

УДК 528.48

к.т.н., доцент Исаев А.П.,

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## РЕЗУЛЬТАТЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПОЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРА СИЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

*Выполнены теоретические исследования влияния погрешностей положения вектора силы в пространстве на изменение крутящих моментов.*

*Ключевые слова: погрешности положения, стержень, вектор силы, крутящие моменты.*

**Постановка проблемы.** Данная статья идет в развитие статьи [1], в которой изложена актуальность темы и сделано описание поставленной перед нами задачи: исследовать изменения момента силы в результате погрешностей положения вектора силы и найти допустимые погрешности положения вектора силы. В связи с этим рассмотрены погрешности положения вектора силы в плоскости. На основании логических доказательств и рассуждений установлены исходные положения (аксиомы) теории погрешностей положения вектора силы. К основным положениям можно отнести следующие.

1. Стержень и вектор силы эквивалентны, это означает, что элемент строительной конструкции в виде стержня ставится в соответствие вектору силы, направленному вдоль оси стержня.

2. Погрешности положения стержня и погрешности положения вектора силы равнозначны, это означает следующее:

а) погрешности в углах наклона оси стержня относительно координатных осей есть погрешности в углах, определяющих линию действия силы, то есть в направляющих углах вектора силы;

б) погрешности в координатах точек, являющихся началом или концом стержня, являются погрешностями в координатах точки приложения силы.

Исходя из положений об эквивалентности стержня и вектора силы и их погрешностей положений, будем в дальнейшем говорить не просто о стержне, а о векторе силы (ВС), так как именно направленное действие силы, определяемое положением стержня, создает напряженно-деформированное состояние конструкций.

**Цель статьи:** показать влияние пространственных погрешностей положения плоского вектора силы на изменение крутящих моментов.

**Основной текст.** В предыдущей работе был сделан анализ последствий проявления погрешностей положения вектора силы, расположенного в

плоскости. Погрешности положения вектора силы в плоскости, т.е. погрешности в координатах точки приложения силы  $m_x; m_y; m_z = 0$  и погрешности в направлении линии действия силы  $m_\varepsilon; m_\alpha = 0; m_\beta = 0; m_\gamma = 0$  не выводят вектор силы из плоскости, поэтому сила не создает крутящие моменты относительно осей  $oy$  и  $ox$ . На рис. 1 сила  $F_0$  лежит в горизонтальной плоскости  $xoy$  и создает крутящий момент только относительно оси  $oz$ . Как изменяется момент силы и каково влияние на него погрешностей положений в плоскости показано в работе [1].

Было дано понятие вектора момента силы (ВМС), согласно которому он направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит вектор силы и точка крутящего момента. Если в результате погрешностей положения вектор силы и точка  $O$  лежат в одной горизонтальной плоскости  $xoy$ , то вектор момента силы перпендикулярен этой плоскости и направлен вдоль оси  $oz$ , проходящей через точку  $O$ . Если в результате погрешностей положения вектор силы выходит из горизонтальной плоскости, то с точкой  $O$  он образует новую плоскость и ВМС перпендикулярен этой новой плоскости (рис. 1,а). Таким образом, вектор момента силы является в нашем случае как бы показателем того, как изменилось положение плоскости ВС.

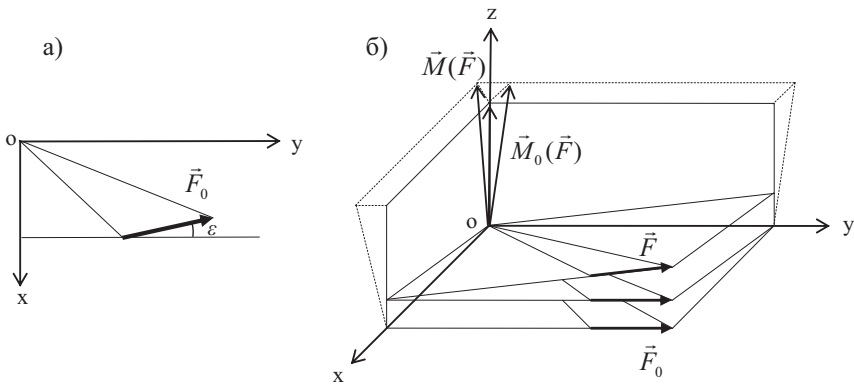


Рис. 1.  
а) вектор силы в плоскости; б) вектор момента силы

Когда вектор силы в результате погрешностей положения вышел из плоскости, то образовался пространственный вектор силы  $\vec{F}$ , изменяющий расчетную схему. Теперь сила создает крутящие моменты относительно всех трех координатных осей. Крутящий момент относительно оси  $oz$  создает сила  $\vec{F}_{xy}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость  $xoy$ ; крутящий момент относительно оси

