УДК 539.3

д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
к.т.н., доцент Станкевич А.М., Левківський Д.В.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

СОБЛИВОСТІ ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ ПРЯМИХ

В останні часи зниження вимірності рівнянь теорії пружності виконується за допомогою аналітичних та чисельних методів. У роботі запропоновано чисельний метод - класичний варіант метода «прямих» із застосуванням узагальненого метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова для побудови розрахункових рівнянь. Як координатні функції використовуються кусково-лінійні фінітні функції по поперечній координаті. На основі даного підходу розроблено 3 варіанти редукованих вихідних рівнянь: рівняння в моментах, коефіцієнтах, та рівняння мішаного типу. Граничні умови моделюються за допомогою стержнів заданої жорсткості, що дозволяє варіювати граничними умовами. Отримані редуковані рівняння пропонується розв'язувати чисельно, за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Даний підхід має великі перспективи для розв'язання дво- та тривимірних задач статики та динаміки.

Для визначення напруженого стану та динамічних характеристик багатьох елементів будівель, машин і механізмів як розрахункова модель використовується пластина. Тут під пластиною розуміється циліндричне тіло, що обмежене замкненою циліндричною поверхнею (торцевою) та двома поверхнями (лицевими), які розташовані симетрично відносно площини (серединної), яка перпендикулярна до твірних торцевої циліндричної поверхні.

Для побудови математичної моделі, що описує напружено-деформований стан пластини, використовується один з головних методів будівельної механіки – зниження вимірності вихідних три- та двовимірних граничних задач теорії пружності. Традиційно зниження вимірності виконується за допомогою гіпотез кінематичного та статичного змісту. Ці гіпотези задовольняються за умови, що товщина пластини значно менша від її інших габаритних розмірів. Такі пластини називаються тонкими. Теорія тонких пластин використовується вже багато років. Однак існує достатня кількість випадків, де ця теорія дає суттєві похибки. Це стосується дослідження напружено-деформованого стану в зоні локальних навантажень (наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану дорожних покриттів під колесами автотранспорту), при ударах (наприклад, при посадці літаків на плити аеродромного покриття) та інше. Крім того, в багатьох випадках товщина пластини є одного порядку з іншими габаритними розмірами.

В останні часи зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності для пластин виконується за допомогою різних математичних методів аналітичного чи чисельного характерів. Тут зниження вимірності розглядається як застосування до вихідної граничної задачі відповідного математичного метода по одній (чи по двом) просторовій координаті. Серед аналітичних методів тут використовуються варіаційні методи (наприклад, метод Рітца) та проекційні методи (метод Власова-Канторовича, метод Векуа), розклад в степеневі ряди (Кільчевський М. О. та його послідовники). Одним з найпоширеніших чисельних методів тут є метод прямих.

Традиційно в методі прямих, який застосовують по поперечній координаті, зниження вимірності виконується за допомогою метода скінченних різниць (Вінокуров В. І., Шкелев Л. Т., Станкевич А. М.) та інші. Авторами цієї роботи запропоновано використовувати замість метода скінченних різниць з побудову розв'язувальних рівнянь за допомогою проекційного метода [1]. В даній роботі зроблено аналіз особливостей побудови розв'язувальних рівнянь при використанні такого підходу. Розв'язання всіх необхідних питань дослідимо на випадку двовимірних рівнянь плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) в декартовій системі координат $x0y$ в плоскій області (прямокутник) $(0 \le x \le l) \otimes (0 \le y \le h)$, границя якої обмежена відрізками прямих $x = 0$, $x = l$ (торцеві лінії) та $y = 0$, $y = h$ (лицеві лінії).

Першою особливістю даного варіанта метода прямих є те, що вихідні рівняння, що описують напружено-деформований стан в загальному вигляді зручно записати як систему диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x} = -\dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\dfrac{\partial v^*}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}\sigma_x \\ \dfrac{\partial v^*}{\partial x} = -\dfrac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}\dfrac{\partial v^*}{\partial y} = \dfrac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\dfrac{\partial v^*}{\partial y} + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_x \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $u^* = \mu u$, $v^* = \mu v$. Знижувати вимірність цих рівнянь по поперечній координаті y будемо за допомогою проекційного метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова [2]. При цьому невідомі функції u^* та v^* - кінематичні фактори, σ_x, σ_y τ_{xy} - статичні фактори розглядаються як функції однієї координати y, а від другої координати x залежить як від параметра. По змінній y ці функції мають задовільняти граничним умовам на лініях $y=0$ та $y=h$. Оскільки далі будуть обрані базисні функції по координаті y, що не задовільняють граничним умовам, то граничні умови штучно зведемо до природних граничних умов, які припускають вибір таких функцій, в чому і полягає узагальнення метода Бубнова-Гальоркіна [2]. Для цього кожна точка ліній $y=0$ та $y=h$ приєднана двома пружними в'язями заданої жорсткості до відповідної точки оточуючого середовища (рис. 1).

