного твердого тіла. Як правило, ці дослідження проводяться з використанням концепції статичного випинання оболонки на основі лінеаризованих розв'язуючих рівнянь. Однак розвиток турбо- та авіабудування показав, що в ряді випадків класичні підходи, що засновані на методах статички, виявляються непридатними для рішення подібних задач, оскільки на оболонковій конструкції цих систем діють неконсервативні зовнішні сили й вони втрачають стійкість рівноваги шляхом переходу в режими коливальних рухів. З урахуванням цієї особливості стійкість рівноваги таких систем повинна перевірятися на основі динамічного підходу. У даній роботі вивчається стійкість рівноваги циліндричних оболонок, що обертаються, під дією осьових слідкуючих навантажень.

Питання аналізу динамічної втрати стійкості рівноваги стержневих конструкцій під дією слідкуючих сил розглянуто в [1, 2], дослідження випинання пружних валів виконано в [3], вивченню стійкості тонких оболонок при простому й складному обертаннях присвячені роботи [4-9]. Враховуючи, що на оболонки роторів турбін авіаційних двигунів крім сил інерції також діють слідкуючі сили осьового стиску або розтягу, можна вважати, що проблема аналізу статичних і динамічних ефектів, що супроводжують цим явищем, є досить актуальною. Дана робота присвячена комп'ютерному моделюванню цих ефектів.

Розглянемо задачу про статичну та динамічну стійкість тонких циліндричних оболонок, які обертаються, під дією осьових стискаючих або розтягуючих слідкуючих сил. Будемо вважати, що один край оболонки є вільним, іншим краєм вона жорстко приєднана до основи, яка обертається. Вісь обертання основи співпадає з віссю оболонки. До вільного краю оболонки прикладені поздовжні рівномірно розподілені слідкуючі сили, що стискають або розтягують її в осьовому напрямку. Досліджується можливість біфуркаційного переходу квазістатичної рівноваги оболонки, яка обертається, до режиму її коливальних.

Для дослідження динамічної втрати стійкості циліндричної оболонки використовується підхід, який запропонований в [2], при аналізі випинання консольних стержнів під дією слідкуючої сили. Він заснований на встановленні залежності частоти власних коливань пружної системи від інтенсивності слідкуючої сили. Значення слідкуючих сил, при яких система втрачає можливість здійснювати вільні періодичні коливання, вважаються критичними. Цей підхід використовується нижче для моделювання втрати стійкості оболонок.

Прийmemo, що тонкостінна циліндрична оболонка пов'язана із жорстким носієм, якій обертається разом із системою координат  $Oxuz$  із

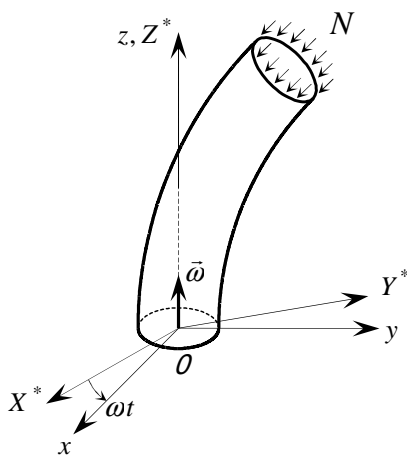


Рис. 1

постійною по модулю кутую швидкістю  $\bar{\omega}$  відносно осі симетрії  $Oz$ . Введемо праві системи координат:  $OX^*Y^*Z^*$  – інерційна система координат із початком у центрі опорного контуру оболонки, вісь  $OZ^*$  збігається з віссю  $Oz$ . На серединній поверхні оболонки введемо ортогональну криволінійну систему координат  $Ox^1x^2x^3$ , у якій координатна лінія  $x^1$  лежить у твірному перерізі,  $x^2$  спрямована в коловому напрямку,  $x^3$  – уздовж напрямку внутрішньої нормалі до поверхні оболонки.

Рівняння динамічної рівноваги елемента оболонки, що записані у криволінійній ортогональній системі координат  $Ox^1x^2x^3$  з базисними векторами  $\bar{e}_\alpha$  на поверхні, мають вигляд

$$\nabla_\alpha \bar{T}^\alpha + \bar{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \bar{M}^\alpha + (e_\alpha \times \bar{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (1)$$

Тут  $\bar{T}^\alpha$  – вектор внутрішніх сил в оболонці;  $\bar{M}^\alpha$  – вектор внутрішніх моментів;  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні;  $\bar{p}$  – вектор інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження.

