УДК 531.31

Гончаренко М.В., канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ В ЗОНАХ КОМБІНАЦІЙНИХ РЕЗОНАНСІВ ПРИ СТОХАСТИЧНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Динамічне навантаження часто являється визначальним при проектуванні будівель і споруд. При вивченні еволюції динамічних станів при зміні зовнішніх впливів важливою проблемою є дослідження стійкості цих станів. Зокрема при параметричному динамічному навантаженні конфігурація зон стійкості має складний вигляд, а резонанси, що збуджуються, іноді важко прогнозуються.

Дослідження динаміки систем при стохастичному навантаженні мають значно меншу довершеність в порівнянні з подібними задачами при детермінованому навантаженні. Хоч випадковий характер є досить розповсюджений у динамічних процесах. При стохастичному параметричному навантаженні можуть проявлятися різні типи коливань, що характеризуються складними резонансами, зривом коливальних режимів, іншими ефектами.

Природним узагальненням періодичного параметричного впливу є модель стаціонарного випадкового впливу. Спочатку виникає проблема вибору визначення стійкості динамічних станів стохастичних систем. Найбільш поширеними є два визначення стійкості: стійкість відносно моментних функцій та стійкість по імовірності. Перше визначення дещо відрізняється від традиційного визначення стійкості, але за допомогою такого підходу можна в першому наближенні оцінити динамічну стійкість досить широкого класу об’єктів. Визначення стійкості по імовірності ближче до класичного визначення динамічної стійкості в детерміністичній постановці. Однак побудова областей за цим визначенням є складною задачею. Повною мірою таке дослідження може бути здійснене тільки для модельних задач.

Відомо [2], що в зонах простих параметричних резонансів критерій стійкості відносно моментних функцій більш жорсткий, ніж критерій стійкості по імовірності. У даній роботі проводиться порівняння умов динамічної стійкості у зонах комбінаційних резонансів.

Нехай дискретна модель деякої континуальної системи, побудована, наприклад, методом скінченних елементів, записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathrm{M}\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}+C\frac{d\bar{u}}{dt}+\mathrm{K}_0\bar{u}+\psi(t)\mathrm{K}_G\bar{u}=0\,, \qquad (1)$$

де $\bar{u}(t)$ – n-мірний вектор-стовпець з координатами $u_i(t)$; M – матриця мас; C – матриця демпфірування; K – матриця жорсткості; K_g – матриця геометричної жорсткості; $\psi(t)$ – стаціонарний випадковий процес. За допомогою методу нормальних координат від системи (1) робиться перехід до системи рівнянь у нормальних координатах:

$$\ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\mu\psi(t)\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\,y_k(t)=0\,,\quad (i=1,2,...,n),\qquad (2)$$

де $\bar{y}(t)=\{y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)\}^T$ – вектор узагальнених координат; ξ_i $(i=1,2,...,n)$ – модальні параметри згасання; ω_{0i} $(i=1,2,...,n)$ – частоти власних коливань системи; μ - інтенсивність параметричного навантаження; $\{g_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ - компоненти перетвореної матриці геометричної жорсткості.

Пряме застосування методу усереднення при побудові границь динамічної стійкості системи (2) пов’язане зі значними принциповими й технічними труднощами. Спрощення задачі може бути пов’язане з типом стаціонарного процесу $\psi(t)$. Якщо цей процес достатньо вузькосмуговий відносно пружної системи, що розглядається, то при побудові меж динамічної стійкості мають місце певні спрощення.

Якщо ненульові значення спектральної щільності $S(\omega)$ випадкового процесу $\psi(t)$ розташовані у смузі $\left(\omega_0-\dfrac{\Delta\omega}{2},\omega_0+\dfrac{\Delta\omega}{2}\right)$, де ω_0 - несуча частота, $\Delta\omega$ - достатньо мале число, то в першому наближенні зони динамічної нестійкості визначаються такими двома випадками [2].

1. При $\omega_0=2\omega_{0i}$ (простий головний резонанс)

$$\ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\mu_2\psi(t)g_{ii}\,y_i(t)=0\,,\qquad (i=1,2,...,n).\qquad (3)$$

2. При $\omega_0=\omega_{0i}+\omega_{0j}$ та $g_{ij}\cdot g_{ji}>0$ (комбінаційний резонанс сумарного типу) або $\omega_0=\left|\omega_{0i}-\omega_{0j}\right|$ та $g_{ij}\cdot g_{ji}<0$ (комбінаційний резонанс різниці частот)

$$\begin{gathered}\ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\mu_2\psi(t)\left[g_{ii}\,y_i(t)+g_{ij}\,y_j(t)\right]=0\,,\\ \ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\mu_2\psi(t)\left[g_{ji}\,y_i(t)+g_{jj}\,y_j(t)\right]=0\,,\qquad (4)\\ (i,\,j=1,2,...,n)\,.\end{gathered}$$

Для першого випадку відомо [2], що умова динамічної стійкості відносно моментних функцій забезпечує подвійний запас по відношенню до межі стійкості по імовірності.