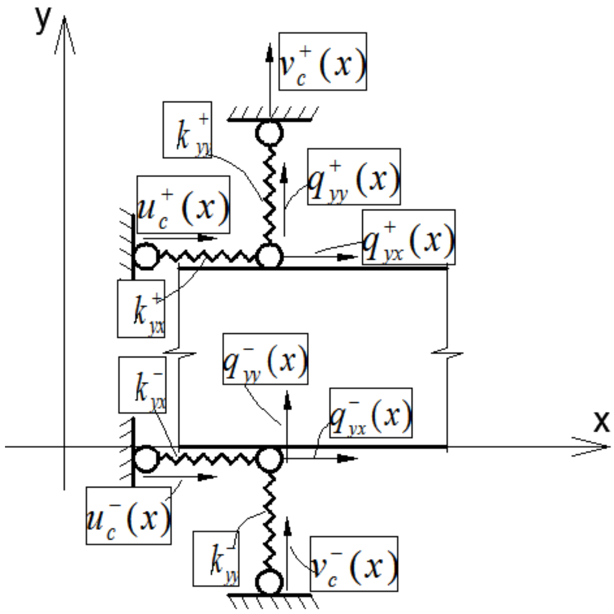

Рис.1

Тут k_{yx}^+, k_{yy}^+, k_{yx}^-, k_{yy}^- - жорсткості пружних в'язей,

$u_c^+(x)$, $v_c^+(x)$, $u_c^-(x)$, $v_c^-(x)$ - задані переміщення оточуючого середовища,

$q_{yy}^+(x)$, $q_{yx}^+(x)$, $q_{yy}^-(x)$, $q_{yx}^-(x)$ - компоненти заданого навантаження.

Граничні умови знаходяться з умов рівноваги на границі $y=0$ та $y=h$ і тому є природними граничними умовам, що забезпечує можливість застосування узагальненого метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Вони мають вигляд:

$$\tau_{yx}(x,h^-) = k_{yx}^-(x)u(x,h^-) - q_{yx}^-(x) - k_{yx}^-(x)u_c^-(x),$$

$$(2)$$

$$\sigma_y(x,h^-) = k_{yy}^-(x)v(x,h^-) - q_{yy}^-(x) - k_{yy}^-(x)v_c^-(x),$$

$$\tau_{yx}(x,h^+) = -k_{yx}^+(x)u(x,h^+) + q_{yx}^+(x) + k_{yx}^+(x)u_c^+(x),$$

$$\sigma_y(x,h^+) = -k_{yy}^+(x)v(x,h^+) + q_{yy}^+(x) + k_{yy}^+(x)v_c^+(x).$$

Тут $h^- = 0$, $h^+ = h$, щоб підкреслити позначення величин на лицьових лініях. Такі граничні умови охоплюють всі варіанти стандартних граничних умов. При $k \to 0$ маємо задані напруження, при $k \to \infty$ - задані переміщення, тобто кінематичні умови.

Розіб'ємо відрізок $[0,h]$ $(n+1)$ прямими, паралельними осі $0x$ на рівні n частин і пронумеруємо послідовно в додатньому напрямку осі $0y$. Отримаємо $(n+1)$ прямих на області визначення рівнянь (1) через рівні інтервали $\Delta y = \dfrac{h}{n}$.