$ox$  создает сила  $\vec{F}_{yz}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость  $yoz$ ; крутящий момент относительно оси  $oy$  создает сила  $\vec{F}_{zx}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость  $zox$ .

По условию задачи и согласно расчетной схемы углы наклона векторов сил  $\vec{F}_{xy}$ ,  $\vec{F}_{yz}$ ,  $\vec{F}_{zx}$  должны быть равны нулю, т.е. проекции плоского вектора силы  $\vec{F}_{xy}$  на координатные оси должны лежать на этих осях и не создавать крутящих моментов. Однако из-за погрешностей в направляющих углах вектора силы углы наклона могут прирасти от нуля и достигнуть граничных значений  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_\beta$ ,  $\delta_\gamma$ , когда крутящие моменты достигнут предельных допустимых значений. Это должно быть предусмотрено расчетной схемой, так как возникновение крутящих моментов будет реально влиять на напряженно-деформируемое состояние конструкций.

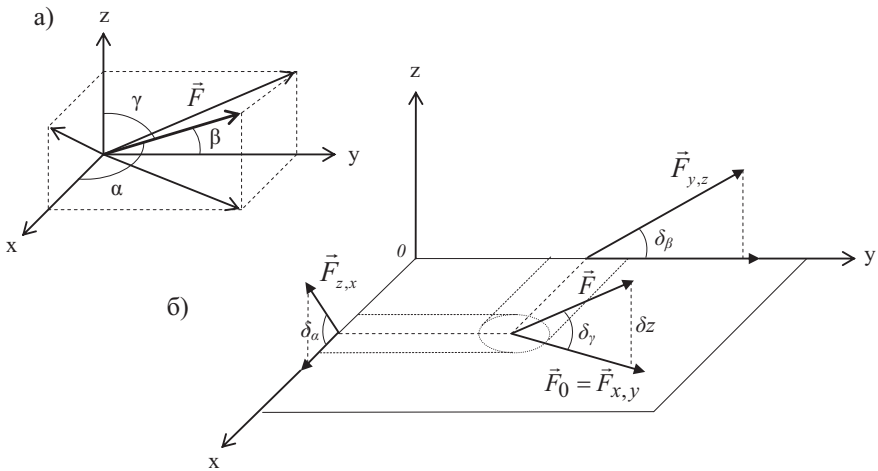


Рис. 2.

а) направляющие углы вектора силы в пространстве; б) вектор силы в пространстве в результате погрешностей положения

Исследуем, какое влияние оказывают погрешности положения вектора силы в пространстве на изменение крутящих моментов, в частности, сделаем анализ влияния погрешностей в направляющих углах вектора силы на допустимое отклонение крутящих моментов относительно осей  $ox$  и  $oy$ . При этом рассмотрим два условия. В первом случае плоский вектор силы расположен в горизонтальной плоскости под углом  $\varepsilon \approx 45^\circ$  к координатным осям. Во втором случае  $\varepsilon = 0^\circ$  (см. рис.1,а).

В первом случае картина соответствия погрешностей положения и моментов в плоскостях  $yoz$  и  $zox$  одинаковая, поэтому рассмотрим решение,

например, в плоскости  $уoz$ . Предположим, что мы многократно устанавливаем стержень, обеспечивая его заданное, проектное положение, при этом допускаем случайные погрешности в положении оси стержня в пространстве и в координатах точки установки стержня. Подобное предположение было сделано в работе [1], и что касается погрешностей положения точки приложения силы, то и здесь примем утверждение, согласно которому геометрическим местом точек приложения силы будет круг радиуса  $\delta_a$ . Спроектируем окружность на координатные оси, получим интервал случайных положений проекции точки приложения силы на ось  $ou$  и также на ось  $ox$ .

