УДК 681.3

С. Ю. Суліменко,
асп.кафедри інформаційних технологій в архітектурі КНУБА

КОНСТРУКТИВНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ФОРМОУТВОРЕННЯ ЕЛІПСОІДІВ ЗА ЇХ ЛІНІЯМИ ОБРИСІВ

Анотація: в роботі проведено параметричний аналіз задачі включення перспективної лінії обрису в визначник еліпсоїдів, та наведені конструктивні схеми її розв'язків.

Ключові слова: дизайн, перспектива, еліпсоід, лінія обрису.

Постановка проблеми. Комп'ютерне 3D-моделювання − основний сучасний інструмент дизайнера. Для цього існує велика кількість програм, але в жодній з них нема засобів, які б дозволили перевести бажану перспективну лінію обрису дизайнерського виробу в конструктивну площину. З точки зору ергономіки, одним з найважливіших елементів у візуальному сприйнятті оточуючих об'єктів є їх лінія обрису. Вона сприймається зором фактично незалежно від освітленості навколишнього середовища та самого об'єкту. Саме тому формоутворення з використанням перспективних ліній обрису може істотно вплинути на процес створення дизайну об'єкту та узгодження його з оточенням.

Робота виконується в рамках проблеми створення програмних додатків (плагінів) до основного інструментарію дизайнера для залучення ліній обрису в процес формоутворення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Постановка задачі включення перспективної лінії обрису до визначника поверхонь була сформульована К.О.Сазоновим і розглянута в його роботах [2] та роботах його учнів. Серед останніх − роботи [3,4,5].

З поверхонь другого порядку задача розв'язана для сфер, циліндрів та конусів обертання. Поверхні еліпсоїдів в рамках означеної проблеми не розглядалися.

Сказане стосується прикладного аспекту задачі. Властивості ж поверхонь другого порядку і перспективних перетворень досконало вивчені, і їх дослідження принципово навряд чи можуть мати геометричну новизну. Деякі з них загально відомі. Наприклад, основна властивість конуса, що дотичний до поверхні другого порядку, полягає в тому, що він перетинає її по кривій другого порядку [1]. А є менш поширені, але важливі в рамках даної проблеми. Нам не вдалося знайти посилань на їх існування. Тому вони сформульовані, доведені і оформлені у вигляді задач, але не претендують на геометричну новизну.

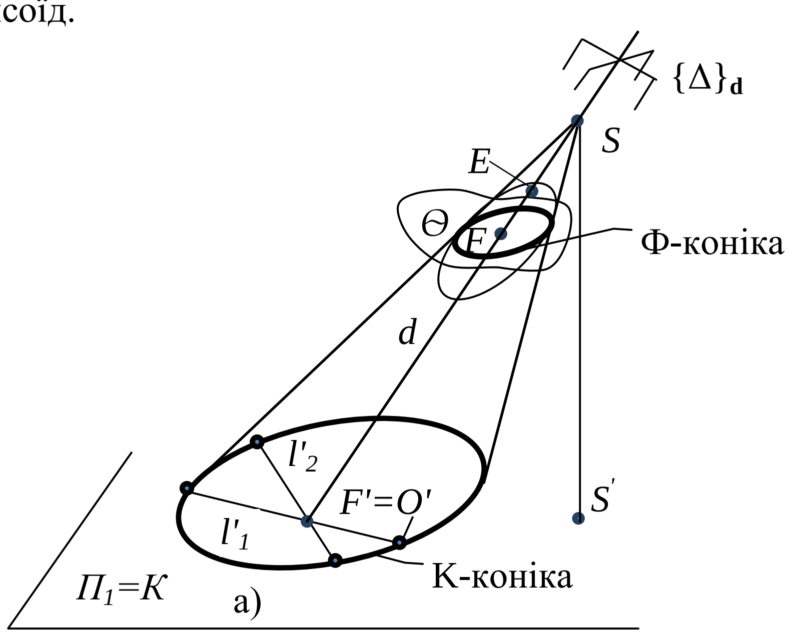
Формулювання цілей і завдання статті.

