УДК 624.042.8

Распопов О. С. , канд. техн. наук

СКІНЧЕНО-АВТОМАТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ НЕДИСИПАТИВНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Запропоновано універсальний аналітичний підхід, який дозволяє за допомогою скінчених автоматів моделювати вимушені просторові коливання континуальних недисипативних стержневих систем під дією періодичних зовнішніх сил

Постановка проблеми. Отримання точного рішення для просторових коливань стержневих систем з дійсним відображенням геометричних, жорсткісних та масових характеристик реальної конструкції суттєво ускладнюється та, як правило, приводиться тільки для простіших випадків [1, 2]. Тому, розробка та реалізація ефективних аналітичних алгоритмів описання та розрахунків вимушених просторових коливань стержневих систем є актуальними.

Аналіз останніх досліджень. Крім традиційних методів, які дозволяють досліджувати вільні та вимушені коливання таких систем, широко застосовуються топологічні методи [3], що встановлюють прямий взаємозв’язок структури розв’язуючих рівнянь зі структурою конструкції, яка розраховується.

До теперішнього часу існує багато публікацій, які присвячені застосуванню теорії скінчених автоматів до різних областей досліджень [4, 5]. З’явилась можливість використовувати лише логічні операції для рішення задач динаміки стержневих конструкцій. В роботі [6] викладена методика скінчено-автоматного моделювання вільних просторових коливань континуальних балок і рам.

Постановка задачі. Ціллю даної статті є застосування такого ж підходу до розрахунку вимушених коливань недисипативних стержневих систем з розподіленими параметрами під дією періодичних зовнішніх сил.

Основна частина. Представимо окремий стержень у вигляді скінченого автомату $A=\left(S, X, Z, f_z, f_s\right)$, де S , X , Z – скінчені множини станів, входів та виходів відповідно, а f_z та f_s – характеристичні функції [5]. Враховуючи, що під час вимушених коливань стержня необхідно вирішувати систему n неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими початковими параметрами x_k , $k=1$, 2, $\ldots$, n, то значення x_k можна визначати за правилом Крамера [7], яке виражається формулою

$$x_k = \frac{D_{zk}}{D_z}, \tag{1}$$

де D_z – визначник системи рівнянь $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, складений з коефіцієнтів лівої частини, тобто $D_z = \left|a_{ik}\right|_1^n$; D_{zk} – визначник, який отримується з D_z шляхом заміни елементів $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ k-го стовпця, який відповідає визначуваному невідомому, вільними членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Вираз для D_{zk} можна також представити у вигляді суми добутків алгебраїчного доповнення A_{ik} елемента a_{ik} у визначнику D_z на відповідні вільні члени:

$$D_{zk} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i \,, \tag{2}$$

де $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$; D_{ik} – мінор $(n-1)$-го порядку до елементу a_{ik}, який отримується з визначника D_z, якщо з нього викреслити i-у строку і k-й стовпець.

За допомогою скінчених автоматів побудова D_z зводиться до вибору елементів асоційованих матриць для окремих видів вільних коливань стержня та знаходженню функцій виходу f_z автомата A при визначених вхідних параметрах [6].

Аналогічний алгоритм, який дозволяє значно скоротити численні алгебраїчні операції, застосовується також для формування виразу D_{zk} під час періодичного зовнішнього впливу.

Якщо припустити, що початкові параметри стержня дорівнюють нулю та є зовнішні сила P_0 або момент M_0, які збурюють коливання та змінюються за законом синуса або косинуса з частотою ϖ, то очевидно, що ці зовнішні сили можуть бути прийняті за початкові силові параметри $N_r = P_0$, $M_r = M_0$ ($r = x$, y, z). В системі скінчених автоматів ця дія означає присвоєння збуреним параметрам N_r, M_r довільного значення (1), а невідомим граничним параметрам, що визначаються – фіксованого значення (0). Таким чином, змінюючи відповідні коди вхідних параметрів автомату A, можна формальним шляхом за допомогою асоційованих матриць будувати вирази D_{zk} у формі (2). По суті, виконанню операцій над функціями f_z будуть відповідати операції над двоїчними величинами, тобто булевими функціями.

Обмеження на вході для автомату A, який описує вимушені просторові коливання, будуть дещо іншими в порівнянні з обмеженнями, які прийняті для того же автомату, який моделює вільні коливання стержня. Основна відмінність полягає в тому, що можливі комбінації граничних умов на кожному з кінців стержня можуть містити різну кількість фіксованих та довільних параметрів, хоча загальна їх кількість для всього автомату A буде залишатися однаковою. В цьому випадку, вхідні послідовності всіх значень булевих функцій початкових (НП) та кінцевих (КП) граничних параметрів можуть бути також реалізовані на множинах $\{0,0,0,1\}$ та $\{1,1,1,0\}$ для згинальних коливань стержня у площинах xy та xz, і $\{0,1\}$ – для поздовжніх та крутильних коливань.

Виходячи з цього, всі вихідні послідовності також будуть складатися з визначників мінорів більш високого порядку k, які породжуються матрицею впливу початкових параметрів $M_в$ порядку n [6].

