

УДК 539.3

к.т.н. Левківський Д.В.,
levkivskyi.dv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2964-1605,
Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Описано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану пружних вісесиметричних тіл під дією нестационарних теплових впливів. Комбінований чисельно-аналітичний підхід складається з декількох основних етапів. На першому етапі розрахунку визначається розподіл теплових полів у часі. Для цього проєкційним методом знижується вимірність по координаті z , а по координатах r та t використовується явна різницева схема. На другому етапі знижується вимірність диференціальних рівнянь та граничних умов термопружності по координаті z проєкційним методом. Для цього використовується система локальних базисних функцій. У результаті отримаємо редуковану систему звичайних диференціальних рівнянь, записаних у формі Коші, що залежать від координати r . Дана гранична задача в кожен момент часу розв'язується чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. У роботі показано процес зниження вимірності диференціальних рівнянь та виконано загальну постановку початково-граничної задачі.

Ключові слова: зниження вимірності, проєкційний метод, теплопровідність, різницева схема, модифікований метод прямих, термопружність, циліндрична система координат.

Розглянемо пружне вісесиметричне тіло, що знаходиться під дією нестационарних теплових впливів (рис.1). По координаті θ враховується осьова симетрія. Задача зводиться до плоскої та розглядається в системі координат $r\theta z$ (рис.2). На поверхню тіла діють зовнішні джерела тепла, які можуть змінюватись в часі, охолоджувати та нагрівати поверхню. Також в середині тіла можуть знаходитись внутрішні джерела тепла, що також вносять свій вклад в тепловий баланс системи. Необхідно визначити напружено-деформований стан тіла при дії нестационарних теплових впливів.

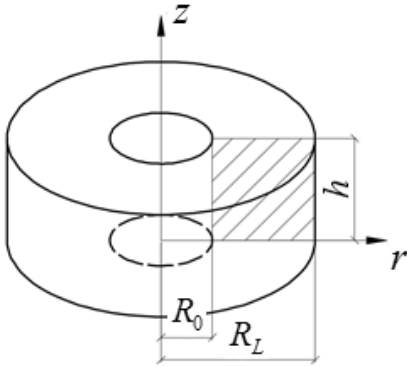


Рис.1. Пружне циліндричне тіло

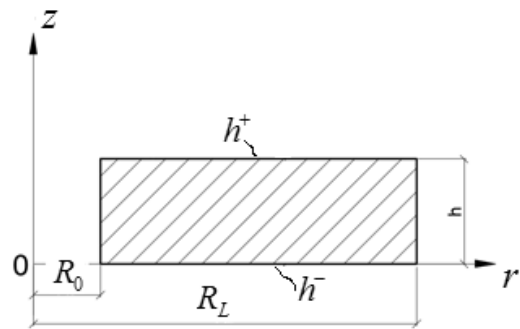


Рис.2. Плоска область

На першому етапі необхідно визначити розподіл теплового поля в часі. Для цього використовуються диференціальні рівняння нестационарної теплопровідності в циліндричній системі координат [1]:

$$q_r = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial r}; \quad q_z = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} q_r - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_0. \quad (1)$$

У рівняннях T - функція температури, λ_T - коефіцієнт теплопровідності, c - питома об'ємна теплоємність тіла. Шукані функції, що входять до рівнянь, є функціями змінних (r, z, t) . Вони повинні задовольняти початковим умовам (2) та граничним (3) умовам конвективного теплообміну:

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } z = h^+ : q_z(r, h^+, t) &= -\alpha_T^+(T_c^+(r, h^+, t) - T(r, h^+, t)), \\ \text{при } z = h^- : q_z(r, h^-, t) &= \alpha_T^-(T_c^-(r, h^-, t) - T(r, h^-, t)), \\ \text{при } r = 0 : q_r(0, z, t) &= \alpha_T^0(T_c^0(0, z, t) - T(0, z, t)), \\ \text{при } r = r_l : q_r(l, z, t) &= -\alpha_T^l(T_c^l(l, z, t) - T(l, z, t)). \end{aligned} \quad (3)$$