Досліджується комбінаційний резонанс сумарного типу, тобто вважається, що несуча частота ω_0 спектральної щільності $S(\omega)$ випадкового параметричного збудження $\mu\psi(t)$ задовольняє умові $\omega_0 = \omega_{0i} + \omega_{0j}$.

Розглядається система рівнянь (4). Динамічні змінні зображується у полярних координатах

$$y_i(t) = A_i(t)\cos\theta_i(t),\ y_j(t) = A_j(t)\cos\theta_j(t), \tag{5}$$

де $A_i(t)$, $A_j(t)$ – амплітуди коливального руху; $\theta_i(t)$, $\theta_j(t)$ – фази коливального руху.

Вважається, що фази $\theta_i(t)$ та $\theta_j(t)$ зображуються у вигляді

$$\theta_i(t) = \omega_{0i}t + \chi_i(t),\ \theta_j(t) = \omega_{0j}t + \chi_j(t), \tag{6}$$

де $\chi_i(t)$, $\chi_j(t)$ - початкові фази. У виразах (5) та (6) функції $A_i(t)$, $A_j(t)$, $\chi_i(t)$ та $\chi_j(t)$ вважаються повільними змінними.

Виходячи із зображення (5), заміна змінних у методі усереднення задається перетворенням фазових координат $y_i(t), \dot{y}_i(t), y_j(t), \dot{y}_j(t)$, $(i = 1,2,...,n)$ системи (4):

$$\begin{aligned} &y_i(t) = A_i(t)\cos\theta_i(t), && y_j(t) = A_j(t)\cos\theta_j(t),\\ &\dot{y}_i(t) = -\omega_{0i}A_i(t)\sin\theta_i(t), && \dot{y}_j(t) = -\omega_{0j}A_j(t)\sin\theta_j(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Ця заміна змінних приводить систему (4) до системи рівнянь у стандартній формі відносно амплітуд та початкових фаз:

$$\begin{aligned} &\dot{A}_i = -2\xi_i\omega_{0i}A_i\sin^2\theta_i + \mu_2\psi(t)\left[g_{ii}A_i\cos\theta_i\sin\theta_i + g_{ij}A_j\cos\theta_j\sin\theta_i\right],\\ &\dot{\theta}_i = -2\xi_i\omega_{0i}\cos\theta_i\sin\theta_i + \frac{1}{a_i}\mu_2\psi(t)\left[g_{ii}A_i\cos\theta_i\sin\theta_i + g_{ij}A_j\cos\theta_j\sin\theta_i\right],\\ &\dot{A}_j = -2\xi_j\omega_{0j}A_j\sin^2\theta_i + \mu_2\psi(t)\left[g_{ji}A_i\cos\theta_i\sin\theta_j + g_{jj}A_j\cos\theta_j\sin\theta_i\right],\\ &\dot{\theta}_j = -2\xi_j\omega_{0j}\cos\theta_j\sin\theta_j + \frac{1}{a_j}\mu_2\psi(t)\left[g_{ji}A_i\cos\theta_i\cos\theta_j + g_{jj}A_j\cos^2\theta_{ji}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Далі вводяться нові змінні $V_i(t)=A_i^2(t)$, $V_j(t)=A_j^2(t)$. Відносно цих змінних будується система вкорочених стохастичних рівнянь у розумінні Стратоновича. При цій побудові мається на увазі, що при обчисленні флуктуаційних поправок до коефіцієнтів знесення у формулі враховуються лише складові, що відповідають похідним по θ_i, і не враховуються похідні по $V_i(t)$.

У зв'язку з цим перетворенням (8) визначається двома частотами ω_{0i} та ω_{0j}, при визначенні операції усереднення вкорочених стохастичних рівнянь постає питання спільного періоду. Вважається, що існують цілі числа n_1 і n_2, такі, що $n_1\omega_{01}\cong n_2\omega_{02}$. Тоді можна показати, що по коливаннях по двох різних степенях вільності система буде мати спільний період $T=n_1T_2+n_2T_1$, де $T_i=\dfrac{2\pi}{\omega_i}$. Після усереднення за період T записується вкорочені рівняння в розумінні Стратоновича відносно $V_i(t)$.

