

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ВПЛИВ КРОКУ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ НА ОТРИМАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЇЇ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ

Виконано чисельне дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності. Показано, як характеристики режиму коливальної системи, отриманого в результаті інтегрування рівнянь руху, залежать від вибору кроку інтегрування цих рівнянь.

1. Постановка проблеми

Віброударні системи досить широко застосовуються в техніці, тому дослідження динамічних процесів у таких системах представляє чималий інтерес [1]. Для фахівців, що займаються створенням устаткування для сучасного будівельного виробництва такі дослідження також актуальні [2].

У статті розглядається двомасова система з двома ступенями вільності, що відповідає віброударному майданчику, який використовується у будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей і формування бетонних виробів [2-4].

Найпростіший варіант моделі двомасового віброударного майданчика без закріплення форми має вигляд (рис.1):

Стіл майданчика масою m_1 кріпиться до фундаменту лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю k_1 . Двигуни, встановлені під столом, генерують збурюючу силу $F(t)$. До столу кріпиться пружна прокладка (обмежник коливальних) товщиною h з лінійною жорсткістю k_0 , на якій лежить форма з бетонною сумішшю масою m_0 . Форма до прокладки не кріпиться і може від неї відриватися.

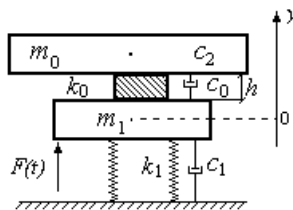


Рис. 1. Розрахункова схема

Зі стану рівноваги форма і стіл майданчика починають спільний вертикальний рух уздовж осі y і рухаються так доти, поки форма не відірветься від столу (прокладки). У стані відриву форма і стіл рухаються роздільно до того моменту, поки форма не впаде на прокладку.

Відбувається удар, під час якого тіла знову рухаються спільно до моменту відриву форми від прокладки і т.д. [5,6].

Зовнішнє навантаження від вібраторів вважається гармонічним $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Сили пружності мають вигляд: у прокладці $F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0 [h - (y_0 - y_1)]$, у віброізолюючих пружинах $F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1 (y_1 - \lambda_{ст})$, де $\lambda_{ст} = \frac{P_0 + P_1}{k_1}$, $\lambda_{ст}$ – статична деформація пружин. Вводимо три сили опору, які прийняті пропорційними першої ступені швидкості: у бетонній суміші $F_{демп2} = c_2 \dot{y}_0$, у прокладці $F_{демп0} = c_0 \dot{y}_0$, у віброізолюючих пружинах $F_{демп1} = c_1 \dot{y}_1$.

Коли форма падає на стіл майданчика (на прокладку), між ними виникає удар. У [5] показано, що в розглянутій моделі удар найкраще моделювати силою контактної взаємодії $F_{уд} = F_{кон}$, що описується законом Герца [7-9]:

$$F_{уд} = F_{кон} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (1)$$

де $\alpha(t)$ – відносне зближення тіл, $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$, K - константа Герца

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1) \sqrt{A+B}},$$

q , A і B – константи, що характеризують місцеву геометрію зони контакту,

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0 \pi}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi},$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Спільний рух столу з формою до її першого відриву описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2 [h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2) \omega_0 \dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi [h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_0 + 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 + \frac{1}{m_1} F(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де введені позначення

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \quad \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \quad \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (3)$$

y_0, y_1 – поточні координати форми і столу відповідно.

Початкові умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$\varphi = 0; \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{cm}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

Роздільний рух тіл описується рівняннями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння спільного руху під час удару мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Числові характеристики майданчика, що відповідають нормативній літературі [3,4], представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Маса форми з бетоном m_0 , кг	15000,0
Маса столу майданчика m_1 , кг	7400,0
Жорсткість прокладки k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізолюючих пружин k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки h , м	0,0275
Амплітуда зовнішнього навантаження F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження ω , Гц	25,0
Початкова фаза зовнішнього навантаження φ , рад	0,0

Модель, що досліджується в роботі, має деякі особливості, а саме: велику масу падаючого тіла – форми з бетоном; м'якість, піддатливість однієї з контактуючих поверхонь – прокладки; відрив одного тіла (форми) від іншого (прокладки) та роздільний рух тіл віброударної системи.