Ціль статті: створити геометричне підґрунтя для окресленої проблеми. Воно передбачає наступні завдання:

1. Встановлення максимального числа і змісту параметрів, що можуть бути задані на картинній площині і залучені до формоутворення трьохвісного еліпсоїда.
2. Розв'язання задачі імпорту цієї інформації у предметний простір і схему її взаємодії з іншою інформацією.
3. Окреслення кола властивостей і задач, що необхідні для формоутворення.

Основна частина. Для полегшення створення і сприйняття графічної інформації при геометричних дослідженнях за картину приймемо площину Π_1. Точка зору S задає вершину конуса, дотичного до шуканого еліпсоїда. Нехай він перетинає його по деякій коніці, яку будемо називати формоутворюючою Ф-конікою. В перетині конуса з картинною отримана гомологічна їй коніка – лінія обрису на картинній площині: К-коніка (рис.1а).

В загальному випадку конус другого порядку (зокрема еліптичний) задається вісьмома параметрами, з них два параметри форми ($p_\Phi = 2$) і шість параметрів положення ($p_\Pi = 6$). В наближеному до задачі випадку обгортувальний конус задається п'ятипараметричною К-конікою на картинній площині та довільним центром конусу ($p_\Pi = 3$). Маємо ті самі вісім параметрів. Але вершину обгортувального конусу визначено в точці зору, тому на картині може бути задана лише п'ятипараметрична множина конусів, що обгортують еліпсоїд.



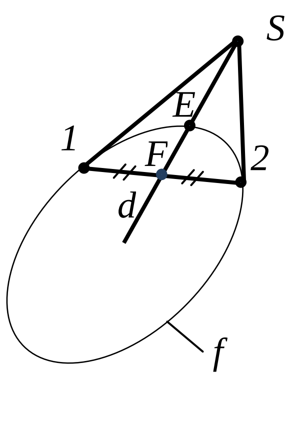


Рис.1.

Висновок. Будь яка К-коніка може розглядатися як лінія обрису шуканого еліпсоїда, бо вона імпортує в предметний простір п'ять параметрів формоутворення з дев'яти шуканих.

Зазначимо, що коли йдеться про формоутворення деяких конкретних поверхонь (сфери, еліпсоїда обертання з віссю, що перетинає головний промінь), К-коніка не може бути задана довільно.

Імпорт параметрів з картинної площини в предметний простір полягає в побудові Ф-коніки. Для її завдання достатньо виконати переріз конусу довільною площиною Θ і визначити точки еліпсу та його центр F. В цьому разі дотичний конус має вже вісім параметрів, бо стільки параметрів має Ф-коніка. При цьому три параметри положення січної площини трансформуються в параметри форми дотичного конусу. Хоча словосполучення «обгортувальний конус» і «дотичний конус» є повними синонімами, конус на якому визначена Ф-коніка будемо називати дотичним, бо він визначає і точки дотику, інакше обгортувальним. Еліпсоїд, що утворюється за допомогою дотичного конусу повністю успадковує всі його вісім параметрів і може бути визначений із свавіллям в один параметр.

Існує багато конструктивних та аналітичних схем щодо застосування цього параметра. На рис.1а) та 1б), як приклад, наведена найпростіша схема. Через точку зору S та центр Ф-коніки − точку F проведена пряма d. Пучок інцидентних їй площин $\{\Delta\}_d$ перетинає Ф-коніку по діаметрам. Якщо на SF задати точку E ($EF < ES$) еліпсоїда, вона буде належати всім площинам пучка. На рис.1б) схематично зображена одна з них. До формування кривої f маємо п'ять умов: точки *1,2,E* та дотичні *S1* та *S2*.

Предметом даних досліджень є еліпсоїд, але, якщо точку E обрати так, щоб $EF=ES$ отримаємо еліптичний параболоїд, а якщо $EF>ES$ – двопорожнинний гіперболоїд. Зрозуміло, що від вибору площини Θ та точки E залежить форма поверхні, але К-коніка залишається незмінною.