За базисні функції візьмемо кусково-лінійні функції $\varphi_i(y)$, які задовільняють рівностям:

$\varphi_i(y) = 1$ на i - й прямі, $\varphi_i(y) = 0$ на усіх інших прямих. Тоді кожна невідома функція апроксимується сумою:

$$f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \cdot \varphi_i(y) \tag{3}$$

Сукупність всіх функцій, які тут застосовуються по змінній y розглядаються як елементи евклідового простору зі скалярним добутком двох функцій

$$(g(y), d(y)) = \int_0^h g(y) \cdot d(y) dy \tag{4}$$

Оскільки з застосуванням апроксимації (3) всі функції по змінній y є скінченновимірними вимірністю $(n+1)$ і скалярний добуток (4) породжує співвідношення і властивості, які характерні для тензорної алгебри. В зв'язку з цим будемо користуватися індексними позначеннями, що розроблені в тензорній алгебрі.

По-перше, базис $\varphi_i(y)$ $(i = \overline{1, n+1})$ не є ортогональним, тому, згідно до тензорної алгебри, коефіцієнти розкладу по цьому базису є контраваріантними компонентами і позначаються верхніми індексами. В зв'язку з цим співвідношення (3) необхідно записати у вигляді:

$$f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n+1} f^i(x) \cdot \varphi_i(y) = f^i(x) \cdot \varphi_i(y) \tag{5}$$

В останньому записі використано узгодження Ейнштейна про сумування по індексу, що повторюється. Індекс, що розташований вгорі, вказує на інший закон перетворення величин, тобто контраваріантний закон. За змістом $f^i(x)$ будемо називати контраваріантними компонентами $f(x,y)$ з елементами основного базису $\varphi_i(y)$

$$(f(x,y), \varphi_i(y)) = \int_0^h f(x,y) \cdot \varphi_i(y) dy = f^i(x) \tag{6}$$

будемо називати коваріантними компонентами, або називати моментами. Остання термінологія прийнята в математиці і застосовується до значень інтегралів від добутків фіксованої функції на базисні функції.

При застосуванні неортогонального базису в тензорній алгебрі обов'язково необхідно розглянути три варіанти компонент метричного тензора. Двічі коваріантний метричний тензор

$$g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}), \tag{7}$$

двічі контраваріантний метричний тензор, компоненти якого можна знаходити обертаючи матрицю $\{g_{ij}\}$

$$\{g_{ij}\}^{-1} = g^{ij}. \tag{8}$$

Тоді взаємний базис знаходимо за співвідношеннями:

$$\vec{e^i} = g^{ij} \vec{e_j}. \tag{9}$$

Слід нагадати, що всі індекси мають однакові області зміни – від 1 до $(n+1)$. Має місце обернене співвідношення:

$$\vec{e_i} = g_{ij} \vec{e^j} \tag{10}$$

В тензорній алгебрі співвідношення (9), (10) називаються операціями піднімання та опускання індексів відповідно. Необхідно також мати на увазі співвідношення

$$(\vec{e_i},\vec{e^j}) = \delta_{i\bullet}^{\bullet j} = (\vec{e^i},\vec{e_j}) = \delta_{\bullet j}^{i\bullet}, \tag{11}$$

що визначає мішані компоненти метричного тензора, які використовуються в операції заміни індексу. Тут $\delta_{i\bullet}^{\bullet j}$, або $\delta_{\bullet j}^{i\bullet}$ - символ Кронекера, який $=1$, якщо $i=j$ та 0, якщо $i \neq j$. Матриця компонентів $\{g_{ij}\}$ наведена в роботі [1].

Будемо шукати невідомі функції рівнянь (1) наближено у вигляді (5) або у вигляді

$$f(x,y) \approx f_i(x)\varphi^i(y) \tag{12}$$

де величини $f_i(x)$ є або коефіцієнтами у розкладі (7) по взаємному базису $\varphi^i(y)$, або моментами (6) відносно основного базису $\varphi_i(y)$. За процедурою проекційного методу Бубнова-Гальоркіна вихідні рівняння (1) помножимо скалярно на елементи основного базису $\varphi_i(y)$, тобто помножимо на $\varphi_i(y)$ та проінтегруємо по y від 0 до h. Якщо під знак інтеграла входить похідна від компоненти вектора переміщень, то використовуємо розклад (5) для цієї компоненти, якщо ж це похідна від компоненти тензора напружень, то спочатку необхідно перетворити інтеграл, проінтегрувавши частинами, а потім скористатися розкладом (5) для цієї компоненти. В результаті з перших чотирьох рівнянь (1) отримуємо $4\bullet(n+1)$ одновимірних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\frac{du^*{}_i}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v^*{}_\alpha + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi}, \\
\frac{dv^*{}_i}{dx} = -b_{ij} g^{j\alpha} u^*{}_\alpha + \tau_{xyi}, \\
\frac{d\sigma_{xi}}{dx} = -[\tau_{xy}(x,h^-)\cdot\varphi_1(h^-) - \tau_{xy}(x,h^+)\cdot\varphi_n(h^+)] + b_{ji}\tau_{xy}{}^j - X_i, \\
\frac{d\tau_{xyi}}{dx} = -[\sigma_y(x,h^+)\cdot\varphi_i(h^+) - \sigma_y(x,h^-)\cdot\varphi_i(h^-)] - b_{ji}\sigma_y{}^j - Y_i.
\end{gathered} \tag{13}$$