Рівняння руху тіл віброударного майданчика (6) крім параметрів приведених в таблиці 1, містять: коефіцієнти демпфірування ξ_0, ξ_1, ξ_2 , які визначають сили опору; модулі пружності E_0 і E_1 та коефіцієнти Пуассона μ_0 і μ_1 обох тіл, що співударяються; константи A, B та q , які характеризують місцеву геометрію контактуючих поверхонь. Останні три групи параметрів входять в опис сили контактної взаємодії Герца (1) і таким чином зв'язані зі способом моделювання удару.

Вплив вказаних параметрів на динаміку віброударної системи описаний в [6, 10]. Зафіксуємо значення цих параметрів (табл. 2):

Таблиця 2

Модуль пружності форми $E_0, 10^8 \text{Н/м}^2$	2000
Коефіцієнт Пуассона форми μ_0	0,3
Коефіцієнт Пуассона прокладки μ_1	0,4
Константи A, B , що характеризують місцеву геометрію зони контакту, $1/\text{м}^2$	$A=B=0,1$
q	0,318
Коефіцієнт демпфірування в бетонній суміші ξ_2	0,03
Коефіцієнт демпфірування в прокладці ξ_0	0,02
Коефіцієнт демпфірування у віброізолюючих пружинах ξ_1	0,02

2. Дослідження залежності отриманого режиму коливань від кроку інтегрування

Рівняння руху віброударної системи (2,5,6) чисельно інтегруються з певним кроком, який вибирається таким чином: задається число точок інтегрування $N_{\text{тос}}$ на одному періоді зовнішнього навантаження, тоді крок інтегрування обчислюється як $\Delta t = T / N_{\text{тос}}$. Тут T – період зовнішнього навантаження $F(t)$, $T = 2\pi/\omega$.

Дослідження показали, що значення кроку інтегрування рівнянь руху віброударної системи помітно впливає на характер отриманих результатів. Така чутливість пояснюється по-перше, суттєвою нелінійністю віброударної системи, по-друге, її конструктивними особливостями, які обговорювались раніше.

У [6] були проведені дослідження впливу модуля пружності прокладки E_1 на динамічну поведінку віброударного майданчика. Відомо, що модулі пружності різних гум (E_1) на чотири порядки менше за модуль пружності сталі E_0 . Але при таких значеннях E_1 форма і стіл майданчика рухаються спільно увесь час. Відрив форми від прокладки не відбувається, що не відповідає задачі, яка досліджується [6]. Тому був обраний більший модуль пружності прокладки E_1 , і був проаналізований його вплив на режим коливань. Всі розрахунки виконувались при певному кроці інтегрування, а саме при $N_{loc}=250$, тобто крок інтегрування мав значення $\Delta t=0,0001600811543$ с. Було встановлено, що при цьому в діапазоні значень модуля пружності прокладки

$$4,35 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2 < E_1 < 5,70 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2 \quad (\mu_1=0,4) \quad (7)$$

отримуємо субгармонічний $2T$ -періодичний двоударний режим коливань. Субгармонічний режим коливань періоду nT з k ударами за цикл називатиме (n, k)-періодичним [10]. Тобто в діапазоні (7) при $N_{loc}=250$ в системі одержуємо (2,2)-періодичний режим коливань. Подивимось тепер, яку поведінку має система при зміні значень крока інтегрування рівнянь руху системи.

Спочатку розглянемо поведінку системи у випадках, коли модуль пружності прокладки має значення поза діапазоном (7). При $E_1=3 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2$ маємо таку картину динамічного стану системи. При відносно великому кроці інтегрування $N_{loc}=100$ ($\Delta t=0,0004002028858$ с) отримуємо на перших секундах рух, близький до усталеного (3,1)-періодичного режиму (рис. 2). Фазова траєкторія стола при цьому має три характерних кільця (рис. 2,г).

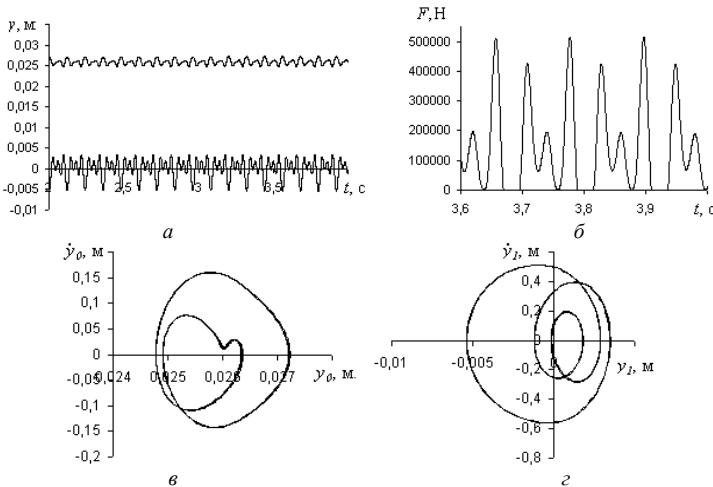


Рис. 2

При значенні кроку інтегрування $N_{loc}=100$ (3,1)–періодичні коливання в перехідному режимі (рис. 2) змінюються в усталеному (2,2)–періодичним режимом (рис. 3). Фазова траєкторія при цьому має два характерних кільця (рис. 3,г).