Предельно допустимое отклонение вектора силы  $\vec{F}_{yz}$  на угол  $\delta_\beta$  приведет к возникновению плеча силы  $h$  и крутящего момента  $\delta M_x(\vec{F}_{yz})$  относительно оси  $ox$ . Плечо силы, а значит и момент силы, увеличатся, если точка приложения силы будет на краю интервала (рис. 3). Для данной задачи будем считать это значение предельно допустимым отклонением крутящего момента относительно оси  $ox$ .

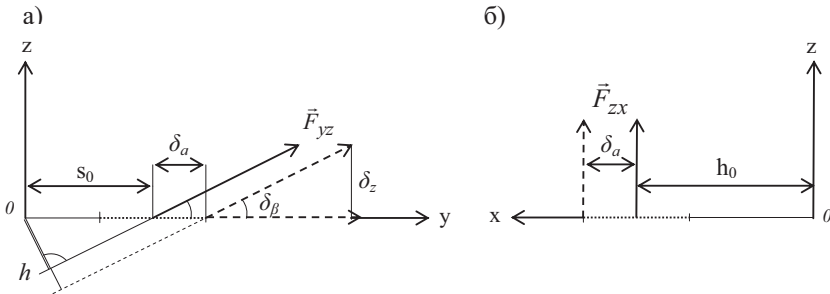


Рис. 3. Влияние погрешностей углов наклона вектора силы на крутящие моменты относительно осей

Согласно определению момента силы: 
$$h = \frac{\delta M_x}{|\vec{F}_{yz}|}.$$

Из прямоугольного треугольника найдем

$$h = (s_0 + \delta_a) \sin \delta_\beta,$$

где  $\delta_a$  можно взять, например, из решения задачи в плоскости  $xou$  (см. [1]).

Поскольку угол  $\delta_\beta$  маленький, то, заменяя синус угла самим углом, получим допустимое отклонение угла наклона вектора силы  $\vec{F}_{yz}$  в зависимости от предельного отклонения крутящего момента относительно оси  $ox$ .

$$\delta_\beta = \frac{\delta M_x \rho}{(s_0 + \delta_a) |\vec{F}_{yz}|}. \quad (1)$$

В случае, когда  $\varepsilon = 0^\circ$  и вектор силы  $\vec{F}_{xy}$  лежит в горизонтальной плоскости, то на ось  $ox$  он проектируется в виде точки. С выходом вектора силы из плоскости из-за погрешностей положения, его проекция примет вид ненулевого вектора и создаст крутящий момент относительно оси  $oy$ . Можно сказать, что с ростом угла  $\delta_\gamma$  растет сила  $|\vec{F}_{zx}|$  и крутящий момент относительно оси  $oy$ .

Согласно рис. 2, учитывая, что  $|\vec{F}| = |\vec{F}_{xy}|$ , найдем

$$\vec{F}_{zx} = \vec{F}_{xy} \sin \delta_\gamma.$$

Тогда момент силы относительно оси  $oy$  будет (см. рис 3, б)

$$\delta M_y = |\vec{F}_{xy}| \sin \delta_\gamma (h_0 + \delta_a),$$

Откуда, с учетом того, что угол  $\delta_\gamma$  мал, найдем допустимое отклонение угла наклона вектора силы  $\vec{F}_{xy}$  в зависимости от предельного отклонения крутящего момента относительно оси  $oy$ , учитывая, что значение момента будет наибольшим на краю интервала.

$$\delta_\gamma = \frac{\delta M_y \rho}{(h_0 + \delta_a) |\vec{F}_{xy}|}. \quad (2)$$

### Литература

1. Исаев А.П. Исследование зависимости погрешности положения точки приложения силы от допустимого отклонения момента силы / А.П.Исаев, В.К.Чибиряков, Р.В.Шульц. – Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013. IX Междунар.

науч. конгр., 15-26 апреля 2013 г., Новосибирск: Междунар. науч. конф. «СибОптика-2013»: сб. материалов в 3 т. Т.2. – Н: СГГА, 2013. – С. 3 – 13.

### **Анотація**

Виконані теоретичні дослідження впливу похибок положення вектора сили у просторі на змінення крутячих моментів.

Ключові слова: похибки положення, стрижень, вектор сили, крутячі моменти.

### **Abstract**

Theoretical study of the effect of errors provisions of the force vector in the space of a change torques.

Keywords: position error, rod, force vector, torques.