Використовуючи співвідношення зв'язку між контраваріантними компонентами функцій внутрішніх сил  $T^{ij}$  й моментів  $M^{ij}$  та коваріантними складовими функцій деформації  $\varepsilon_{ij}$  й зміни кривин  $\mu_{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh\varepsilon_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/(1-\nu^2), \\ M^{ij} &= Eh^3\mu_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (2)$$

виразивши ці функції через коваріантні компоненти  $u_1, u_2, u_3$  вектора переміщень  $\bar{u}$  і кути повороту  $\vartheta_i$  перерізів

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (\bar{e}_i \cdot \partial\bar{u}/\partial x^j + \bar{e}_j \cdot \partial\bar{u}/\partial x^i + \vartheta_i \cdot \vartheta_j)/2, \quad \vartheta_i = (\partial\bar{u}/\partial x^i)\bar{e}_3, \\ \mu_{ij} &= (\bar{e}^k / c^{ik} \cdot \partial\bar{\Omega}/\partial x^j + \bar{e}^k / c^{jk} \cdot \partial\bar{\Omega}/\partial x^i)/2, \\ \bar{\Omega} &= c^{ij}\vartheta_i\bar{e}_j, \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

і врахувавши при розкритті векторних операцій у (1) зміну параметрів  $b_i^j$  другої квадратичної форми в процесі деформації оболонки, отримаємо нелінійні рівняння її динамічної рівноваги.

Для розглянутих випадків вектор  $\bar{p}$  є силою інерції складного руху, який знаходиться за формулою  $\bar{p} = -\gamma h \bar{a}$ , де  $\gamma$  – густина матеріалу оболонки;  $h$  – її товщина;  $\bar{a}$  – абсолютне прискорення її елемента.

При моделюванні ефектів втрати стійкості оболонки використовуються геометрично нелінійні співвідношення теорії оболонок і послідовно розглядаються два її стани. Спочатку виділяється стан простого обертання оболонки з кутовою швидкістю  $\omega$  і підраховуються функції, що визначають поля її напружень і деформацій, які виникають від обертання та дії осрової сили. Потім нелінійні рівняння руху лінеаризуються в околі цього стану і з їх допомогою досліджується стійкість оболонки.

У загальному випадку прискорення підраховується за формулами [10]

$$\bar{a} = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^c, \quad \bar{a}^e = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}), \quad \bar{a}^r = \frac{d^2 \bar{\rho}}{dt^2}, \quad \bar{a}^c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}^r, \quad (4)$$

у яких вектори  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{v}^r$ ,  $\bar{\rho}$  повинні бути представлені з урахуванням усіх видів пружних рухів оболонки. Тут  $\bar{\rho}$  – радіус-вектор елемента,  $\bar{v}^r = d\bar{\rho}/dt$  – відносна швидкість в збуреному стані.

У результаті виконання векторних операцій (4) знайдемо контраваріантні компоненти векторів прискорень

$$a_e^1 = -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \omega^2 u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}},$$

$$\begin{aligned}
a_e^2 &= -\omega^2 u_2 / a_{22}, \\
a_e^3 &= \omega^2 r \cos \varphi + \omega^2 \left( u_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - u_3 \cos \varphi \right) \cos \varphi, \\
a_c^1 &= -2\omega \dot{u}_2 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}}, \\
a_c^2 &= 2\omega \dot{u}_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \dot{u}_3 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}, \\
a_c^3 &= 2\omega \dot{u}_2 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}, \\
a_r^1 &= \ddot{u}_1 / a_{11}, \quad a_r^2 = \ddot{u}_2 / a_{22}, \quad a_r^3 = \ddot{u}_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Особливість цих прискорень полягає в тому, що вони включають доданки  $u_1, u_2, u_3, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ , які є компонентами вектора пружного зсуву елемента оболонки та його швидкості і вносяться в ліві частини розв'язуючих рівнянь. Це призводить до перебудови структури рівнянь і можливості виникнення критичних станів.

В рівностях (5), що містять велику величину  $\omega^2$ , враховуються зміни геометрії оболонки при її навантаженні і замість  $r$  і  $\varphi$ , які визначають відстань від осі обертання до розглянутого перерізу та кут нахилу дотичної до твірної, використовуються величини  $r + \Delta r$ ,  $\varphi + \Delta \varphi^*$ .