Останнє рівняння системи (1) дає

$$\sigma_{yi} = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v^*{}_\alpha + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi} \tag{14}$$

Тут $b_{ij} = \int\limits_{h^-}^{h^+} \varphi_i(y) \cdot \varphi'_j(y) dy$, відповідно матриця, наведена в роботі [1].

Оскільки в системі рівнянь (13) невідома σ_{yi} входить алгебраїчно, то її можна виключити з рівняння (13) за допомогою співвідношення (14). Крім того, значення напружень τ_{xy} та σ_y на лицьових лініях $y = h^-$ та $y = h^+$ необхідно виключити за допомогою граничних умов (2). Враховуючи, що

$$\varphi_i(h^-) = \delta_{i\bullet}^{\bullet 1},\ f(x,h^-) = f(x,y)\big|_{y=h^-} = f^{\,j}(x)\varphi_j(h^-) = f^{\,j}(x)\delta_{j\bullet}^{\bullet 1} \tag{15}$$

Оскільки перша пряма має рівняння $y = h^-$ та аналогічно

$$\varphi_i(h^+) = \delta_{i\bullet}^{\bullet n},\ f(x,h^+) = f(x,y)\big|_{y=h^+} = f^{\,j}(x)\varphi_i(h^+) = f^{\,j}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n}, \tag{16}$$

В рівняння потрапляють коефіцієнти компонент вектора переміщень $u^j(x)$, $v^j(x)$, які необхідно замінити моментами, оскільки в рівнянні (13) входять тільки моменти невідомих функцій. За правилами тензорної алгебри це формально виконується за допомогою операції опускання індексів $u^j(x) = g^{i\alpha}u_\alpha(x)$, $v^j(x) = g^{i\alpha}v_\alpha(x)$, а тоді

$$f^{\,j}(x)\delta_{j\bullet}^{\bullet 1} = g^{j\alpha} f_\alpha(x)\delta_{j\bullet}^{\bullet 1} = g^{1\alpha} f_\alpha(x) \tag{17}$$

$$f^{\,j}(x)\delta_{j\bullet}^{\bullet n} = g^{j\alpha} f_\alpha(x)\delta_{j\bullet}^{\bullet n} = g^{n\alpha} f_\alpha(x)$$

Тут використовуємо операцію заміни індексів. Виконуючи необхідні перетворення остаточно отримуємо:

$$\frac{du^*{}_i}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v^*{}_\alpha + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\sigma_{xi},$$

$$\frac{dv^*{}_i}{dx} = -b_{ij} g^{j\alpha} u^*{}_\alpha + \tau_{xyi}, \tag{18}$$

$$\frac{d\sigma_{xi}}{dx} = [k^{*-}{}_{yx}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k^{*+}{}_{yx}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n} g^{n\alpha}]u^*{}_\alpha + b_{ji} g^{\,j\alpha}\tau_{xy_\alpha} -$$
$$[q_{yx}^-(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} + q_{yx}^+(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n}] - [k^{*-}{}_{yx}(x)u^{*-}{}_c(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} + k^{*+}{}_{yx}(x)u^{*+}{}_c(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n}] - X_i,$$

$$\frac{d\tau_{xyi}}{dx} = [k^{*-}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k^{*+}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n} g^{n\alpha}]v^{*}_{\alpha} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} v^{*}_{\gamma} - $$
$$[q^{-}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} + q^{+}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n}] - [k^{*-}_{yy}(x)v^{*-}_{c}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} + k^{*+}_{yy}(x)v^{*+}_{c}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n}] - Y_i \, .$$

Тут $k^* = k/\mu$.

