

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІЗОТЕРМІЧНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ЩІЛИННОМУ МІКРОКАНАЛІ

В зв'язку з розвитком високоефективних мікрощілинних теплообмінників постала задача вивчення руху ламінарного ізотермічного потоку нестисливої рідини, яка підлягає закону в'язкого тертя Ньютона, в щілинному мікроканалі. Метою дослідження був аналіз поведінки потоку рідини при умові рівномірного розподілу повздовжньої швидкості на вході в канал з точки зору традиційних уявлень, які базуються на використанні рівнянь Нав'є-Стокса. Поставлена задача реалізовувалась шляхом проведення обчислювального експерименту. Рішення системи диференціальних рівнянь проводилось шляхом їх заміни дискретними аналогами та подальшим вирішенням системи алгебраїчних рівнянь. Одержана сукупність чисельних значень повздовжньої та радіальної швидкостей, тиску, середнього тиску, узагальнювалась методами теорії подібності та використовувалась для аналізу та порівняння з результатами експериментальних досліджень.

При проведенні математичного експерименту приймалась така фізична модель процесу. Течія стала, ізотермічна, ламінарна, рідина нестислива, ньютонівська. Фізичні властивості рідини приймалися незмінними. Задача двовимірна, рух описувався в декартовій системі координат. Розрахункова область зображена на рис. 1.

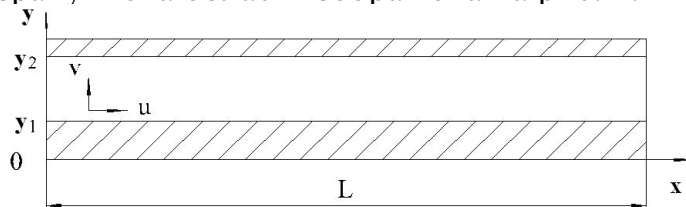


Рис. 1 Розрахункова ділянка

Математична модель складалась з системи диференціальних рівнянь динаміки (два рівняння руху по осях координат та рівняння нерозривності):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Граничні умови до задачі мали наступний вигляд:

- 1)  $y = y_1, 0 < x < L: u = 0, v = 0;$
- 2)  $y = y_2, 0 < x < L: u = 0, v = 0;$
- 3)  $x = 0, y_1 < y < y_2: u = U_0 = \text{const}, v = 0;$
- 4)  $x = L, y_1 < y < y_2: v = 0, p = 0$  (надлишковий).

Для рішення на ЕОМ, система диференціальних рівнянь (1) подавалась у вигляді скінченно-різницевого рівнянь, дискретизація вихідної системи виконувалась методом контрольного об'єму. Чисельне інтегрування виконувалось за неявною різницевою схемою. Це обумовлювалось обмеженою стійкістю явної різницевої схеми від величини кроку сітки, тоді як у неявних схемах величина кроку необмежена. Рішення системи дискретних рівнянь виконувалось методом матричної прогонки.

Течія з сталим профілем швидкості відповідає мінімальним втратам енергії на тертя. Вона характеризується постійністю величини повздовжнього градієнту середнього за перерізом тиску  $\bar{dp}/dx$ . На початковій гідродинамічній ділянці величина  $\bar{dp}/dx$  змінна, та суттєво залежить від умов входу потоку в канал. Проведене дослідження охоплювало діапазон лінійних розмірів, в якому вивчався вплив гідродинамічної початкової ділянки потоку на його загальну гідравлічну характеристику при умові рівномірного розподілу швидкості на вході в кільцевий канал. Зміна гідравлічних характеристик каналу здійснювалась варіюванням незалежних змінних, таких, як довжина, середня швидкість та температура потоку, табл. 1. Вказані величини охоплювали наступні діапазони безрозмірних чисел –  $Re = 58 \dots 13672$ ,  $Pr = 1,96 \dots 7,01$ .

**Таблиця 1**

Діапазони зміни незалежних факторів

№ п/п	Фактор	Одиниця вимірювання	Значення (діапазон зміни)
1	Ширина каналу	м	$(59, 140, 300) \cdot 10^{-6}$
2	Довжина каналу	м	$(10, 20) \cdot 10^{-3}$
3	Середня швидкість	м/с	$0,5 \div 25,0$
4	Температура	°С	$20 \div 90$

На рис.2 подаються відносні профілі повздовжньої швидкості в чотирьох перерізах щілинного мікроканалу для різних значень  $(L - L_x)/\delta$ . Як видно, профіль швидкості на виході з каналу (поз. 4), відповідає профілю при сталій ламінарній течії рідини. Отримана картина розвитку профілю повздовжньої швидкості якісно узгоджується з результатами, опублікованими в роботах для каналів круглого поперечного перерізу [1-3].