Схема на рис.1 може бути узагальнена за рахунок того, що: крива f може бути не кривою другого порядку; Θ може бути не площиною, а поверхнею і тоді лінія дотику буде просторовою і, нарешті, К-коніка може бути довільною кривою.

Але поки ми залишаємось в межах поверхонь другого порядку, цікавим є питання: чи можемо ми на картині задавати параметри площини Θ? Зрозуміло, що положення точки F на прямій d задати неможливо, а от її проекцію F' можемо задати і по її положенню знайти інші параметри площини Θ. Для цього зафіксуємо деякі властивості прямої d.

Задача 1. Довести наступну властивість: якщо до довільної центральної квадрики побудовано дотичний конус з вершиною в довільній точці, то центр квадрики, центр коніки дотику і вершина конусу належать одній прямій.

Доведемо спочатку аналогічну двовимірну задачу.

Задача 2. Довести, що при заданій центральній коніці, *полюс, середина поляри та центр коніки належать одній прямій*. Наразі обмежимось еліпсом (рис.2). Якщо точки дотику (x_1,y_1) та (x_2,y_2) на еліпсі доберемо довільно то, не втрачаючи загалу, можемо задати коніку в канонічному вигляді

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad . \tag{1}$$

Рівняння дотичної до еліпса в довільній точці (x_1,y_1) має вигляд .

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y-1=0$$

Координати полюса P знаходимо як перетин дотичних в точках (x_1,y_1) та (x_2,y_2):

$$x_p=a^2\frac{y_2-y_1}{x_2y_1-x_1y_2}; \qquad y_p=b^2\frac{x_1-x_2}{x_2y_1-x_1y_2} \ . \tag{2}$$

Середина хорди (поляри p) має координати:

$$x_c=\frac{x_2+x_1}{2}; \qquad y_c=\frac{y_2+y_1}{2} \ . \tag{3}$$

Враховуючи, що центр коніки розташовано в початку координат, умова належності трьох означених точок одній прямій має вигляд:

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Коли підставимо координати точок з (2) та (3) і розкриємо визначник, будемо мати

$$\frac{b^2(x_2+x_1)(x_1-x_2)}{2(x_2y_1-x_1y_2)}-\frac{a^2(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{2(x_2y_1-x_1y_2)}=A.$$

Останнє можемо записати у вигляді:

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)=\frac{2A}{a^2b^2}(x_2y_1-x_1y_2).$$

Вирази лівої частини в дужках дорівнюють одиниці, якщо точки (x_1,y_1) та (x_2,y_2) належать (1), з цього маємо $A(x_2y_1 - x_1y_2)=0$. Тоді, або $A=0$ і умова належності виконана, або ($x_2y_1 – x_1$,y_2)= 0, що рівнозначно $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$. Остання умова виконується для точок, що належать прямій, яка проходить через початок координат, тобто поляра є діаметром коніки, а її полюс невласна точка. Як відомо, дотичні до конусу в кінцях діаметру паралельні і інцидентні саме цій невласній точці [1].

Властивість задачі 2 може бути сформульована і у такому вигляді: *діаметр коніки, що проходить через деяку зовнішню точку спряжений з полярою цієї точки.*

Повернемось до задачі 1. На наш погляд для її розв’язання недостатньо застосувати принцип двоїстості, бо на відміну від двовимірного випадку, поняття середини полярної площини не визначено.

На ілюстративному зображенні еліпсоїда задано дотичний конус вершиною *S* та Ф-конікою дотику з центром *F* (рис. 3). Пряма *d* проходить через точки *S* та *F*.

Жмуток площин інцидентний *d* перетинає Ф-коніку по діаметрам і в кожній площині в перерізі конуса і еліпсоїда утворюється конфігурація задачі 2. Тоді *d* – спільний діаметр конік *f* перерізу. Треба довести, що *d* – діаметр еліпсоїду. Доводимо від супротивного.