Система рівнянь не єдина в даному підході. Оскільки одновимірні невідомі компоненти вектора переміщень u та v та тензора напружень σ_x, τ_{xy}, то будемо цю систему називати рівняннями в моментах. Якщо ж для зниження вимірності вихідні рівняння скалярно помножити на елементи взаємного базису, то можна отримати редуковані рівняння в коефіцієнтах. Однак прийнятий в роботі підхід з позиції тензорної алгебри дозволяє отримати рівняння в коефіцієнтах безпосередньо з рівнянь в моментах (18) за допомогою операції піднімання індексів

$$f^{i}(x) = g^{ij} f_j(x). \qquad (19)$$

В результаті нескладних перетворень отримуємо:

$$\frac{du^{*i}}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ik} b_{k\alpha} v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_x{}^{i},$$

$$\frac{dv^{*i}}{dx} = -g^{ik} b_{k\alpha} u^{*\alpha} + \tau_{xy}{}^{i},$$

$$\frac{d\sigma_x{}^{i}}{dx} = [k^{*-}_{yx}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k^{*+}_{yx}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n} g^{n\alpha}]u^{*\alpha} + g^{i\beta} b_{\alpha\beta}\tau_{xy}{}^{\alpha} - \qquad (20)$$
$$[q^{-}_{yx}(x)g^{1\alpha} + q^{+}_{yx}(x)g^{n\alpha}] - [k^{*-}_{yx}(x)u^{*-}_{c}(x)g^{1\alpha} + k^{*+}_{yx}(x)u^{*+}_{c}(x)g^{n\alpha}] - X^{i} \, ,$$

$$\frac{d\tau_{xy}{}^{i}}{dx} = [k^{*-}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet 1} g^{1\alpha} + k^{*+}_{yy}(x)\delta_{i\bullet}^{\bullet n} g^{n\alpha}]v^{*\alpha} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} v^{*}_{\gamma} - $$
$$[q^{-}_{yy}(x)g^{1\alpha} + q^{+}_{yy}(x)g^{n\alpha}] - [k^{*-}_{yy}(x)v^{*-}_{c}(x)g^{1\alpha} + k^{*+}_{yy}(x)v^{*+}_{c}(x)g^{n\alpha}] - Y^{i} \, .$$

Має сенс використання рівняння мішаного виду. Розглянемо рівняння, в яких кінематичні невідомі (переміщення) розглядаються в коефіцієнтах, а статичні невідомі (напруження) – в моментах. В класичній теорії пластин та оболонок саме такі рівняння розглядаються, причому базисними функціями є дві функції поперечної координати $x^3 - \{1, x^3\}$. Моменти нульового порядку –

нормальні та дотичні сили, моменти першого порядку – згинальні і крутні моменти. В нашому випадку маємо:

$$\frac{du^{*i}}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ik} b_{k\alpha} v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} g^{i\alpha} \sigma_{x\alpha},$$

$$\frac{dv^{*i}}{dx} = -g^{ik} b_{k\alpha} u^{*\alpha} + g^{i\alpha} \tau_{xy_\alpha},$$

$$\frac{d\sigma_{xi}}{dx} = [k^{*-}_{yx}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet}\delta^{1\bullet}_{\bullet\alpha} + k^{*+}_{yx}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}\delta^{n\bullet}_{\bullet\alpha}]u^{*\alpha} + g^{i\beta} b_{\alpha\beta} \tau_{xy}{}^{\alpha} - [q^{-}_{yx}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet} + q^{+}_{yx}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}] - [k^{*-}_{yx}(x)u^{*-}_{c}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet} + k^{*+}_{yx}(x)u^{*+}_{c}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}] - X_i, \tag{21}$$

$$\frac{d\tau_{xy}{}^{i}}{dx} = [k^{*-}_{yy}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet}\delta^{1\bullet}_{\bullet\alpha} + k^{*+}_{yy}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}\delta^{n\bullet}_{\bullet\alpha}]v^{*\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha}\sigma_{x\alpha} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} v^{*}_{\gamma} - [q^{-}_{yy}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet} + q^{+}_{yy}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}] - [k^{*-}_{yy}(x)v^{*-}_{c}(x)\delta^{\bullet 1}_{i\bullet} + k^{*+}_{yy}(x)v^{*+}_{c}(x)\delta^{\bullet n}_{i\bullet}] - Y_i.$$

