УДК 514.182.7

А. В. Мостовенко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ФОРМООБРАЗУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ БЕЗМОМЕНТНОГО ПОКРЫТИЯ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

Постановка проблемы. При проектировании пространственных архитектурных покрытий, задачи связанные с отоплением, вентиляцией и кондиционированием перекрываемого пространства связаны с перекрываемым объёмом. При этом возникает проблема управления формой поверхности покрытия при заданном перекрываемом объёме. Эта проблема усложняется, если покрытие является безмоментным и не может быть описана аналитическим уравнением. Такие поверхности формируются в дискретном виде статико-геометрическим способом [1].

Постановка задачи. Вывести формулу зависимости между перекрываемым объёмом, заданными аппликатами опорного контура и внешней нагрузкой $P_{i,j}$, которая позволит управлять этими параметрами при формировании дискретного каркаса поверхности.

Основная часть. Система линейных уравнений равновесия узлов дискретной сети на правильной сетке в плане с квадратной ячейкой включает перекрываемый объем V, параметры опорного контура в виде аппликат заданных его узлов и параметры внешней нагрузки $kP_{i,j}$. Эта зависимость является линейной, поскольку, указанные параметры входят в уравнение в первой степени. Однако система уравнений отражает эту зависимость в неявном виде, что затрудняет использовать эти параметры для управления формой сети.

Зависимость между указанными параметрами значительно упрощается, если, исключив из системы уравнений аппликаты неизвестных узлов сети, свести систему к одному уравнению. Это можно сделать, развивая исследования статьи [2]. Объём пространства, перекрываемого ДЗП на заданном прямоугольном плане $m \times n$ квадратных ячеек с шагом h, определяется как сумма объёмов под гиперболическими параболоидами, перекрывающими каждую ячейку сети [3].

Рассмотрим дискретную сеть, сформированную статико-геометрическим способом на прямоугольном плане (рис. 1*а*) с площадью $S = h^2 mn$,

где h – шаг сети в плане по осям OX и OY;

m, n – число делений плана соответственно вдоль осей OX и OY (рис. 1*б*).

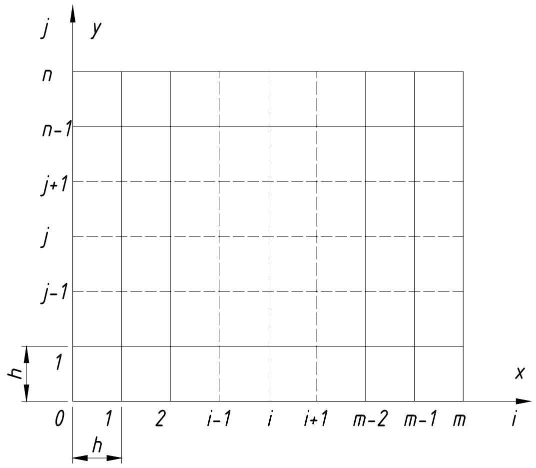

рис. 1*б*

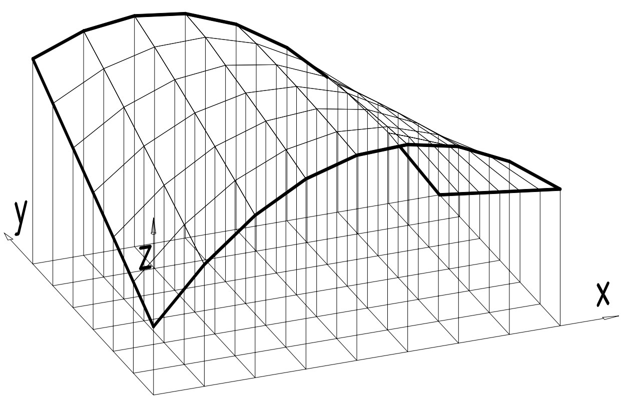

рис. 1 *а*

Тогда формула для приближенного вычисления перекрываемого объёма принимает вид:

$$V = \frac{h^2}{4}\left(Z_{00} + Z_{m,0} + Z_{0,n} + Z_{m,n}\right) + \frac{h^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\left(Z_{i,0} + Z_{i,n}\right) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(Z_{0,j} + Z_{m,j}\right)\right] +$$
$$+ h^2 \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} Z_{i,j}, \qquad (1)$$

где i, j – номер узла;

$Z_{00}, Z_{m,0}, Z_{0,n}, Z_{m,n}$ – аппликаты угловых узлов опорного контура;

$Z_{i,0}, Z_{i,n}, Z_{0,j}, Z_{m,j}$ – аппликаты рядовых узлов опорного контура;

$Z_{i,j}$ – аппликаты внутренних узлов сети.

Представим формулу (1) в виде:

$$V = \frac{h^2}{4}A + \frac{h^2}{2}B + h^2 C, \qquad (2)$$

где

A – сумма аппликат заданных угловых контурных узлов;

B – сумма аппликат заданных рядовых контурных узлов;

C – сумма аппликат неизвестных внутренних узлов.

