

УДК 531.31

Дехтярюк Є.С., проф., д.т.н.
Гончаренко М.В.**ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСІВ
КОМБІНОВАНОЇ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ**

Викладений в [2] підхід застосовується для аналізу динамічної стійкості споруди, яка представлена на рис. 1 [3]. Задача формулюється таким чином. Розглядається два види параметричного збудження, яке діє на споруду: гармонійне збудження і сума гармонійного і випадкового збудження. Якщо при певних параметрах додаткового випадкового навантаження область динамічної стійкості, що відповідає випадковому збудженню, ширше області динамічної стійкості, що відповідає детермінованому збудженню, то має місце ефект стабілізації, обумовлений додатковим стохастичним навантаженням. Якщо ж навпаки – ширше область стійкості при детермінованому навантаження, має місце ефект дестабілізації.

Для розміщення технологічного устаткування, його обслуговування і ремонту в промислових будівлях влаштовують робочі площадки, які складаються з настилу і підтримуючих його балок, а також огороження і сходів. Дуже часто верстатне обладнання, що знаходиться на цих площадках, створює динамічну дію. Так, наприклад, експериментальні дослідження, що наведені в [4], показують, що при роботі різних типів верстатів, таких як ткацькі верстати, карусельні установки та ін., частоти стохастичних вібрацій, що генеруються, можуть розташовуватися в широкому діапазоні – від 233,8 об/хв. до 1315,68 об./хв.

Кожній власній частоті ω_i відповідає певна форма коливань. Деякі з них обумовлені значною мірою коливаннями окремих елементів споруди. Нижче розглядаються саме такі випадки. Так, частотам $\omega_i \cong 98$ рад/с відповідають коливання опорних колон (умови закріплення кінців – нерухомі шарніри [4]). В першому наближенні рівняння, що описує динамічну стійкість колони, може бути представлене рівнянням типу

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + (\omega_i^2 + k_{ii}^g (\mu \cos \nu t + f(t)))x_i = 0, \quad (1)$$

де логарифмічний декремент коливань для споруд подібного типу

$$\delta = 0.085 [1], \text{ відповідно } \xi = \frac{\delta}{2\pi} = 0.0135.$$

Параметричне навантаження $N(t)$ для колони складається з статичної складової N_0 , що обумовлена вагою настилу, балок і обладнання, гармонійної та динамічної складових $f(t)$, що виникають внаслідок роботи верстатів:

$$N(t) = N_0 + \mu \cos \nu t + f(t). \quad (2)$$

При наявності статичного стискаючого зусилля зміниться частота колони. Власна частота з врахуванням повздовжньої сили N_0

$$\omega_i = \omega_i \sqrt{1 - \frac{N_0}{N^*}} = 72 \text{ рад/с}, \quad (3)$$

де $N^* = -\frac{\omega_i^2}{k_{ii}^g} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ - критична сила, при якій відбувається статична втрата стійкості.

Приймається, що $f(t)$ - центрований стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha |\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha |\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2. \quad (4)$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

Області динамічної нестійкості в зоні простого головного резонансу наведені на графіках рис. 3. Суцільною лінією показані межі стійкості при гармонійному параметричному навантаженні. Інші графіки відповідають випадку, коли в параметричному навантаженні присутня стохастична складова.