Якщо після цього перейти, згідно [2], до вкорочених рівнянь у розумінні Іто і застосувати операцію статистичного усереднення, то можна отримати систему детерміністичних рівнянь першого порядку відносно середніх від квадратів амплітуд:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\langle V_1\rangle\\ \langle V_2\rangle\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2\xi_i\omega_i+\frac{1}{2}g_{ii}^2S(2\omega_i)+\frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^- & \frac{1}{4}g_{ij}^2S^+\\ \frac{1}{4}g_{ji}^2S^+ & -2\xi_j\omega_j+\frac{1}{2}g_{jj}^2S(2\omega_j)+\frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^-\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\langle V_1\rangle\\ \langle V_2\rangle\end{bmatrix}, \tag{9}$$

де $S^{\pm}=S(\omega_i+\omega_j)\pm S(\omega_i-\omega_j)$.

Система (9) є автономною. Стійкість тривіального розв'язку цієї системи повністю визначається властивістю коренів її характеристичних рівнянь:

$$\det\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}-2\xi_i\omega_i+0.5g_{ii}^2S(2\omega_i)+\\ +0.25g_{ij}g_{ji}S^-\end{pmatrix}-\lambda & 0.25g_{ij}^2S^+\\ 0.25g_{ji}^2S^+ & \begin{pmatrix}-2\xi_j\omega_j+0.5g_{jj}^2S(2\omega_j)+\\ +0.25g_{ij}g_{ji}S^-\end{pmatrix}-\lambda\end{bmatrix}=0. \tag{10}$$

Таким чином, задача дослідження стійкості в середньоквадратичному системи (4) зводиться до задачі на власні значення (10). Обчислюються власні значення λ_i при збільшенні інтенсивності випадкового навантаження μg_{ij}. Найменше значення μg_{ij}, при якому серед власних значень λ_i з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості. В координатах несуча частота ω – інтенсивність випадкового параметричного навантаження μg_{ij} будується межа стійкості в зоні комбінаційного резонансу.

Дослідження стійкості по ймовірності тривіального рішення системи (4) базується на тому, що всі коефіцієнти рівнянь руху однорідні функції першого порядку і тому проекція процесу вектора амплітуд на коло також представляє собою марковський процес. Вводяться нові змінні

$$\rho = \frac{1}{2}\ln\left(a_1^2 + a_2^2\right),\quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_2}{a_1}\right),\quad 0 \le \phi \le \frac{1}{2}\pi$$

і записуються наступні рівняння Іто відносно ρ і ϕ:

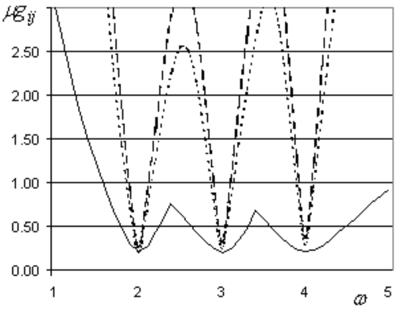
$$\begin{aligned} d\rho &= Q(\phi)dt + \Sigma(\phi)dw, \\ d\phi &= \Phi(\phi)dt + \Psi(\phi)dw, \end{aligned} \tag{11}$$

де $w(t)$ – вінерівський процес з одиничною інтенсивністю, і

$$\begin{aligned}
&Q(\phi) = \lambda_1\cos^2\phi + \lambda_2\sin^2\phi \pm \frac{1}{8}k^2 S^- + \Psi^2(\phi),\\
&\Phi(\phi) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\sin 2\phi + \frac{1}{2}b_1\sin 4\phi + \frac{1}{8}k^2 S^+\cot 2\phi,\\
&\Sigma^2(\phi) = (\lambda_1 + \beta_1)\cos^4\phi + (\lambda_2 + \beta_2)\sin^4\phi + \frac{1}{8}k^2 S(\omega_1 \pm \omega_2)\sin^2 2\phi,\\
&\Psi^2(\phi) = \frac{1}{8}k^2 S^+ + b_1\sin^2 2\phi,\\
&\lambda_1 = -\beta_1 + \frac{1}{8}k_{11}^2 S(2\omega_1),\quad \lambda_2 = -\beta_2 + \frac{1}{8}k_{22}^2 S(2\omega_2),\\
&b_1 = \frac{1}{8}\left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1 + \beta_2) - k^2 S(\omega_1 \pm \omega_2)\right].
\end{aligned} \tag{12}$$