Граничні умови, які необхідні для знаходження єдиного розвязку рівнянь (18), (20) та (21) отримуємо на основі вихідних граничних умов на відрізках $x = 0$ та $x = l$. Ці умови бажано записати теж в загальній формі, яка буде включати всі традиційні граничні умови (рис. 2)

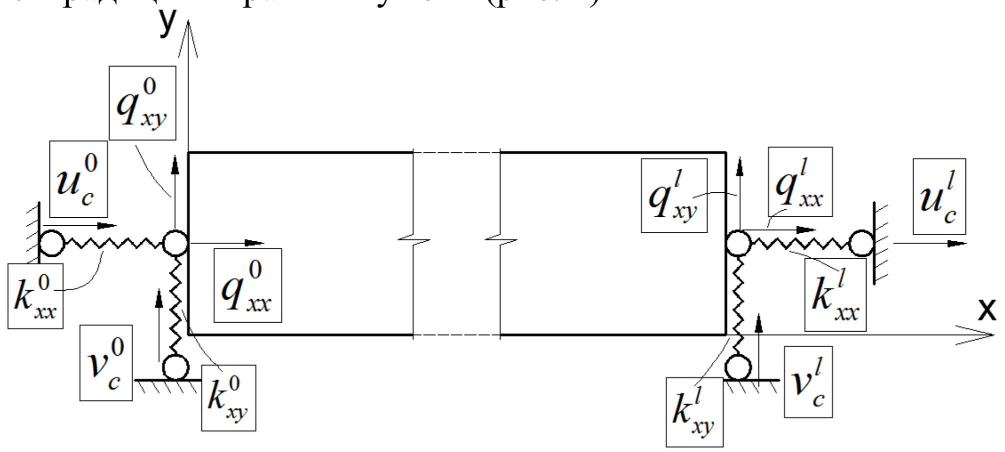

Рис. 2

З умов рівноваги на торцевих гранях знаходимо співвідношення:

При $x = 0$

$$k^{*0}_{xx} u^{*}(0,y) - \sigma_x(0,y) = k^{0}_{xx} u^{0}_{c}(y) + q^{0}_{xx}(y), \tag{22}$$

$$k^{*0}_{xx} v^{*}(0,y) - \tau_{xy}(0,y) = k^{0}_{xy} v^{0}_{c}(y) + q^{0}_{xy}(y),$$

При $x = l$

$$k^{*l}_{xx} u^*(l, y) - \sigma_x(l, y) = k^l_{xx} u^l_c(y) + q^l_{xx}(y),$$

$$k^{*l}_{xy} v^*(l, y) - \tau_{xy}(l, y) = k^l_{xy} v^l_c(y) + q^l_{xy}(y).$$

Важливо відзначити, що ці граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями, тому що вихідні рівняння є рівняннями в частинних похідних першого порядку. Ці обставини значно спрощують процедуру зниження вимірності.

Домножуючи ці рівняння на $\varphi_i(y)$ та інтегруючи, отримаємо також алгебраїчні рівняння в моментах:

При $x = 0$

$$k^{*0}_{xx} u^*{}_i(0) - \sigma_{x_i}(0) = k^0_{xx} u^0_{c\,i} + q^0_{xxi} \ ,$$

$$k^{*0}_{xx} v^*{}_i(0) - \tau_{xy_i}(0) = k^0_{xy} v^0_{c\,i} + q^0_{xy_i} ,$$

(23)

При $x = l$

$$k^{*l}_{xx} u^*{}_i(l) - \sigma_{xi}(l) = k^l_{xx} u^l_{ci} + q^l_{xxi} \ ,$$

$$k^{*l}_{xy} v^*{}_i(l) - \tau_{xy_i}(l) = k^l_{xy} v^l_{ci} + q^l_{xy_i} .$$

Домножуючи рівняння (22) на елементи взаємного базису $\varphi^i(y)$ та інтегруючи, отримаємо граничні умови в коефіцієнтах

При $x = 0$

(24)

$$k^{*0}_{xx} u^{*i}(0) - \sigma_x{}^i(0) = k^0_{xx} u^{0i}_c + q^{0\ i}_{xx} \ ,$$

$$k^{*0}_{xx} v^{*i}(0) - \tau_{xy}{}^{i}(0) = k^{0}_{xy} v^{0i}_{c} + q^{0\ i}_{xy} ,$$

При $x = l$

$$k^{*l}_{xx} u^{*i}(l) - \sigma_{x}{}^{i}(l) = k^{l}_{xx} u^{l\,i}_{c} + q^{l\ \ i}_{xx} ,$$

$$k^{*l}_{xy} v^{*i}(l) - \tau_{xy}{}^{i}(l) = k^{l}_{xy} v^{l\,i}_{c} + q^{l\ \ i}_{xy} .$$

Граничні умови для рівнянь мішаного типу можна отримати з умов (23) піднімаючи індекси у переміщень чи з умов (24), опускаючи індекс напружень.