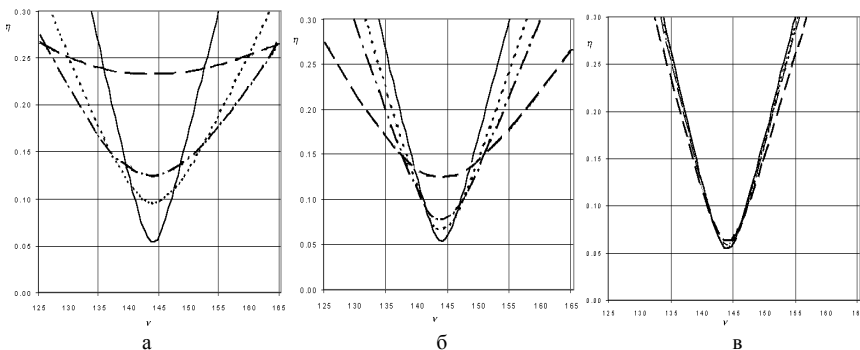


Рис. 3. Области стійкості

Области нестійкості будуються в координатах (η, ν) , де $\eta = k_{11}^g \mu$ - інтенсивність, ν - частота гармонійного навантаження. На рис. 3,а межі стійкості в зоні головного резонансу $2\tilde{\omega}_1$ побудовані для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 10$ рад/с, тобто прихована частота випадкового процесу відрізняється від подвоєної першої власної частоти колони $2\tilde{\omega}_1 = 144$ рад/с. Стандарт стохастичного навантаження σ прийнятий 10% від значення N_0 . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції $\alpha = 2\tilde{\omega}_1$, штрихпунктирною – при $\alpha = 0.5\tilde{\omega}_1$, пунктирною – при $\alpha = 0.25\tilde{\omega}_1$. Виходячи з рис. 3,а можна зробити такий висновок: при прийнятій частоті прихованої періодичності має місце ефект стабілізації. Причому при збільшенні радіуса кореляції збільшується стабілізуюча дія додаткового випадкового навантаження. На рис. 3, б аналогічним чином показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 20$ рад/с. Ці графіки підтверджують висновок, зроблений вище. При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 3, в, де показані межі стійкості при $\theta = \tilde{\omega}_1 \approx 72$ рад/с, а при $\theta = 100$ рад/с, 144 рад/с ($2\tilde{\omega}_1$)... графіки практично не відрізняються один від одного. З наведеного вище в даному випадку можна зробити загальний висновок, що додаткова дія стохастичного параметричного навантаження не збільшує зони нестійкості.

Тепер розглянемо області стійкості в зоні комбінаційного резонансу. В першому наближенні такому випадку відповідатимуть коливання за двома ступенями свободи, наприклад, балка з розподіленим навантаженням.

Як правило сталевий настил жорстко прикріплений до балок і забезпечує їх загальну стійкість незалежно від параметрів зовнішнього навантаження. Якщо з конструктивних міркувань в споруді, що розглядається, мають місце окремо розташовані ригелі, то може виникати проблема втрати стійкості плоскої форми згину при динамічному навантаженні типу (2).

Як відомо, якщо тонка та висока балка вигинається в головній площині найбільшої жорсткості, то плоска форма згину за критичним навантаженням стає нестійкою і відбувається випучування балки. Така втрата стійкості при навантаженні двома моментами в площині найбільшої жорсткості розглядалась в [2]. В даному випадку вага настилу і обладнання моделюється рівномірно розподіленим навантаженням, що має сталу і перемінну складові. Опирання, як зазначено в [3], можна прийняти шарнірним.

Система рівнянь динамічної стійкості при гармонійному навантаженні в цьому випадку має вигляд

$$\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \tilde{C} \frac{d\bar{x}}{dt} + (\tilde{K} + \mu \tilde{K}_g \cos vt) \bar{x} = 0. \quad (5)$$

де $\bar{x} = (u, \varphi)^T$, u і φ - відповідно горизонтальне і кутове переміщення середнього перерізу балки при втраті стійкості; $\tilde{M} = \frac{m\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$ - матриця мас, m і ℓ - погонна маса та розрахункова довжина балки, ρ - радіус інерції; \tilde{K} та \tilde{K}_g - матриці жорсткості та геометричної жорсткості, що відповідно дорівнюють

$$\tilde{K} = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} EI \frac{\pi^4}{\ell^4} & 0 \\ 0 & EI_\omega \frac{\pi^4}{\ell^4} + GI_k \frac{\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_g = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) & a \end{bmatrix},$$

EI - жорсткість на згин, GI_k - жорсткість при крученні, EI_ω - секторіальна жорсткість, $a = h/2$ - відстань від осі балки до місця прикладення навантаження.