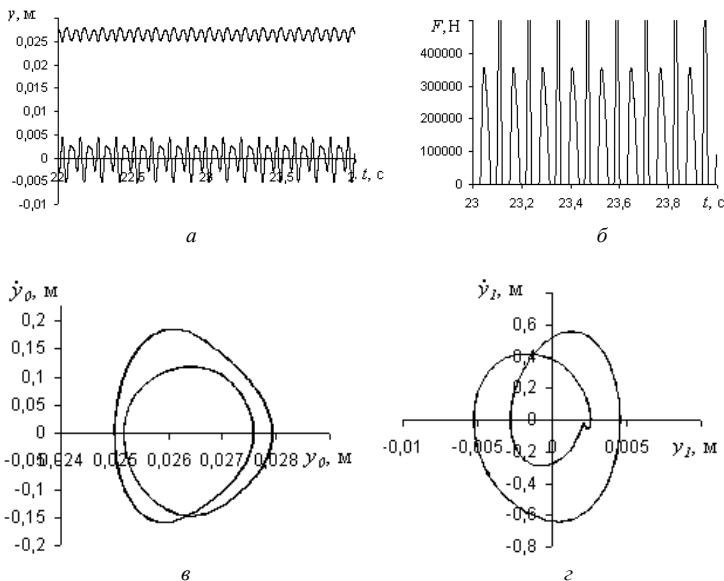


Рис. 3

При тому ж самому значенні кроку інтегрування $N_{loc}=100$, але значенні модуля пружності прокладки $E_1=4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ отримуємо субгармонічний $3T$ -періодичний режим з двома ударами за період коливань ((3,2)–періодичний режим) як в перехідному режимі, так і в усталеному (рис. 4).

При значенні кроку інтегрування $N_{loc}=200$ при обох значеннях модуля пружності прокладки отримуємо усталений одноударний гармонічний режим коливань ((1,1)–періодичний режим) (рис. 5). Відмітимо, що у перехідному процесі в обох випадках був одержаний $3T$ –періодичний субгармонічний режим коливань з двома ударами за період - (3,2)–періодичний режим.