Нехай *d* не є діаметром еліпсоїду, тобто центр квадрики не лежить на ньому. Проведемо через цей центр і пряму *d* площину. Вона визначає деяку криву *f'*, центр якої співпадає з центром квадрики. Але за задачею 2 центр кривої належить прямій *d*, а тому і центр квадрики належить прямій *d*. Властивість задачі 1 доведена.

Повертаємось до рис.1а). Задачею 1 встановлено, що в межах К-коніки може бути визначена точка *F'=O'*, в яку проектується і центр Ф-коніки, і центр квадрики. Цим визначається також пряма *d*. Якщо на прямій *d* задати точку *F*, то два інших параметри площини Ѳ можна здобути з точки *F'=O'*. Для цього через точку *F'* проводять дві довільні хорди l'_1 та l'_2 і імпортують їх в параметричний простір так, щоб вони були діаметрами Ф-коніки.

Схема побудови наведена на рис.4. Діагональ паралелограма, який побудовано на сторонах, що з’єднують точку зору *S* з кінцями хорди *l'* задає напрям діаметру *l*.

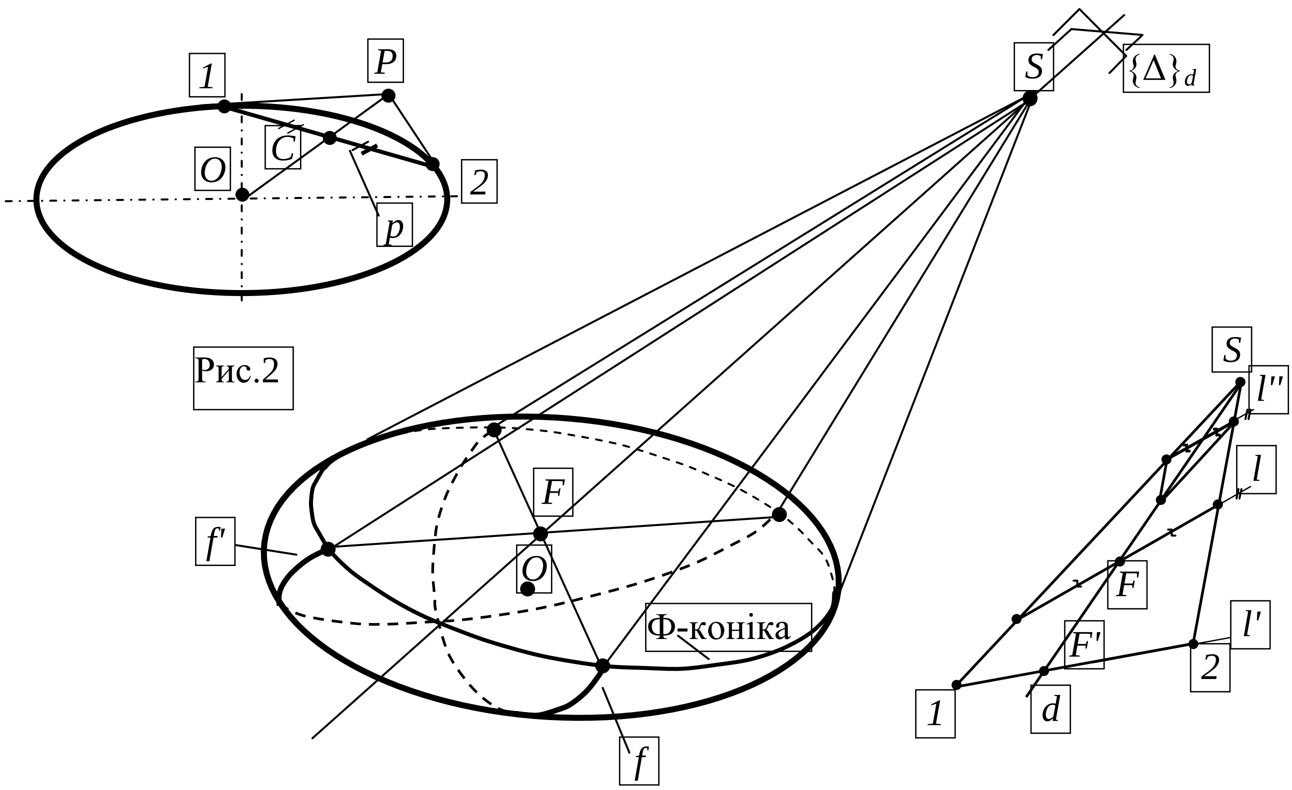


Рис.3

Рис.4

Висновки. Формоутворення трьохвісного еліпсоїду за заданим контуром на картині у вигляді довільної коніки, залишає вільним для задоволення іншим конструктивним рішенням чотири параметри, три з яких витрачаються на завдання конкретної лінії дотику і впливають як на параметри форми так і на параметри положення еліпсоїда. Четвертий має потужний вплив саме на параметри форми і зміна його може вивести шукану квадрику з класу еліпсоїдів.

Аналіз формоутворення еліпсоїдів не є кінцевою метою досліджень. Запропоновані варіанти узагальнення підходу мають на меті створити способи моделювання об’єктів дизайну з достатнім числом вільних параметрів в підмножині предметного простору, обмеженій бажаним обгортувальним конусом (для практики - перспективною лінією обрису).

Література

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии дополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М.: «Наука», 1968. – 911с.
2. *Сазонов К.А.* Диалоговое графическое пространственное проектирование: Автореферат диссертации докт.техн.наук – М.,1988 – 38с.