Деформація профілю повздовжньої швидкості обумовлюється обміном кількістю руху між близько розташованими шарами рідини. У випадку сталої ламінарної течії існування поперечного градієнту швидкості  $du/dr$  не призводить до появи поперечної складової швидкості  $v$ , а рух рідини наближається до моделі шаруватої течії. На

початковій гідродинамічній ділянці існує значний градієнт  $du/dr$ , що призводить до виникнення поперечної складової швидкості. На рис.3 подаються розрахункові профілі  $v$ . Максимальному градієнту  $du/dr$  відповідає максимальне значення  $v$  – поз. 1, із збільшенням товщини гідродинамічного пограничного шару та зниженням градієнту повздовжньої швидкості зменшується величина поперечної швидкості (поз. 2, 3), в кінці каналу, де профіль повздовжньої швидкості відповідає профілю сталої ламінарної течії, величина поперечної швидкості дорівнює нулю (поз. 4).

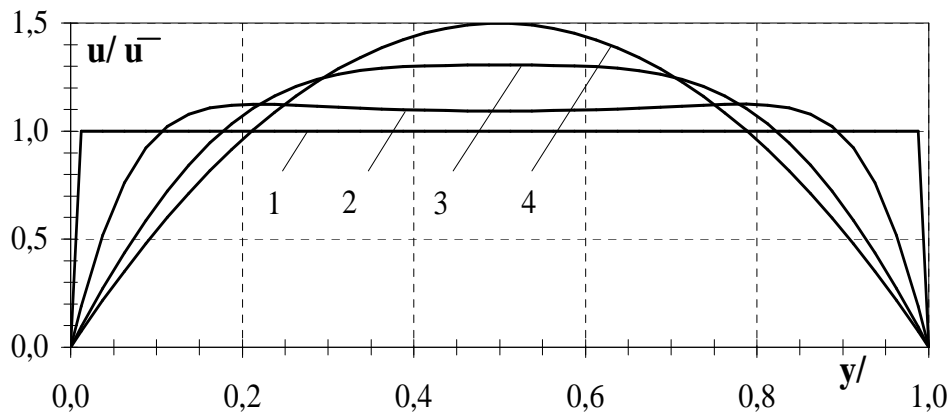


Рис. 2 Розрахункові профілі повздовжньої швидкості в кільцевому мікроканалі при різних значеннях відносної довжини (ширина 59 мкм, довжина 20 мм,  $Re=1000$ ):

1 – вхід в канал, відносна довжина  $\frac{L-L_x}{\delta} = 338,983$ , рівномірний розподіл швидкості; 2 –  $\frac{L-L_x}{\delta} = 338,305$ ; 3 –  $\frac{L-L_x}{\delta} = 333,898$ ; 4 – вихід з каналу  $\frac{L-L_x}{\delta} = 0,000$ .

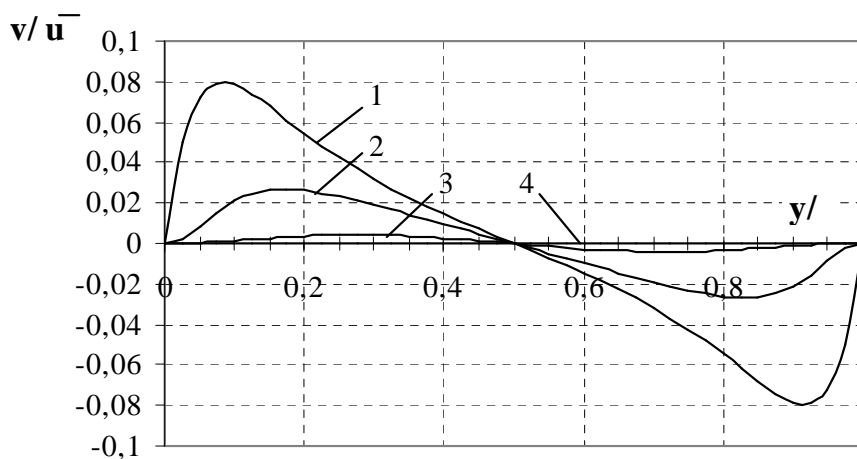


Рис. 3 Розрахункові профілі поперечної швидкості в кільцевому мікроканалі при різних значеннях відносної довжини (ширина 59 мкм, довжина 20 мм,  $Re=1000$ ):

1 – вхід в канал, відносна довжина  $\frac{L-L_x}{\delta} = 338,814$ , рівномірний розподіл швидкості; 2 –  $\frac{L-L_x}{\delta} = 338,136$ ; 3 –  $\frac{L-L_x}{\delta} = 333,729$ ; 4 – вихід з каналу  $\frac{L-L_x}{\delta} = 0,000$ .