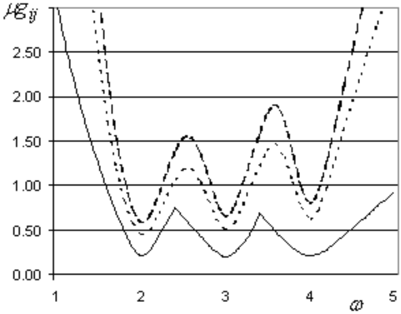
На основі першого рівняння (12) можна отримати умову асимптотичної стійкості з ймовірністю одиниця:

$$\lambda = E[Q(\phi)] = \int_0^{\pi/2} Q(\phi)\, p(\phi)\, d\phi < 0. \tag{13}$$



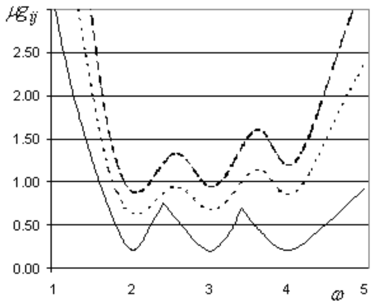
а

$\omega_1 = 1$ рад/с; $\omega_2 = 2$ рад/с; $\xi = 0{,}05$;
$k = 0{,}01$; $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$



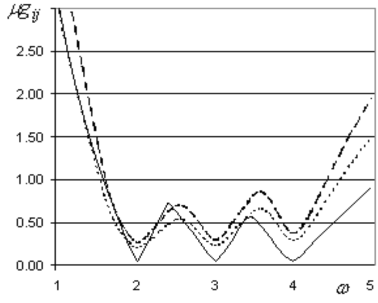
б

$\omega_1 = 1$ рад/с; $\omega_2 = 2$ рад/с; $\xi = 0{,}05$;
$k = 0{,}05$; $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$



в

$\omega_1 = 1$ рад/с; $\omega_2 = 2$ рад/с; $\xi = 0{,}05$;
$k = 0{,}1$; $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$



г

$\omega_1 = 1$ рад/с; $\omega_2 = 2$ рад/с; $\xi = 0{,}01$;
$k = 0{,}01$; $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$

Рис.1. Межі областей стійкості

Якщо величина λ_i, що визначена відповідно (13), додатня, то система нестійка [3]. Умова динамічної стійкості має наступний вигляд

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\coth\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\Delta_0)^{1/2}}\alpha_1\right]\right\} + \frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^-, \quad (b_1 > 0),$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\coth\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(-\Delta_0)^{1/2}}\alpha_2\right]\right\} + \frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^- \quad (b_1 < 0), \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\coth\left[\frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{|k_{12}k_{21}|S^+}\right]\right\} + \frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^- \quad (b_1 = 0),$$

де

$$\alpha_1 = \operatorname{arch}\left(\frac{K}{2|k_{12}k_{21}|S^+}\right), \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{K}{2|k_{12}k_{21}|S^+}\right),$$

$$K = k_{11}^2 S(2\omega_1) + k_{22}^2 S(2\omega_2) \mp 2k^2 S^-, \quad \Delta_0 = \frac{1}{64}\left[K^2 - 4k^4 (S^+)^2\right].$$

На основі наведених формул побудовані області стійкості при різних характеристиках параметричного навантаження.

На рисунку суцільною лінією показана межа стійкості при гармонічному параметричному навантаженні, пунктирною – по імовірності, штриховою – відносно моментних функцій. Як видно, незалежно від параметрів випадкового навантаження і параметра затухання межа стійкості відносно моментних функцій знаходиться вище за межу стійкості по імовірності, отже є більш жорсткою умовою. Але щоб повністю проаналізувати таку залежність, потрібно проводити подальші дослідження.

Можна зробити попередній висновок, що задавши як критерій проектування межу стійкості в середньоквадратичному, проектувальник забезпечує деякий запас відносно межі стійкості по імовірності.

1. *Ворчак М.В.* Параметричний резонанс в задачах про коливання труб при випадкових пульсаціях тиску внутрішнього потоку // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 71. — К.: КНУБА, 2002. — С. 107-114.
2. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
3. *Ariaratnam S.T., Wei-Chau* Lyapunov Exponents and Stochastic Stability of Two-Dimensional Parametrically Excited Random Systems // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1993. – №60(3). – Pp.667-682.

Надійшло до редакції 13.12.2006 р.