УДК 519.21
канд. ф-м. наук доц. Наголкіна З.І.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОДНА ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ДИФУЗІЇ

Досліджується мультиплікативне представлення розв'язку рівняння в частинних похідних, яке породжується відповідним представленням стохастичного рівняння, що моделює процеси дифузії.

Ключові слова. Конвективна дифузія, коефіцієнт дифузії, броунівський рух, закони Фіка, стохастичне диференціальне рівняння, пряме і обернене рівняння Колмогорова, розв'язок рівняння, мультиплікативне представлення розв'язку, метод мультиплікативної апроксимації.

В будівельній галузі з явищем дифузії пов'язана велика кількість технологічних процесів. В нерухомому середовищі має місце молекулярна дифузія, що обумовлена хаотичним тепловим рухом молекул (броунівський рух). Вона описується другим законом Фіка, який є рівнянням в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial c}{\partial t} = Ddivgradc$$

с-концентрація дифузанта, D-коефіцієнт молекулярної дифузії, (фізична стала, що характеризує здатність проникнення дифузанта в нерухомому середовищі), що визначається першим законом Фіка.

При зведенні будівельних об'єктів застосовують різноманітні вигляди цегли та інші будівельні матеріали, які стикаються з грунтами. При наявності в грунті і в навколишньому середовищі вологи і солей дифузія впливає на якість і довговічність будівельних матеріалів. Необхідно враховувати додаткову вологість грунтів, пов'язану з атмосферними опадами і зміною температурних режимів. Це можливо за допомогою рівняння конвективної дифузії. Конвективна дифузія пов'язана з рухом фаз в результаті зовнішнього впливу. В загальному вигляді це рівняння буде наступним

$$\frac{\partial c}{\partial t} = Ddivgradc - v \cdot gradc$$

Або в одновимірному випадку

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x} \qquad (1)$$

c(t,x) - концентрація речовини, що дифундує, v- середня швидкість переносу речовини, D - коефіцієнт дифузії. Рівняння конвективної дифузії в грунті - це процес переміщення розчиненої речовини, який залежить від вологості грунту.

Розглянемо одновимірну математичну модель руху окремої частинки в процесі дифузії 1. Нехай x(t) – координата частинки (молекули) речовини в момент часу t, яка рухається з макроскопічною швидкістю v=a(t,x). Переміщення частинки складається з двох компонентів – знесення, яке відповідає макроскопічній швидкості, і зміщення внаслідок теплового хаотичного руху. Цей випадковий процес описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду

$$dx = a(t,x)dt + b(t,x)dw(t) \tag{2}$$

$w(t)$-процес броуновського руху, $\Delta w = w(t+\Delta t) - w(t)$ має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією Δt. Рівняння (2) є імовірнісною моделлю дифузії і називається дифузійним. Як відомо з класичної теорії імовірностей 1, 2 умовне середнє від функціоналу дифузійного процесу (2) , а саме функція $u(t,x) = E_{t,x} f(x(T))$, $t \in [0,T]$ задовольняє оберненому рівнянню Колмогорова

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

Рівняння (3) є рівнянням в частинних похідних і описує не хаотичний рух окремої частинки, а рух ансамблю частинок, тобто процес дифузії на макроскопічному рівні. Пряме рівняння Колмогорова при певній інтерпретації розв’язку 3 описує саме процес конвективної дифузії та являється спряженим по відношенню до (3). Існують різні методи спрощення і розв’язання рівняння (3). В цій роботі буде наведено наближений метод, який пов'язаний з мультиплікативним представленням розв’язку рівняння (2). Як відомо з 4 розвязок задачі Коші для (2) може бути представлений у вигляді

$$x(t) = P - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} T_1(t_{k+1},t_k) T_2(t_{k+1},t_k) x(t_0) \tag{4}$$

Де $T_1(t_{k+1},t_k), T_2(t_{k+1},t_k)$ - розрішаючі оператори відповідно неповних рівнянь, які получаються з (2) у випадку $a(t,x)=0$ і $b(t,x)=0$. Закономірність (4) досліджена в $[4]$ і має місце при виконанні класичних умов на коефіцієнти

(2) при яких існує єдиний розвязок. При виконанні певних умов на коефіцієнти рівняння (2), представлення (4) породжує аналогічне представлення розв'язку задачі Коші для рівняння (3), що суттєво спрощує його розв'язання і може інтерпретуватись як наближений розвязок. При цьому початкова умова задається на правому кінці, а саме, $\lim_{t\to T} u(t,x) = f(x)$.