Власні частоти такої балки без врахування навантаження можна обчислити за формулами

$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_k = \frac{\pi}{\rho \ell} \sqrt{\frac{GI_k \ell^2 + \pi^2 EI \omega}{m \ell^2}}. \quad (6)$$

Якщо параметричне навантаження має сталу складову q_0 , гармонійну $\mu \cos \omega t$ і стохастичну $\varphi(t)$ складові, то система рівнянь (5) набуде вигляду

$$\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \tilde{C} \frac{d \bar{x}}{dt} + \tilde{K} \bar{x} + \tilde{K}_g [q_0 + \mu \cos \omega t + \varphi(t)] \bar{x} = 0. \quad (7)$$

Для того, щоб записати систему у вигляді (14), потрібно перейти до нових перемінних $\bar{z} = (z_1, z_2)^T$

$$\bar{x}(t) = \Lambda \bar{z}(t), \quad (8)$$

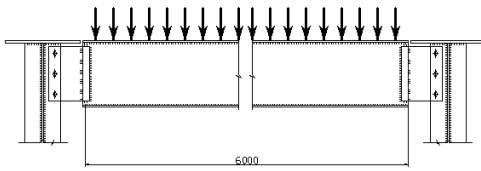
де $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$ - матриця, що утворена з ортонормованих власних

векторів задачі $\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + (\tilde{K} + \tilde{K}_g q_0) \bar{x} = 0$. Відносно нових змінних система матиме вигляд

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} + \tilde{C}^* \frac{d \bar{z}}{dt} + \tilde{K}^* \bar{z} + \tilde{K}_g^* (\mu \cos \omega t + \varphi(t)) \bar{z} = 0, \quad (9)$$

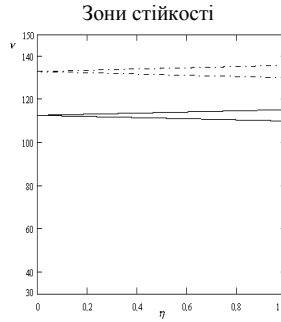
де

$$\begin{aligned} \tilde{C}^* &= \Lambda^T \tilde{C} \Lambda, \\ \tilde{K}^* &= \Lambda^T (\tilde{K} + f_0 \tilde{K}_g) \Lambda = \text{diag}(\tilde{\omega}_i^2), \\ \tilde{K}_g^* &= \Lambda^T \tilde{K}_g \Lambda. \end{aligned}$$



$$\omega_1 = 46.148 \text{ рад / с}, \quad \omega_k = 65.873 \text{ рад / с}, \\ q_0 = 30.86 \text{ кН / м}$$

а



б

Рис. 4. Балка настилу

На рис. 4 показана балка настилу (двотавр №35), для якої наведені частоти і рівномірно розподілене навантаження [3]. Межі динамічної стійкості при гармонійному параметричному збудженні для такої балки показані на рис. 4,б). Межі областей динамічної стійкості побудовані в координатах (ν, η) , де ν - частота, η - інтенсивність гармонійного навантаження, що для простого резонансу визначається виразом $k_{ii}^g \mu$, для комбінаційного – $\mu \sqrt{k_{ij}^g k_{ji}^g}$. Штрих пунктирна лінія обмежує зону нестійкості простого резонансу по крутильній частоті, суцільна лінія – комбінаційного резонансу. Можливість виникнення простих резонансів згідно формули (4) визначається структурою матриці \tilde{K}_g . Як показано вище $k_{11}^g = 0$, отже по першій частоті простий параметричний резонанс виникнути не може. З фізичної точки зору дане навантаження (рис. 4,а) не являється параметричним по відношенню до деформацій згину. Як видно з графіків, зони нестійкості балок настилу досить вузькі і розташовані далеко одна від одної, тому не спричинять небезпечних ситуацій і подальшого аналізу не потребують.

Інша ситуація має місце при дослідженні динамічної стійкості головної балки, конструкція якої представлена на рис. 5. Навантаження, наведене в [3], обчислене при наявності жорсткого настилу. Оскільки розглядається випадок самостійної роботи балки, виникає необхідність розрахунку на стійкість і задане навантаження буде за межею стійкості. Для колони стала складова становила 46% від критичного значення, це саме процентне відношення і прийємо для балки.