Визначимо елементи матриці можливих станів виходу автомату A для просторових коливань стержня шляхом розкриття частотних визначників з мінорів 8-го порядку та представимо їх вирази f_z у складі асоційованої блочної матриці R_{xyz}. Під час формування структури цієї матриці зручно використовувати каскадний алгоритм її розподілу на блоки та відповідну ідею каскадного кодування станів [4].

$$R_{xyz} = \left\| \begin{array}{c:c} R_{11} & R_{12} \\ \hdashline R_{21} & R_{22} \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Виразимо підматриці R_{ij} (i, $j = 1,\ 2$) у вигляді добутку елементів a_{ij} асоційованої матриці M_{xu} для поздовжніх коливань та блочної матриці R_{nk} (n, $k = 1,\ 2$)

$$R_{ij} = \left\| a_{ij} R_{nk} \right\|_1^2. \tag{4}$$

В свою чергу, R_{nk} також можна представити добутком елементів b_{nk} асоційованої матриці $M_{x\phi}$ для крутильних коливань та блочної матриці R_{mp}

$$R_{nk} = \left\| b_{nk} R_{mp} \right\|_1^2. \tag{5}$$

Елементи a_{ij} та b_{nk} матриць M_{xu} та $M_{x\phi}$ розташуємо у відповідності до вхідних параметрів $\{u_x, N_x\}$ та $\{\phi_x, M_x\}$ кодів НП та КП стержня і представимо в табл. 1.

Тут, з урахуванням прийнятих позначень [6], $r = x$, $\varepsilon = \alpha$ для M_{xu} та $r = k$, $\varepsilon = \beta$ для $M_{x\phi}$.

Для R_{mp} можна записати:

$$R_{mp} = \left\| c_{mp} M'_{xz} \right\|_1^4 , \qquad (6)$$

де c_{mp} $(m,\ p = 1,\ \ldots,\ 4)$ – елементи асоційованої матриці M'_{xy} для згинальних коливань стержня у площині xy; M'_{xz} – аналогічна матриця для коливань у площині xz з елементами d_{gh} $(g,\ h = 1, \ldots, 4)$.

Таблица 1

НП \ КП	01	10
10	$\cos\lambda_r$	$-\varepsilon\lambda_r \sin\lambda_r$
01	$\dfrac{1}{\varepsilon\lambda_r}\sin\lambda_r$	$\cos\lambda_r$

Матриці M'_{xy} та M'_{xz} з вхідними параметрами $\{u_y, \phi_z, M_z, N_y\}$ та $\{u_z, \phi_y, M_y, N_z\}$ у вигляді кодів НП та КП та відповідні їм елементи c_{mp} та d_{gh} з функціями Крилова представлені в табл. 2.

Таблиця 2

НП \ КП	0111 0001	1011 0010	1101 0100	1110 1000
1000 1110	S_e	$\dfrac{\lambda_r}{l}V_e$	$\dfrac{EJ_s\lambda_r^2}{l^2}U_e$	$\dfrac{EJ_s\lambda_r^3}{l^3}T_e$
0100 1101	$\dfrac{l}{\lambda_r}T_e$	S_e	$\dfrac{EJ_s\lambda_r}{l}V_e$	$\dfrac{EJ_s\lambda_r^2}{l^2}U_e$
0010 1011	$\dfrac{l^2}{EJ_s\lambda_r^2}U_e$	$\dfrac{l}{EJ_s\lambda_r}T_e$	S_e	$\dfrac{\lambda_r}{l}V_e$
0001 0111	$\dfrac{l^3}{EJ_s\lambda_r^3}V_e$	$\dfrac{l^2}{EJ_s\lambda_r^2}U_e$	$\dfrac{l}{\lambda_r}T_e$	S_e

В табл. 2 $e = 1$, $r = y$, $s = z$ для асоційованої матриці M'_{xy} та $e = 2$, $r = z$, $s = y$ – для M'_{xz}.

Аналіз станів автомату A показує, що деякі з них будуть еквівалентними (сумісними), тобто при різних вхідних послідовностях на множинах $\{0,1,1,1\}$ та $\{1,0,0,0\}$ виводяться однакові вихідні послідовності. Згідно [5], для автоматів, які мають еквівалентні стани, можуть бути отримані мінімальні (скорочені) форми $\breve{A}$ шляхом об’єднання однаково позначених станів до одного стану. Така процедура дозволяє спростити розрахунок та суттєво знизити порядок матриці R_{xyz}. Так, у загальному випадку просторових коливань, порядок R_{xyz} зменшується в чотири рази від 256 до 64 та, відповідно, кількість станів – в 16 разів. Тому матрицю R_{xyz} можна також представити у вигляді кодованої асоційованої матриці 64-го порядку з множиною станів $S_k = 4056$ та повним набором функцій виходу f_z.

Множини всіх можливих станів вібруючого стержня S_k та S_0, які характеризуються елементами D_{zk} та D_z, будуть залежати від кількості сполучень кодів граничних параметрів для кожного з видів просторових коливань. Так, величина S_k включає 16×16 станів для згинальних коливань в площинах xy і xz та 4×4 – для поздовжніх та крутильних коливань, тобто всього 4096 станів, тоді як кількість станів S_0 буде дорівнювати 20736 [6]. Внаслідок цього таблиці переходів та вирази для D_{zk} отримуються, як правило, більш простими, ніж для D_z. В цілому, загальна кількість станів S автомату A визначається добутком S_k та S_0.

Висновки та перспективи подальших досліджень. З проведеного аналізу виходить, що застосування скінчених автоматів суттєво спрощує та систематизує динамічні розрахунки. Очевидно, що представляє інтерес дослідження можливих станів стержня як частини складної системи, а також вивчення особливостей моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінчених автоматів.

1. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т. I: Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. –М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. –М.: Наука, 1968. 560 с.
3. *Филин А. П.* Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. - Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
4. Булева алгебра и конечные автоматы / Под ред. Ж. Кунцмана и П. Наслена. Перевод с французского. –М.: Мир, 1969. 296 с.
5. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов: Пер. с нем. –М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
6. *Распопов А. С.* Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций. Вестник Днепр. нац. ун-та жел. дор. тр-та. Выпуск 19. –Дн-вск, 2007. с. 86–94.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 4-е изд. –М.: Наука, 1988. 552 с.