При кожному t розвязок рівняння (3) можна розглядати, як функцію в просторі C^2 - двічі неперервно диференційованих функцій. Будемо вважати, що $u(t,x) = u_t(x) \in C^2$.

Теорема. Нехай коефіцієнти стохастичного рівняння (2) задовольняють умовам, при яких існує єдиний розвязок, який допускає мультиплікативне представлення у відповідному просторі. І нехай коефіцієнти цього рівняння, а також деяка функція $f(x) \in C^2$ є двічі неперервно диференційованими. Тоді існує єдиний розвязок (3), який допускає мультиплікативне представлення вигляду

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=0}^{n} U_2(t_{k+1},t_k) U_1(t_{k+1},t_k) f \right](x) \tag{5}$$

Зважаючи на властивості умовних середніх, розглянемо $u(t,x) = E_{t,x} f(\prod_{k=0}^{n} T_1(t_{k+1},t_k) T_2(t_{k+1},t_k) x) = E_{t,x} f(T_1(t_{n+1},t_n) x_{1n}) = E_{t,x} E_{t_n x_{1n}} f(x_1(t_{n+1}))$,

де $x_{1n} = T_2(t_{n+1},t_n) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} T_{1k} \cdot T_{2k} \cdot x$, $u(t,x) = E_{t,x} u_1(t_n, x_{1n}) = E_{t,x} [U_1(t_n,t_{n+1}) f](x_{1n})$.

Якщо позначити $g = U_1(t_n,t_{n+1}) f$, то на наступному кроці отримаємо $E_{t,x} g(x_{1n}) = E_{t,x} g(T_2(t_{n+1},t_n) x_{2n})$

де $x_{2n} = \prod_{k=0}^{n-1} T_{1k} \cdot T_{2k} \cdot x$.

$$E_{t,x} g(x_{1n}) = E_{t,x} g(T_2(t_{n+1},t_n) x_{2n}) = E_{t,x} E_{t_n x_{2n}} g(x_2(t_{n+1})) = E_{t,x} [U_2(t_n,t_{n+1}) g](x_{2n}) =$$
$$E_{t,x} [U_2(t_{n+1},t_n) U_1(t_{n+1},t_n) f](x_{2n}).$$

Продовжуючи послідовно цю процедуру, на n-ому кроці буде отримано мультиплікативну апроксимацію розв'язку (3) у вигляді (5). Причому $U_1(t_{k+1},t_k), U_2(t_{k+1},t_k)$ - еволюційні сім'ї обмежених операторів при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, які є розрішаючими операторами відповідно рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a(t,x) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2} b^2(t,x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Треба відмітити, що цей метод мультиплікативної апроксимації можливо застосовувати саме до оберненого рівняння, що пов'язано з властивістю умовних середніх відносно потоку $\sigma -$ алгебр, породженого вінеровським процесом і тим, що для оберненого рівняння Колмогорова задача Коші має початкову умову на правому кінці.

Література.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 3. – М.: Наука, 1973.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975.
3. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
4. О мультипликативных представлениях решений уравнений переноса со случайными коэффициентами. – В сб. Теплопроводность и конвективный теплообмен. – К.: Наукова думка, 1977.

Аннотация.

Исследуется мультипликативное представление решения уравнения в частных производных, порождаемое соответствующим представлением стохастического уравнения, которое моделирует процессы диффузии.

Ключевые слова: конвективная диффузия, коэффициент диффузии, броуновское движение, законы Фика, стохастическое дифференциальное уравнение, прямое и обратное уравнение Колмогорова, решение уравнения, мультипликативное представление решения, метод мультипликативной аппроксимации.

Annotation.

We study the multiplicative representation of the solution for equation in partial derivatives, which are generated by the corresponding presentation solutions of stochastic equations modeling diffusion processes.

Keywords: convective diffusion, coefficient of diffusion, Brownian motion, the laws of Fick, stochastic differential equations, direct and inverse Kolmogorov equation, solution of equation, multiplicative representation of solution, multiplicative approximation method.