Зміна середнього за перерізом тиску по довжині щілинного мікроканалу подається на рис. 4. Чисельний експеримент проводився для каналів шириною 59 мкм – поз. 1, 140 мкм – поз. 2, 300 мкм – поз. 3, масова витрата дорівнювала ~84 кг/год. Довжина каналу, температура рідини, число Рейнольдса приймалися для всіх випадків однаковими. Максимальна зміна тиску отримана для каналу 59 мкм. Для прийнятого відношення інерційних сил та сил в'язкості вплив початкової гідродинамічної ділянки проявляється несуттєво, про що свідчить залежність статичного тиску по довжині каналу, близька до лінійної. Проте, подальше збільшення числа Рейнольдса призводить до зростання впливу початкової ділянки, особливо це проявляється для каналів з більшими еквівалентними діаметрами.

Необхідність узагальнення результатів обчислювального експерименту потребувала переходу до системи безрозмірних комплексів. В якості безрозмірної координати використовувався комплекс  $\frac{L}{(ReZ)}$ , втрата тиску в щілинному мікроканалі характеризувалась числом Ейлера. На рис. 5, в логарифмічній системі координат, зводяться результати чисельних експериментів проведених в мікроканалах шириною 59÷300 мкм в діапазоні температур 20÷50 °С. В якості характерного лінійного розміру мікроканалу використовувався еквівалентний діаметр  $Z = d_e = 2\delta$ .

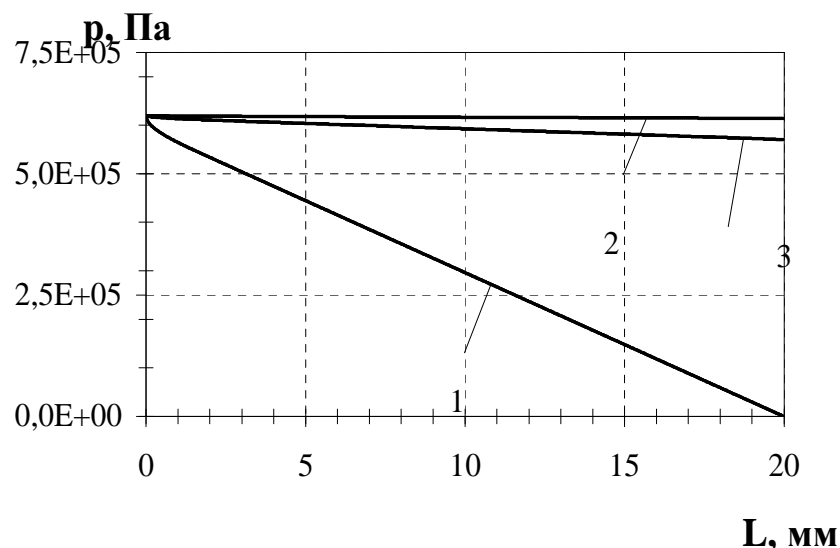


Рис. 4 Розрахункові значення зміни середнього за перерізом тиску в мікроканалах довжиною 20 мм, температура рідини 20 °С,  $Re=1000$ : 1 – канал шириною 59 мкм; 2 – канал шириною 140 мкм; 3 – канал шириною 300 мкм.

Представлення експериментальних точок в  $\frac{L}{(ReZ)} - \overline{Eu}$  системі координат дозволило отримати єдину графічну залежність, узагальнюючу втрати тиску в щілинних мікроканалах.

Отримана графічна залежність апроксимувалась функцією виду  $y = ax + b$ . Діапазон дослідження розділювався на дві частини  $X \in [0,002;0,016) \cup [0,016;3,000]$ , для кожної з частин експериментальна крива апроксимувалась окремою залежністю:

$$\overline{Eu} = 54,28X + 0,27 \quad X \in [0,002;0,016), \quad (2)$$

$$\overline{Eu} = 47,95X + 0,37 \quad X \in [0,016;3,000], \quad (3)$$

де  $X = \frac{L}{(ReZ)}$  безрозмірна координата. Максимальне відхилення експериментальних точок від апроксимуючої кривої не перевищувало 1%.