Необхідно відзначити, що в таких індексах редуковані граничні умови значно ускладнюються. Якщо граничні умови в моментах (23) та коефіцієнтах (19) – це окремі рівняння для кожного значення індексів i, то граничні умови в мішаних невідомих є зв'язаними системами рівнянь, наприклад:

При $x = 0$

$$k^{*0}_{xx} u^{*i}(0) - g^{ij} \sigma_{x\,j}(0) = k^{0}_{xx} u^{0i}_{c} + q^{0\ i}_{xx} ,$$

$$k^{*0}_{xx} v^{*i}(0) - g^{ij} \tau_{xy\,j}(0) = k^{0}_{xy} v^{0i}_{c} + q^{0\ i}_{xy} ,$$

(25)

При $x = l$

$$k^{*l}_{xx} g_{ij} u^{*j}(l) - \sigma_{xi}(l) = k^{l}_{xx} u^{l}_{ci} + q^{l}_{xxi} ,$$

$$k^{*l}_{xy} g_{ij} v^{*j}(l) - \tau_{xy_i}(l) = k^{l}_{xy} v^{l}_{ci} + q^{l}_{xy_i} .$$

випадку рівняння зв'язані недіагональною матрицею коефіцієнтів $\{g_{ij}\}$ або $\{g^{ij}\}$.

Підсумовуючи наведене слід зазначити, що для розв'язання конкретних задач необхідно використовувати редуковані рівняння в моментах або в коефіцієнтах з відповідними граничними умовами. Коефіцієнти для переміщень та напружень мають простий фізичний зміст – це значення цих факторів на відповідній прямій і тому здавалось би, що необхідно використовувати редуковані рівняння в коефіцієнтах. Але у випадку зосереджених по поперечній координаті навантажень, які аналітично записують за допомогою дельта-функції Дірака, наприклад $X(x,y)=1\cdot\delta(y-y_0)$ апроксимується дельта-функція прийнятими базисними функціями досить складно, а от моменти цієї функції знаходяться дуже легко:

$$(\delta(y-y_0))_i=\int_{h^-}^{h^+}\delta(y-y_0)\varphi_i(y)dy=\varphi_i(y_0).$$

При використанні рівнянь в моментах після розв’язання редукованої граничної задачі необхідно знайти коефіцієнти розрахункових функцій за формулами, наведеними вище.

Література

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.

2. С. М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры: М 1957 – 476 с

Аннотация

В последнее время снижение размерности уравнений теории упругости выполняется с помощью математических методов аналитического и численного характера. В работе представлен численный метод - классический вариант метода «прямых» с применением обобщенного метода Бубнова-Галеркина-Петрова для построения расчетных уравнений. Как координатные функции используются кусочно-линейные финитные функции по поперечной координате. На основе данного подхода разработано 3 варианта редуцированных исходных уравнений: уравнение в коэффициентах, моментах и уравнения смешанного вида. Граничные условия моделируются с помощью стержней заданной жесткости, что позволяет рассматривать различные варианты граничных условий. Полученные редуцированные уравнения предлагается решать численно, с помощью метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова. Данный подход имеет большие перспективы для решения двух-и трехмерных задач статики и динамики.

Abstract

In recent times, reduce dimension elasticity equations is performed using mathematical analytical methods and numerical character. The paper presents a numerical method - the classical variant of the method of "direct" using the generalized method of Bubnov-Galerkin-Petrov for building clearing equations. As coordinate functions using piecewise linear functions on finite transverse coordinate. Based on this approach the 3 options reduced output equations: equation coefficients moment and equations of mixed species. Boundary conditions are simulated by rods given rigidity that prevents the creation of perimeter points. In excellent method of Bubnov-Galerkin method, the data now reduced equations solved numerically, using the method of discrete orthogonalization SK Godunov. This approach holds great promise for solving two-and three-dimensional problems of statics and dynamics.