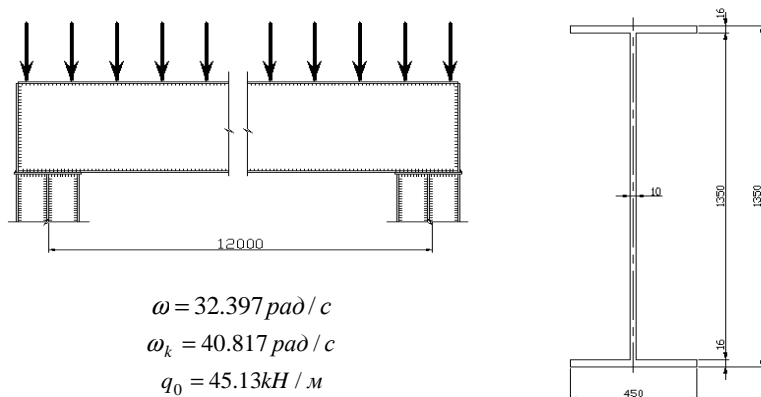


Рис. 5. Головна балка

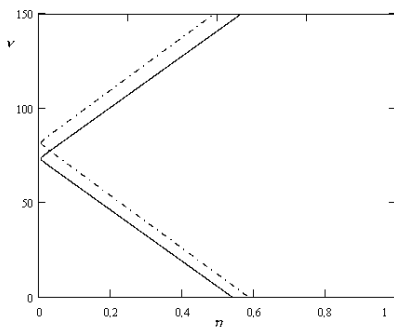


Рис. 6

Загальний вигляд меж областей динамічної нестійкості при гармонійному параметричному навантаженні матиме вигляд, показаний на рис. 6. Область динамічної нестійкості, яка відповідає простому параметричному резонансу, розташована правіше штрихпунктирної лінії. Ця зона обумовлена крутильною частотою, тому її устя наближається до частоти, що дорівнює подвійній крутильній частоті $\nu = 2\omega_k \approx 81.6$.

В цій конструкції, як і в балці настилу, параметричний резонанс, що відповідає частоті згину, не існує. Область, обмежена суцільною лінією, відповідає комбінаційному резонансу, і прилягає до частоти, що дорівнює сумі частот згину та кручення. Області нестійкості значно ширші від показаних в попередній балці, тому можуть виникати небезпечні ситуації.

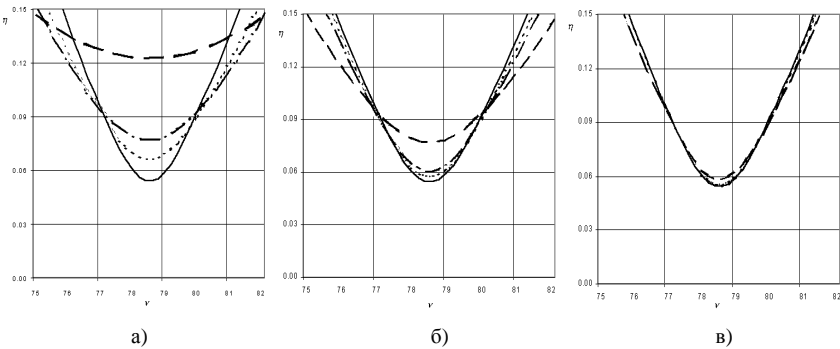


Рис. 7. Области стійкості

Результати дослідження впливу додаткової стохастичної параметричної складової на конфігурацію областей стійкості в зоні головного простого резонансу показані на рис. 7. Наведені графіки аналогічні графікам, які представлені на рис. 3. Досліджуючи головний простий резонанс для балки, можна повторити висновки зроблені для колони - має місце ефект стабілізації, причому при збільшенні радіуса кореляції збільшується стабілізуюча дія додаткового випадкового навантаження безпосередньо в межах частоти головного резонансу. На рис. 7,а) межі стійкості в зоні головного резонансу побудовані для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 1$ рад/с. Стандарт стохастичного навантаження σ прийнятий 10% від значення q_0 . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції $\alpha = 2\omega_k$, штрих пунктирною – при $\alpha = 0.5\omega_k$, пунктирною – при $\alpha = 0.25\omega_k$. На рис. 7,б) показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 2$ рад/с. При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 7,в), де показані межі стійкості при $\theta = 10$ рад/с, а при подальшому збільшенні θ графіки практично не відрізняються один від одного.