У даній роботі вивчаються критичні стани простого обертання оболонки, що реалізовані по найменш енергоємній формі деформування, по першій гармоніці (за координатою  $x^2$ ). Будемо апроксимувати шукані функції першими гармоніками  $\sin(ct+x^2)$ ,  $\cos(ct+x^2)$  за фазовою координатою  $ct+x^2$ , де  $c$  – частота вільних коливань [8, 9]. Тоді з урахуванням цього спрощення з (1) – (5) можна отримати рівняння вільних коливань

$$\begin{aligned}
& dT^{(11)} / dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\
& - \omega^2 \Delta \vartheta_{(1)} r / a_{11} - c^2 u_{(1)} / a_{11} = 0; \\
& dT^{(12)} / dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) T^{(12)} - b_2^2 T^{(23)} - \\
& - \mathcal{H}[-\omega^2 \vartheta_{(2)} r / a_{22} - 2\omega c u_{(3)} / \sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)} / a_{22} - \omega^2 u_{(2)} / a_{22}] = 0; \tag{6} \\
& dT^{(13)} / dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) T^{(13)} + b_{11} \Delta T^{(11)} - \mu_{(11)} T_0^{(11)} + b_{(22)} T^{(22)} - \\
& - \mu_{(22)} T_0^{(22)} - \mathcal{H}[-2\omega c u_{(2)} / \sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що вільні коливання, які описуються цією системою, мають вигляд гармонійної хвилі, що біжить в напрямку кола з кутовою швидкістю  $c$ . Причому, якщо при  $\omega=0$ , кожна із частот є двократною й ці

хвилі виявляються стоячими, то при  $\omega \neq 0$  кратні частоти розчіплюються на дві та їх моди починають прецесувати у різних напрямках. Від'ємній частоті  $c$  відповідає прецесія в напрямку обертання оболонки (пряма регулярна прецесія); додатній частоті  $c$  – прецесія у зворотному напрямку (зворотна регулярна прецесія).

Часткові розв'язки системи звичайних однорідних лінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку відносно функцій  $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \varepsilon_{(12)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}$  з незалежною змінною  $x^1$  диференціальних рівнянь (6) будуються методом початкових параметрів.

У загальному вигляді система рівнянь (6) може бути подана у формі

$$d\bar{y}/dx = A_1(x)\bar{y}. \quad (7)$$

Тут  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  - шукана вектор-функція розміру  $8 \times 1$

$$\bar{y} = (u_{(1)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}, u_{(2)}, \varepsilon_{(12)})^T, \quad (8)$$

$x \equiv x^1$  - незалежна змінна, що змінюється в межах  $0 \leq x \leq L$ ,  $A_1(x)$  - матриця коефіцієнтів восьмого порядку, обумовлена рівняннями теорії оболонок і співвідношеннями, що задають коефіцієнти першої і другої квадратичних форм.

Рішення системи (7) повинно задовольняти крайовим умовам

$$B \bar{y}(0) = 0, \quad D \bar{y}(l) = 0, \quad (9)$$

де постійні матриці  $B$  і  $D$  мають розміри  $4 \times 8$ .

Вектор-функція  $\bar{y}(x)$  будується у формі загального розв'язку  $Y(x) \bar{C}$  однорідного рівняння, де  $Y(x)$  - фундаментальна матриця розв'язків.

Вектор  $\bar{C}$  знаходиться з умов (9).

Задача про статичну стійкість оболонки, що обертається, вирішується на основі рівнянь (7) шляхом визначення біфуркаційних значень  $\omega$  ( $c=0$ ), при яких ця система має нетривіальні власні розв'язки. Вони відповідають виродженню визначника матриці системи алгебраїчних рівнянь, що впливає з умов (9), і є критичними.

За допомогою розробленої методики виконано аналіз статичної втрати стійкості циліндричних оболонок при простому обертанні.

Було розглянуто оболонки радіуса  $R=0,05$  м та довжини  $l=1$  та  $2$  м. Товщина оболонки складала  $h=10^{-3}$  м, модуль пружності матеріалу  $E=2,1 \times 10^{11}$  Па; коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$ .

Порівняно велике відношення довжини оболонки до її діаметра дозволило досліджувати її стійкість за допомогою двох математичних моделей - теорії балок і теорії оболонок, що описана вище. Спочатку розглядалася статична стійкість оболонок, що обертаються, попередньо напружених поздовжньо розподіленими слідкуючими силами, які стискають або розтягують її в осьовому напрямку. Критичні значення кутових швидкостей обертання оболонки при різних значеннях цих сил наведені в таблиці.