Напружено-деформований стан описується рівняннями термопружності (4)-(9). У рівняннях $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ - компоненти тензора напружень. u, w - компоненти вектора переміщень відповідно в напрямку осі r та z ; λ, μ - коефіцієнти Ляме. Проведено заміну $f^* = \mu f$.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \quad (6)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{u_r}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \quad (9)$$

Граничні умови моделюються за допомогою пружних стержнів. Приймається, що кожна точка оточуючого середовища взаємодіє з контуром тіла за допомогою стержнів певної жорсткості (рис.3-6).

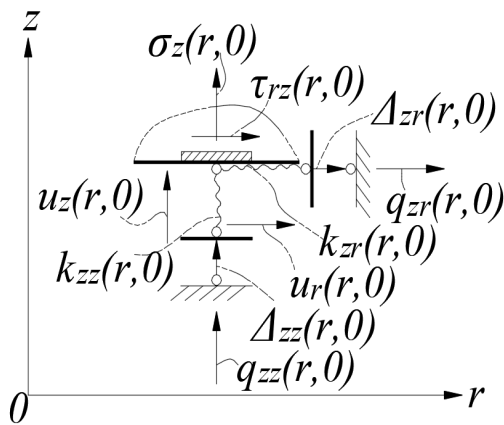


Рис. 3. Переріз $z = 0$.

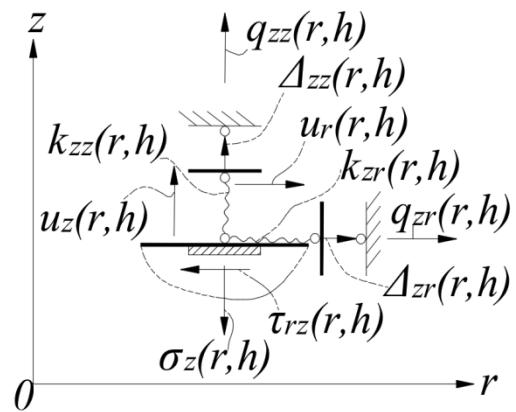


Рис. 4. Переріз $z = h$.

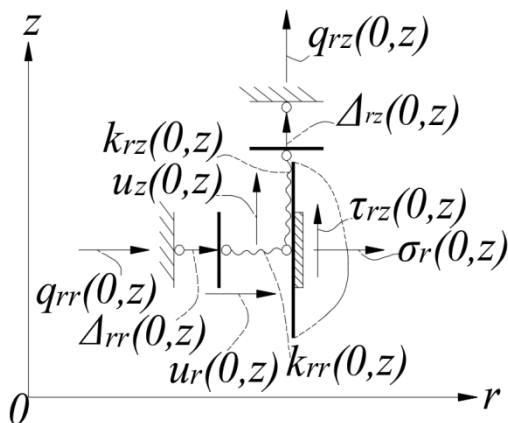


Рис. 5. Переріз $r = r_0$.

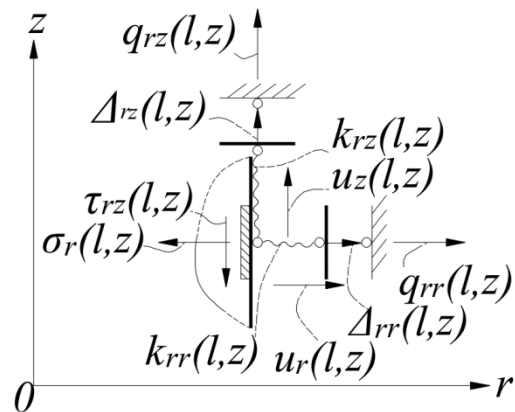


Рис. 6. Переріз $r = l$.