При формообразовании сети аппликаты узлов опорного контура являются заданными, аппликаты внутренних узлов неизвестны и определяются при решении системы уравнений равновесия узлов:

$$
\begin{aligned}
&-4Z_{11}+Z_{12}+Z_{21}=-Z_{01}-Z_{10}-kP_{11}\\
&Z_{11}-4Z_{21}+Z_{22}+Z_{31}=-Z_{20}-kP_{21}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{i-1,1}-4Z_{i,1}+2Z_{i,2}+Z_{i+1,1}=-Z_{i,0}-kP_{i,1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{m-3,1}-4Z_{m-2,1}+Z_{m-2,2}+Z_{m-1,1}=-Z_{m-2,0}-kP_{m-2,1}\\
&Z_{m-2,1}-4Z_{m-1,1}+Z_{m-1,2}=-Z_{m-1,0}-Z_{m,1}-kP_{m-1,1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{1,j-1}-4Z_{1,j}+Z_{1,j+1}+Z_{2,j}=-Z_{0,j}-kP_{1,j}\\
&Z_{1,j}+Z_{2,j-1}-4Z_{2,j}+Z_{2,j+1}+Z_{3,j}=-kP_{2,j}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{i-1,j}+Z_{i,j-1}-4Z_{i,j}+Z_{i,j+1}+Z_{i+1,j}=-kP_{i,j}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{m-3,j}+Z_{m-2,j-1}-4Z_{m-2,j}+Z_{m-2,j+1}+Z_{m-1,j}=-kP_{m-2,j}\\
&Z_{m-2,j}+Z_{m-1,j-1}-4Z_{m-1,j}+Z_{m-1,j+1}=-Z_{m,j}-kP_{m-1,j}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{1,n-2}-4Z_{1,n-1}+Z_{2,n-1}=-Z_{0,n-1}-Z_{1,n}-kP_{1,n-1}\\
&Z_{1,n-1}+Z_{2,n-2}-4Z_{2,n-1}+Z_{3,n-1}=-Z_{2,n}-kP_{2,n-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3)\\
&Z_{i-1,n-1}+Z_{i,n-2}-4Z_{i,n-1}+Z_{i+1,n-1}=-Z_{i,n}-kP_{i,n-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_{m-3,n-1}+Z_{m-2,n-2}-4Z_{m-2,n-1}+Z_{m-1,n-1}=-Z_{m-2,n}-kP_{m-2,n-1}\\
&Z_{m-2,n-1}+Z_{m-1,n-2}-4Z_{m-1,n-1}=-Z_{m-1,n}-Z_{m,n-1}-kP_{m-1,n-1}
\end{aligned}
$$

В каждом уравнении системы (3) заданные параметры перенесены в правую часть. Умножая каждое уравнение на соответствующий коэффициент $k_{i,j}$ как это было сделано в [2], эти коэффициенты можно подобрать таким образом, что после суммирования уравнений системы (3) получается величина C суммы аппликат неизвестных внутренних узлов. При этом, если сумма коэффициентов $k_{i,j}$ при каждой неизвестной аппликате равна 1, получаем новую систему линейных уравнений для определения коэффициента $k_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
&-4k_{11}+k_{12}+k_{21}=1\\
&k_{11}-4k_{21}+k_{22}+k_{31}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{i-1,1}-4k_{i,1}+2k_{i,2}+k_{i+1,1}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{m-3,1}-4k_{m-2,1}+k_{m-2,2}+k_{m-1,1}=1\\
&k_{m-2,1}-4k_{m-1,1}+k_{m-1,2}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{1,j-1}-4k_{1,j}+k_{1,j+1}+k_{2,j}=1\\
&k_{1,j}+k_{2,j-1}-4k_{2,j}+k_{2,j+1}+k_{3,j}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{i-1,j}+k_{i,j-1}-4k_{i,j}+k_{i,j+1}+k_{i+1,j}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{m-3,j}+k_{m-2,j-1}-4k_{m-2,j}+k_{m-2,j+1}+k_{m-1,j}=1\\
&k_{m-2,j}+k_{m-1,j-1}-4k_{m-1,j}+k_{m-1,j+1}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{1,n-2}-4k_{1,n-1}+k_{2,n-1}=1\\
&k_{1,n-1}+k_{2,n-2}-4k_{2,n-1}+k_{3,n-1}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{i-1,n-1}+k_{i,n-2}-4k_{i,n-1}+k_{i+1,n-1}=1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{m-3,n-1}+k_{m-2,n-2}-4k_{m-2,n-1}+k_{m-1,n-1}=1\\
&k_{m-2,n-1}+k_{m-1,n-2}-4k_{m-1,n-1}=1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Заметим, что в системе уравнений (4) присутствуют только дискретные параметры i и j сети. Поэтому, независимо от исходных параметров (параметров опорного контура и параметров внешней нагрузки) конструирования сети для данного разбиения коэффициенты $k_{i,j}$ не изменяются. После сложения уравнений системы (3), умноженных на соответствующий коэффициент $k_{i,j}$, получим значение величины C в формуле (2):