Таблиця 1

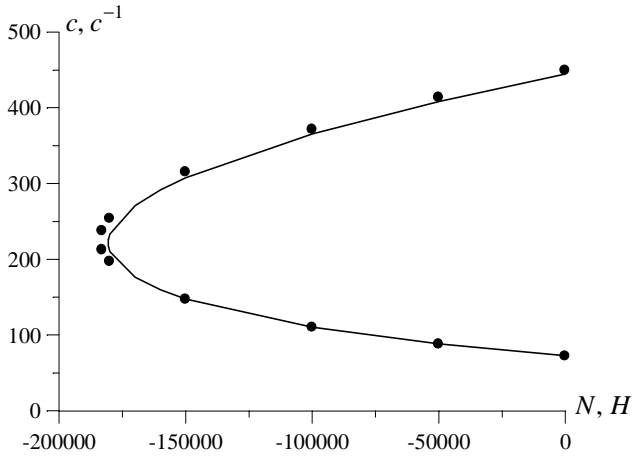
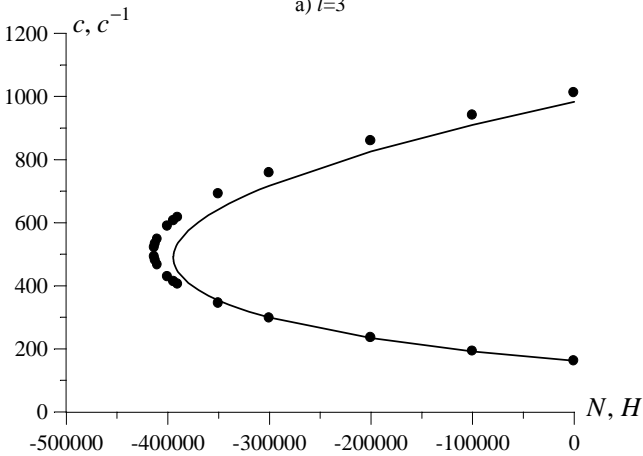
Критичні значення кутових швидкостей обертання оболонок при різних значеннях слідкуючих сил

Тип теорії	$l$ (м)	$N = 0$ $H$	$N = -10^4$ $H$	$N = 10^4$ $H$	$N = -10^5$ $H$	$N = 10^5$ $H$
Теорія оболонок	$l=1$	$639,01 c^{-1}$	$641,48 c^{-1}$	$636,56 c^{-1}$	$664,63 c^{-1}$	$615,37 c^{-1}$
	$l=2$	$162,17 c^{-1}$	$164,79 c^{-1}$	$159,62 c^{-1}$	$192,21 c^{-1}$	$139,58 c^{-1}$
Теорія балок	$l=1$	$645,04 c^{-1}$	$647,77 c^{-1}$	$642,34 c^{-1}$	$673,07 c^{-1}$	$618,72 c^{-1}$
	$l=2$	$161,26 c^{-1}$	$164,01 c^{-1}$	$158,58 c^{-1}$	$192,34 c^{-1}$	$137,14 c^{-1}$

Наведені дані дозволяють зробити висновок про те, що знайдені для оболонок критичні значення кутової швидкості є дещо меншими відповідних значень, які знайдені за теорією балок ( $l=1$ ), та дещо більшими відповідних значень ( $l=2$ ).

Для моделювання динамічних критичних значень оболонок використовується критерій, згідно з яким при втраті стійкості під дією слідкуючої сили, пружна конструкція втрачає здатність вільно коливатись. При цьому дві перші частоти приймають однакові значення та у закритичному стані стають комплексно-спряженими.

За такою методикою були досліджені консольно-опорні циліндричні оболонки з параметрами:  $R=0,05\text{м}$ ,  $h=10^{-3}\text{м}$ ,  $E=2,1 \times 10^{11}\text{Па}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $l=3\text{м}$  та  $2\text{м}$ .

а)  $l=3$ б)  $l=2$ Рис. 2. Залежності першої та другої частот від значення поздовжньої сили  $N$ 

На рис. 2 показані діаграми залежності першої й другої частот цих оболонок від значення поздовжньої сили  $N$  та  $\omega=0$ . Суцільна лінія відповідає теорії оболонок, точки – теорії балок. Видно, що граничні значення сили  $N$  для обох теорій знаходяться близько один до одного. При цьому теорія балок дає дещо завищене значення.

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
3. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
4. Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТТ. – 1999. № 2. – С. 156-163.
5. Соловйов І.І. Критичні стани тонких оболонок, пружно зв'язаних з платформою при простому і складному обертаннях // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2004. – Вип.75. – С. 71-79.
6. Gulyayev V.I, Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // J. Sound and Vibrat. – 2001, V. 246., № 3, – pp. 491-504.
7. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // J. Sound and Vibrat. – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339.
8. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.
9. Sivadas K.R. Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99–109.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

*Надійшло до редакції 19.10.2006 р.*