Δ – відоме переміщення зовнішнього середовища в околі точки; q – інтенсивність силових факторів. Ці впливи показані у додатному напрямку.

Біля кожної величини наведені індекси. Перший індекс показує напрям нормалі заданого перерізу, другий - вказує напрям дії. Далі складаємо рівняння рівноваги для кожного перерізу (рис.3-6).

У перерізі $z = 0$:

$$\sum F_r = 0; \tau_{rz}(r, 0) + q_{zr}(r, 0) + k_{zr}(r, 0) \cdot \Delta_{zr}(r, 0) - k_{zr}(r, 0) \cdot u_r(r, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\sum F_z = 0; \sigma_z(r, 0) + q_{zz}(r, 0) + k_{zz}(r, 0) \cdot \Delta_{zz}(r, 0) - k_{zz}(r, 0) \cdot u_z(r, 0) = 0. \quad (11)$$

У перерізі $z = h$:

$$\sum F_r = 0; -\tau_{rz}(r, h) + q_{zr}(r, h) - k_{zr}(r, h) \cdot u_r(r, h) + \Delta_{zr}(r, h) \cdot k_{zr}(r, h) = 0, \quad (12)$$

$$\sum F_z = 0; -\sigma_z(r, h) + q_{zz}(r, h) - k_{zz}(r, h) \cdot u_z(r, h) + \Delta_{zz}(r, h) \cdot k_{zz}(r, h) = 0. \quad (13)$$

У перерізі $r = r_0$:

$$\sum F_z = 0; \tau_{rz}(r_0, z) + q_{rz}(r_0, z) + k_{rz}(r_0, z) \cdot \Delta_{rz}(r_0, z) - k_{rz}(r_0, z) \cdot u_z(r_0, z) = 0, \quad (14)$$

$$\sum F_r = 0; \sigma_r(r_0, z) + q_{rr}(r_0, z) + k_{rr}(r_0, z) \cdot \Delta_{rr}(r_0, z) - k_{rr}(r_0, z) \cdot u_r(r_0, z) = 0. \quad (15)$$

У перерізі $r = l$:

$$\sum F_z = 0; -\tau_{rz}(l, z) + q_{rz}(l, z) + k_{rz}(l, z) \cdot \Delta_{rz}(l, z) - k_{rz}(l, z) \cdot u_z(l, z) = 0, \quad (16)$$

$$\sum F_r = 0; -\sigma_r(l, z) + q_{rr}(l, z) + k_{rr}(l, z) \cdot \Delta_{rr}(l, z) - k_{rr}(l, z) \cdot u_r(l, z) = 0. \quad (17)$$

Для зниження вимірності рівнянь теплопровідності (1), термопружності (4-9), початкових (2) та граничних умов (3), (10)-(17) по координаті z використовується проєкційним методом Бубнова-Петрова. Тіло розбивається прямими на смужки з кроком Δ (рис.7), на прямих обирається система базисних функцій $\varphi_i(z)$, $i = \{1; n\}$, n - кількість прямих. Шукані функції розкладаються за допомогою лінійної комбінації (18).

$f^i(r)$ - коефіцієнти розкладу функції по основному базису, відповідають значенню шуканих функцій на відповідній прямій. $f_i(r)$ - моменти розкладу по основному базису, це проєкції шуканих функцій на основний базис. Тому зручно редуковані диференціальні рівняння, початкові та граничні умови записувати в коефіцієнтах.

$$f(r, z) \approx f^i(r)\varphi_i(z), \quad f(r, z) \approx f_i(r)\varphi^i(z) \quad (18)$$