$$
\begin{aligned}
C=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}Z_{i,j}=-\sum_{i=1}^{m-1}\left(Z_{i,0}k_{i,1}+Z_{i,n}k_{i,n-1}\right)-\sum_{j=1}^{n-1}\left(Z_{0,j}k_{1,j}+Z_{m,j}k_{m-1,j}\right)-\\
-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}k_{i,j}kP_{i,j}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При подстановке (5) в (1) получим зависимость между перекрываемым объемом, заданными аппликатами опорного контура и внешней нагрузкой $P_{i,j}$:

$$V=\frac{h^2}{4}\left(Z_{00}+Z_{m,0}+Z_{0,n}+Z_{m,n}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}\left[Z_{i,0}\left(\frac{h^2}{2}-k_{i,1}\right)+Z_{i,n}\left(\frac{h^2}{2}-k_{i,n-1}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m-1}\left[Z_{0,j}\left(\frac{h^2}{2}-k_{1,j}\right)+Z_{m,j}\left(\frac{h^2}{2}-k_{m-1,j}\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}k_{i,j}kP_{i,j} \tag{6}$$

Представим выражение (6) в виде уравнения:

$$V=f_1\left(Z_{конт.}\right)-f_2\left(P_{i,j}\right), \tag{7}$$

где

$$f_1=\frac{h^2}{4}\left(Z_{00}+Z_{m,0}+Z_{o,n}+Z_{m,n}\right)+\sum_{i=1}^{m-1}\left[Z_{i,0}\left(\frac{h^2}{2}-k_{i,1}\right)+Z_{i,n}\left(\frac{h^2}{2}-k_{i,n-1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{-1}\left[Z_{0,j}\left(\frac{h^2}{2}-k_{1,j}\right)+Z_{m,j}\left(\frac{h^2}{2}-k_{m-1,j}\right)\right]-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}k_{i,j}kP_{i,j} \tag{8}$$

$$f_2=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}k_{i,j}kP_{i,j} \tag{9}$$

Если параметры опорного контура $Z_{конт..}$ и параметры внешней нагрузки $P_{i,j}$ считать величинами переменными, то функции (8) и (9) являются линейными.

Выражение (7) можно считать уравнением плоскости, если переменные величины $Z_{конт}$ в (8) поставить в линейную зависимость от одного параметра, а величину $P_{i,j}$ в (9) – от другого.

Анализируя выражение (7), можно сделать заключение, что эта плоскость проходит через начало координат и пересекает три координатные плоскости $f_1 0 f_2$, $f_1 0Z$ и $f_2 0Z$ по биссектрисам прямых углов между координатными осями (рис. 2). Задавая один из параметров (f_1, f_2 или V), получаем линейную зависимость между двумя остальными, что позволяет управлять формой моделируемой поверхности при заданном виде функций f_1 и f_2.

Выводы и перспективы. Полученная зависимость между перекрываемым объёмом, параметрами опорного контура и внешней формообразующей нагрузкой позволяет изменять форму поверхности при заданном перекрываемом объёме. В дальнейшем предполагается рассмотреть конкретные примеры управления формой моделируемых поверхностей безмоментных покрытий на заданной сетке в плане с квадратной ячейкой.

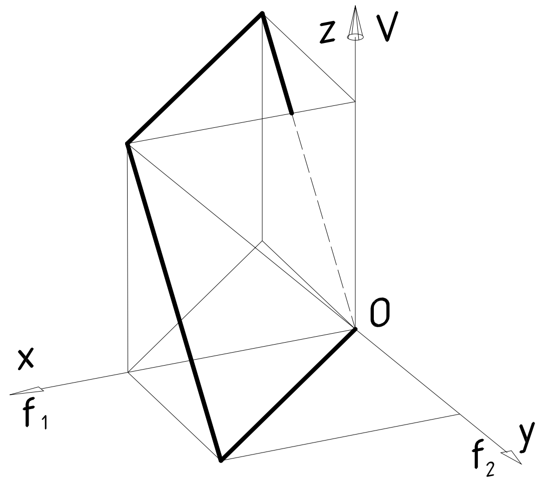

Рис. 2.

Литература

1. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дисс. д.т.н. 1986.

2. *Ковалёв С.Н., Юзефчук* Формирование дискретно представленной поверхности, перекрывающей заданный объём, вып. 4 Труды Таврической … Мелитополь 1997, с. 13-14.

3. *Михайленко В.Е., Ковалёв С.Н.* Конструирование форм современных архитектурных сооружений.-К.:Будивэльник, 1978.-112с.