Внаслідок застосування асимптотичної теорії в першому наближенні доданки з коефіцієнтами матриці геометричної жорсткості k_{11}^g та k_{22}^g будуть мати більш високий порядок малості. Тоді для зручності аналізу областей динамічної стійкості в зоні комбінаційного резонансу потрібно зробити в системі (9) заміну перемінних, щоб отримати в обох рівняннях системи однакову інтенсивність гармонійного параметричного

навантаження. Отже система (9) для дослідження областей стійкості в зоні комбінаційного резонансу приймається

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + c_{11} \frac{du}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + k_{12}^g (\mu \cos \nu t + f(t)) \varphi &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_{22} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + k_{21}^g (\mu \cos \nu t + f(t)) u &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ввівши нові перемінні і позначення

$$\tilde{u} = \frac{\omega_1}{\sqrt{k_{12}^g}} u, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\omega_{21}}{\sqrt{k_{21}^g}} \varphi, \quad \eta = \mu \frac{\sqrt{k_{12}^g k_{21}^g}}{\omega_1 \omega_2}, \quad f^*(t) = f(t) \frac{\sqrt{k_{12}^g k_{21}^g}}{\omega_1 \omega_2},$$

система (10) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + c_{11} \frac{d\tilde{u}}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + (\eta \cos \nu t + f^*(t)) \tilde{\varphi} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dt^2} + c_{22} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + (\eta \cos \nu t + f^*(t)) \tilde{u} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

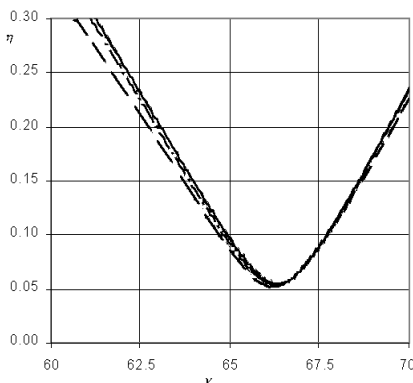


Рис. 8

Результати аналізу конфігурації областей динамічної стійкості в зоні комбінаційного параметричного резонансу показані на рис. 8. Побудувавши межі областей з врахуванням стохастичної складової параметричного навантаження (10% від сталої складової) при різних значеннях θ і α отримуємо графіки, що практично співпадають з межами областей динамічної стійкості при гармонійному збудженні (на рис. 8 показано суцільною лінією). В усій області стабілізація досягає лише

2% . Незначний вплив стохастичної складової можна пояснити малістю коефіцієнтів матриці геометричної жорсткості \tilde{K}_g^* . Тільки при значному збільшенні інтенсивності стохастичного навантаження до рівня сталої

складової спостерігається дестабілізація системи (зона розташована вище від штрихової лінії).

Наведений вище аналіз динамічної стійкості конкретних конструкцій показав, що у випадках, які розглядалися, при врахуванні стохастичної складової в параметричному навантаженні область динамічної нестійкості практично не збільшується, а іноді і зменшується. Але, взагалі кажучи, наведена вібрація змінює межі областей нестійкості, і для більш точної оцінки динамічної стійкості конструкцій потрібно враховувати стохастичний характер параметричного навантаження.

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Будівельна механіка. Динаміка споруд: Навч. Посібник. – К.: ІЗМН, 1998. – 208с.
2. *Дехтярюк Є.С., Гончаренко М.В.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2004.- Вип. 74.
3. *Нілов О.О.* Металеві конструкції. Балки. Колони: Навчальний посібник для студентів будівельних спеціальностей. – К.: ІЗМН, 1997. – 262с.
4. *Цейтлин А.И., Гусева Н.И.* Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. – М.: Стройиздат, 1979. – 174с.

Матеріал надійшов до редакції 14.09.04.