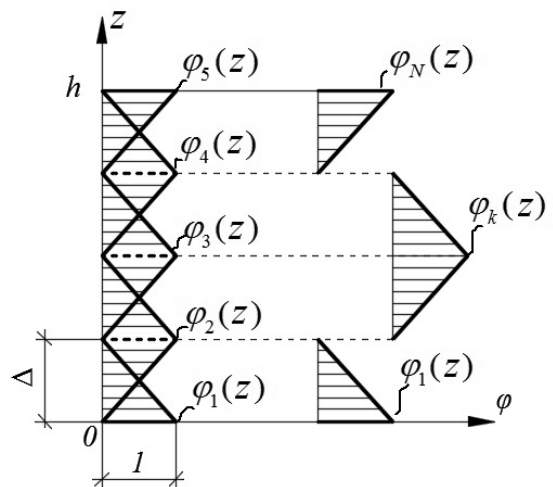


Рис.7. Система базисних функцій

Оскільки система базисних функцій косокутна, необхідно враховувати взаємний базис. Для виконання перетворень використовується індексна форма запису та метричні тензори (19):

$$\{g_{ij}\} = \{\varphi_i, \varphi_j\}, \{g^{ij}\} = \{\varphi^i, \varphi^j\}, \{\delta_i^j\} = \{\varphi_i, \varphi^j\} = E. \quad (19)$$

$\int_0^h \varphi_i(z) \cdot \varphi_j(z) dz = \{g_{ij}\}$ - двічі коваріантний метричний тензор;

$\int_0^h \varphi^i(z) \cdot \varphi^j(z) dz = \{g^{ij}\}$ - двічі контраваріантний метричний тензор.

Детально процес редукування рівнянь теплопровідності описано в роботі [4]. Редуковані диференціальні рівняння теплового балансу, записані в коефіцієнтах, мають вигляд (20)-(21):

$$q_r^i = -\lambda_T \frac{\partial T^i}{\partial r}; \quad q_z^i = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha; \quad (20)$$

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} = -\frac{\lambda_T}{c \cdot r} \frac{\partial T^i}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{c} \frac{\partial^2 T^i}{\partial r^2} - \frac{1}{c} g^{ij} (q_z^N - q_z^1) + \frac{\lambda_T}{c} g^{ij} b_{\alpha j} g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} T^\gamma + \frac{1}{c} q_0^i \quad (21)$$

Початкові та граничні умови:

$$\text{при } t = 0: T^i(r, 0) = T_0^i(r), \quad (22)$$

$$\text{при } z = h^+: q_z^N(r, t) = -\alpha_T^+(T_c^+(r, t) - T^N(r, t)),$$

$$\text{при } z = h^-: q_z^1(r, t) = \alpha_T^-(T_c^-(r, t) - T^1(r, t)),$$

$$\text{при } r = r_0: q_r^i(0, t) = \alpha_T^0(T_c^{0i}(0, t) - T^i(0, t)),$$

$$\text{при } x = r_l: q_r^i(l, t) = -\alpha_T^l(T_c^{li}(l, t) - T^i(l, t)). \quad (23)$$

Для визначення зміни теплового поля в часі використовується явна різницева схема (рис.8).

Значення температури в момент часу $k+1$ у внутрішніх точках виражається за допомогою рівняння:

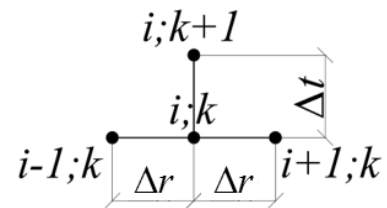


Рис. 8. Явна різницева схема

$$T^\alpha(i, k+1) = \frac{\lambda_T}{c} \frac{\Delta t}{2\Delta r} (T^\alpha(i+1, k) - T^\alpha(i-1, k)) \frac{1}{r_0 + (i-1)\Delta r} + \frac{\lambda_T}{c} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (T^\alpha(i+1, k) - 2T^\alpha(i, k) + T^\alpha(i-1, k)) - \frac{\Delta t}{c} g^{ai} [q_z^N - q_z^1] - \frac{\lambda_T \Delta t}{c} g^{ai} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\gamma} T^\gamma(i, k) + T^\alpha(i, k) - q_0^\alpha$$

У результаті отримано тривимірний масив розподілу теплового поля в часі $T^\alpha(m, k)$. Дані зміни теплового поля переходять до рівнянь термопружності у вигляді двовимірного масиву $(T^\alpha - T_0^\alpha)$ зміни температури.