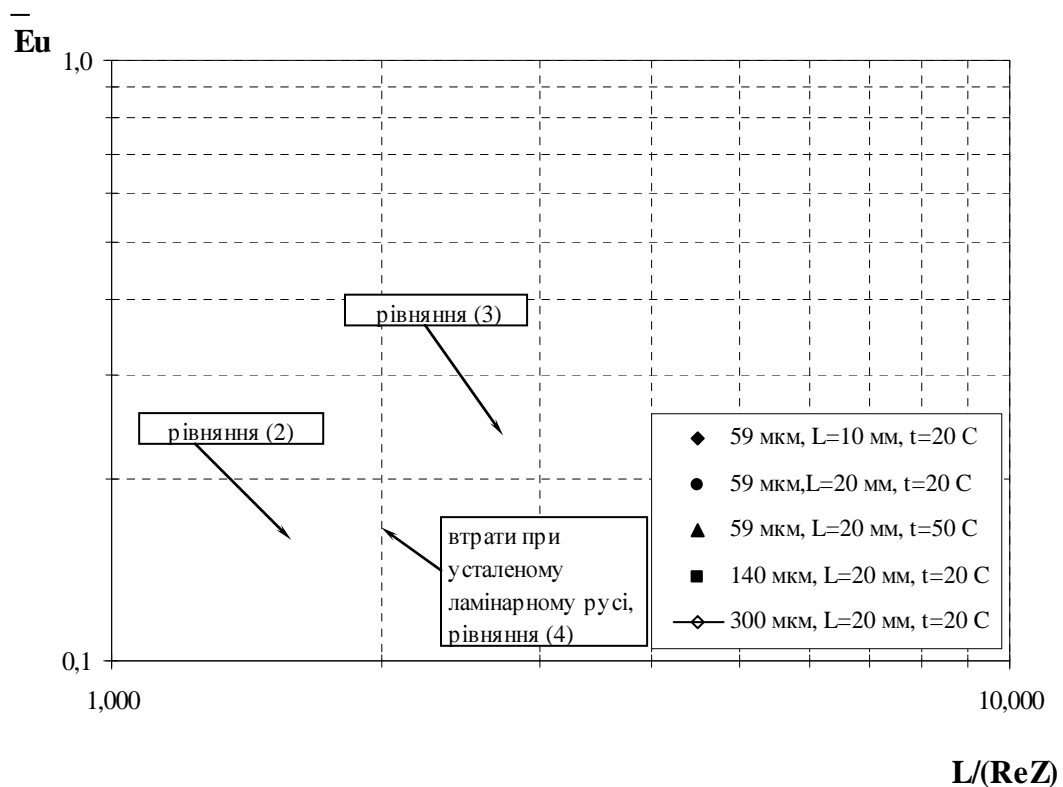


Рис. 5 Узагальнююча залежність повних втрат тиску в щілинних мікроканалах

Втрати тиску в гідравлічно гладких щілинних мікроканалах для сталої ламінарної течії, в діапазоні зміни аргументу  $X \in [0,002;3,000]$ , розраховуються за залежністю:

$$\overline{Eu} = 48X. \quad (4)$$

Вплив початкової гідродинамічної ділянки проявляється в збільшенні втрат тиску відносно величини втрат отриманої для сталої течії. Різниця тим більша, чим більше число Рейнольдса або менше відношення  $L/Z$ . Аналіз залежностей (3), (4) показав, що в діапазоні безрозмірної координати  $X \in [0,200;3,000]$  існування початкової гідродинамічної ділянки несуттєво впливає на перепад тиску та його величина може бути обчислена з використанням залежності (4). І навпаки, зі зменшенням аргументу, різниця між втратами тиску в каналі, з урахуванням впливу початкової гідродинамічної ділянки, збільшується та може досягати 2-4 кратної величини.

### **Висновки**

Проведене дослідження дозволило отримати узагальнюючі залежності втрат тиску в широкому діапазоні зміни аргументу для випадку рівномірного розподілу швидкості  $u$  на вході в мікроканал. Воно показало, що вибраний діапазон зміни ширини каналу, охоплює як випадки для яких вплив початкової гідродинамічної ділянки може не враховуватись при визначенні загальних втрат тиску, так і випадки, для яких цей вплив призводить до багатократного збільшення втрат.

Математичне моделювання підтвердило, що величина початкової гідродинамічної ділянки суттєво залежить від розподілу швидкості на вході в канал, проте, розподіл швидкості близький до рівномірного доволі рідке явище. Частіше зустрічаються випадки, коли профіль швидкості  $u$ , на вході в канал, відрізняється від рівномірного та, як наслідок, має відрізнитись натурний розподіл тиску від значень, одержаних з обчислювального експерименту.

### **Список літератури:**

1. Малкін Е.С., Тимощенко А.В. Гідродинаміка та теплообмін в концентричних кільцевих мікроканалах з різним ступенем обробки поверхонь, стосовно компактних тепломасообмінних апаратів // Зб. наук. праць ювілейної міжнар. науково-технічної конференції „Сучасні екологічно безпечні тепломасообмінні процеси в технологіях легкої промисловості”. – Київ: КНУТД, 2006. – С. 50-52.
2. Малкін Е.С., Тимощенко А.В. Дослідження процесів руху і теплообміну рідини і насиченої водяної пари в кільцевих мікроканалах // Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання. – 2001. – №1. – С. 53-57.
3. Тимощенко А.В. Гідродинаміка та теплообмін потоку рідини в щілинних мікроканалах // Автореф. дисертації на здобуття наукового ступеня к.т.н. – 2007. – 19с.