3. *Сазонов К.А.* Компьютерное формообразование конических и цилиндрических поверхностей на перспективных изображениях по линиям очертания. - К.:Будівельник, 2012. – Вип.89. С.33-38.

4. *Сазонов К.А.* Компьютерное формообразование поверхностей вращения на перспективных изображениях по линиям очертания. - К.: Будівельник, 2012. – Вип.60. С. 298 - 301.
5. *Янковська Л.Є.* Комп'ютерне моделювання сферичних об'єктів дизайну на перспективних зображенням за лініями обрису: Автореферат дисертації…к.т.н. – К.,2015 – 25с.

Аннотация

В работе проведен параметрический анализ задачи включения перспективной линии очертания в определитель эллипсоидов, и приведены конструктивные схемы решения этой задачи.

Ключевые слова: дизайн, перспектива, эллипсоид, линия очертания.

Annotation

In work is the parametric analysis of the problem of including perspective outline in the identifier of ellipsoids carried out, and there are conduced constructive schemes of solution of current problem.

Keywords: design, perspective, ellipsoid, outline

УДК 72.035.3

К. В. Сухаревський
Асп. каф теорії архітектури КНУБА

«ЦЕГЛЯНИЙ СТИЛЬ» В АРХІТЕКТУРІ УНІВЕРСИТЕТСЬКИХ БУДІВЕЛЬ УКРАЇНИ У ДРУГІЙ ПОЛОВИНІ XIX ст.

Анотація: в статті проаналізовано розвиток «цегляного стилю» в архітектурі університетських будівель Україні як окремий напрямок еклектики 30х– 90х рр. XIX ст. На прикладі двох архітектурних ансамблів виявлено спільні формотворчі тенденції, економічні та соціокультурні образотворчі чинники та характерні регіональні особливості.

Ключові слова: еклектика, університетські будівлі, цегляний стиль, неоромантизм, неоготика.

В 30-х роках XIX ст. в архітектурі європейських країн та Росії зароджується новий стиль – еклектика. У цей період українські землі входили до складу Австрійської (з 1868 – Австро-Угорської) та Російської Імперій. Архітектори, що проходили навчання або стажування в країнах Європи, швидко розповсюджували нові ідеї, чому сприяла не тільки художня вичерпність класичних стилів, але і розвиток будівельної індустрії, зокрема,