Редуковані диференціальні рівняння термопружності мають вигляд:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{u_r}{r} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ai} \cdot b_{ij} \cdot u_z^j + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_r^\alpha + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \mu \cdot \alpha_T (T^\alpha - T_0^\alpha)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -g^{ai} \cdot b_{ij} \cdot u_r + \tau_{rz}^\alpha$$

$$\frac{\partial \sigma_r^\alpha}{\partial r} = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{u_r}{r^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - 1\right) \cdot \frac{\sigma_r^\alpha}{r} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ai} \cdot b_{ij} \cdot \frac{u_z}{r} + g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \tau_{rz}^j -$$

$$-g^{ai} \cdot [\tau_{rz}^N - \tau_{rz}^1] - \frac{6\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \mu \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T^\alpha}{r} - F_r^\alpha$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}^\alpha}{\partial r} = -g^{ai} \cdot [\sigma_z^N - \sigma_z^1] + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \frac{u_r}{r} + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot g^{j\beta} \cdot b_{\beta j} \cdot u_z +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \sigma_r^j - \frac{6\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_T \cdot g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \Delta T^j - \frac{\tau_{rz}^\alpha}{r} - F_z^\alpha$$

Детально процес редукування описано в роботах [2], [3]. Редуковані граничні умови:

$$\text{переріз } z = 0: \tau_{zr}^1 + q_{zr}^1 + k_{zr}^1 \cdot \Delta_{zr}^1 - k_{zr}^1 \cdot u_r^1 = 0, \sigma_z^1 + q_{zz}^1 + k_{zz}^1 \cdot \Delta_{zz}^1 - k_{zz}^1 \cdot u_z^1 = 0;$$

$$\text{переріз } z = h: -\tau_{zr}^N + q_{zr}^N - k_{zr}^N \cdot u_r^N + \Delta_{zr}^N \cdot k_{zr}^N = 0, -\sigma_z^N + q_{zz}^N - k_{zz}^N \cdot u_z^N + \Delta_{zz}^N \cdot k_{zz}^N = 0;$$

$$\text{переріз } r = r_0: \tau_{rz0}^\alpha + q_{rz0}^\alpha + k_{rz0}^\alpha \cdot \Delta_{rz0}^\alpha - k_{rz0}^\alpha \cdot u_{z0}^\alpha = 0, \sigma_{r0}^\alpha + q_{rr0}^\alpha + k_{rr0}^\alpha \cdot \Delta_{rr0}^\alpha - k_{rr0}^\alpha \cdot u_{r0}^\alpha = 0;$$

$$\text{переріз } r = l: -\tau_{rzl}^\alpha + q_{rzl}^\alpha + k_{rzl}^\alpha \cdot \Delta_{rzl}^\alpha - k_{rzl}^\alpha \cdot u_{zl}^\alpha = 0, -\sigma_{rl}^\alpha + q_{rrl}^\alpha + k_{rrl}^\alpha \cdot \Delta_{rrl}^\alpha - k_{rrl}^\alpha \cdot u_{rl}^\alpha = 0.$$

В результаті диференціальні рівняння термопружності зводяться до системи редукованих звичайних диференціальних рівнянь, записаних у формі Коші. Дана гранична задача в кожен момент часу розв'язується чисельним методом дискотечної ортогоналізації С.К. Годунова.

Запропонована модифікація методу прямих дозволяє покращити властивості методу, розширити метод на тривимірні задачі теорії пружності, термопружності та задачі динаміки. Головною особливістю методу є використання проєкційного методу з локальними базисними функціями. У класичному методі прямих для зниження вимірності використовуються скінченні різниці, що призводить до недоліків методу, з'являються законтурні функції, що обмежує можливості методу. Проєкційний аналог скінченних різниць у поєднанні з новим підходом до моделювання граничних умов робить модифікований метод прямих гнучким точним методом та відкриває нові можливості впровадження.

Література:

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. – Київ, 1965. – 204 с. – (Наукова думка).
2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46. – Київ, КНУБА, 2012. – С. 613-624.
3. Станкевич А.М., Левківський Д.В. Три варіанти редуції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом “прямих”.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49. – Київ, КНУБА, 2013. – С. 509-521.
4. Левківський Д.В., Сович Ю.В. Застосування узагальненого методу прямих для дослідження теплового поля вісесиметричних тіл // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 69. – Київ, КНУБА, 2013. – С. 207-214.

к.т.н., Левковський Д.В.,

Київський національний університет строительства и архитектуры

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ОСЕСИМЕТРИЧНЫХ ТЕЛ**

В работе описано применение модифицированного метода прямых для определения напряженно-деформированного состояния упругих осесимметричных тел под действием нестационарных тепловых воздействий. Комбинированный численно-аналитический подход состоит из нескольких основных этапов. На первом этапе расчета определяется распределение тепловых полей во времени. Для этого проекционным методом понижается размерность по координате z , а по координатах r и t используется явная разностная схема. На втором этапе снижается размерность дифференциальных уравнений и граничных условий термоупругости по координате z проекционным методом. Для этого используется система локальных базисных функций. В результате получим редуцированную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши, которые зависят от координаты r . Данная граничная задача в каждый момент времени решается численным методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова. В данной работе показано процесс снижения размерности дифференциальных уравнений и выполнено общую постановку начально-краевой задачи.

Ключевые слова: понижение размерности, проекционный метод, теплопроводность, разностная схема, модифицированный метод прямых, термоупругость, цилиндрическая система координат.

Ph.D. Levkivs'kyj D.V.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

MODIFIED METHOD OF LINES IN THE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY OF AXISYMMETRIC BODIES

The paper describes the use of a modified method of lines for determining the stress-strain state of elastic axisymmetric bodies under the action of non-stationary thermal influences. The combined numerical-analytical approach consists of several main stages. The first stage of the calculation determines the distribution of thermal fields over time. For this purpose, the projection method reduces the dimension in z coordinate, in r and t coordinates and uses difference scheme. In the second stage, the dimensionality of the differential equations and the boundary conditions of the thermoelasticity by z coordinate projection method are reduced. For this purpose, a system of local basis functions is used. As a result, we obtain a reduced system of ordinary differential equations written in Koshy form that depend on the coordinate. This boundary value problem is solved at each moment of time by the numerical method of discrete orthogonalization of S.K. Godunova. This paper shows the process of reducing the dimensionality of differential equations and performs a general statement of the initial boundary value problem.

Keywords: dimensionality reduction, projection method, thermal conductivity, difference scheme, modified method of lines, thermoelasticity, cylindrical coordinate system.

REFERENCES

1. Kovalenko A.D. Vvedenye v termouprugost / A.D. Kovalenko. – Kyiv, 1965. – 204 s. – (Naukova dumka).
2. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M, Levkivskyi D.V. Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnian teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh. // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 46. – Kyiv, KNUBA, 2012. – S. 613-624.
3. Stankevych A.M., Levkivskyi D.V. Try varianty reduksii rivnian ploskoi zadachi teorii pruzhnosti metodom “priamykh”.// Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 49 – Kyiv, KNUBA, 2013. – S. 509-521.
4. Levkivskyi D.V., Sovych Yu.V. Zastosuvannia uzahalnenoho metodu priamykh dlia doslidzhennia teplovoho polia visesymetrychnykh til // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 69 – Kyiv, KNUBA, 2013. – S. 207-214.