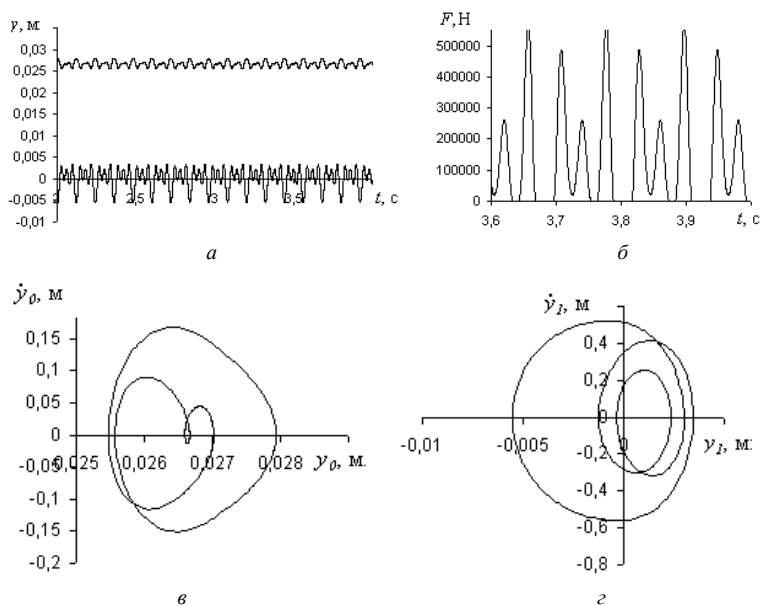


Рис. 4

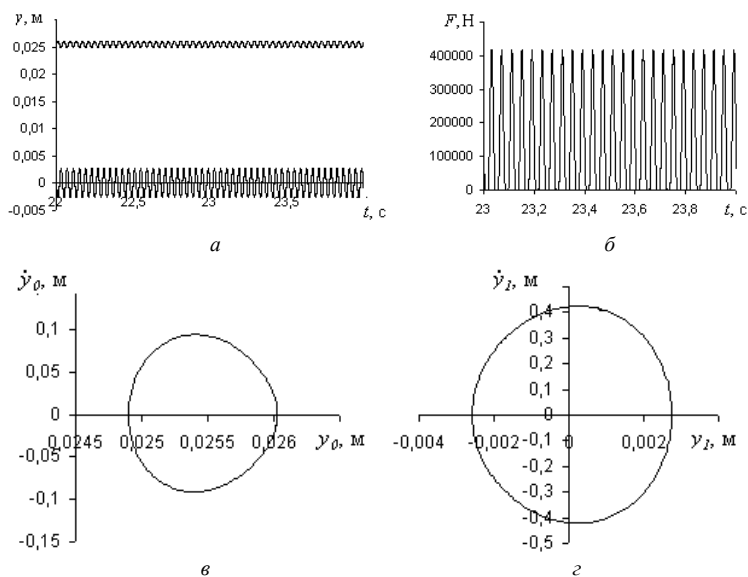


Рис. 5

Субгармонічність $3T$ -періодичних та $2T$ -періодичних режимів коливань наочно демонструється графіками, що поєднують сили зовнішнього навантаження та сили контактної взаємодії для цих режимів (рис. 6, б, в). На графіках тонкою лінією зображена зовнішня сила $F(t)$, товстою – контактна $F_{\text{кон}}(t)$. На рис. 6, а для порівняння зображені такі самі сили для гармонічного T -періодичного режиму ((1,1)–періодичного режиму).

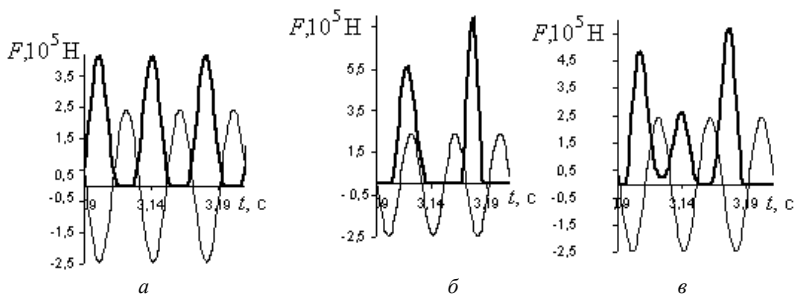


Рис. 6

При подальшому зменшенні кроку інтегрування в системі швидко встановлюється одноударний гармонічний режим коливань.

При більших значеннях модуля пружності прокладки $E_1 \geq 6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ вже при великому кроці інтегрування $N_{\text{toc}}=100$ ($\Delta t=0,0004002028858 \text{ с}$) в системі швидко встановлюється одноударний гармонічний режим (навіть при $N_{\text{toc}}=50$). На рис. 7 приведені результати для $E_1=6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ та $N_{\text{toc}}=100$.

Повернемося тепер до розгляду поведінки системи у випадку, коли модуль пружності прокладки знаходиться в діапазоні значень (7). При $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ і близьких до нього величин E_1 відповідно діапазону (7) величина кроку інтегрування, необхідного для отримання одноударного гармонічного режиму значно менша. Як було сказано вище і описано в [6], при $N_{\text{toc}}=250$ ($\Delta t=0,0001600811543 \text{ с}$) для $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ в системі встановлюється субгармонічний $2T$ -періодичний режим коливань з двома ударами за період коливань ((2,2)–періодичний режим). Така ж сама картина спостерігається при $N_{\text{toc}}=300$. Лише при $N_{\text{toc}}=330$ ($\Delta t=0,0001212736018 \text{ с}$) після 2-ої – 3-ої секунди в системі встановлюється одноударний гармонічний режим коливань ((1,1)–періодичний режим). При більшому числі точок інтегрування (тобто меншому кроці інтегрування) перехідний процес коротше, ми швидше отримуємо усталений одноударний гармонічний режим. Відмітимо, що

при великому кроці інтегрування $N_{ioc}=100$ ($\Delta t=0,00040020288586$ с) також отримуємо одноударний гармонічний режим, близький до усталеного, але при $N_{ioc}=125$ ($\Delta t=0,00032101623086$ с), $N_{ioc}=200$ ($\Delta t=0,0002001014429$ с) одержуємо субгармонічний $2T$ -періодичний режим коливань з двома ударами за період коливань ((2,2)–періодичний режим).

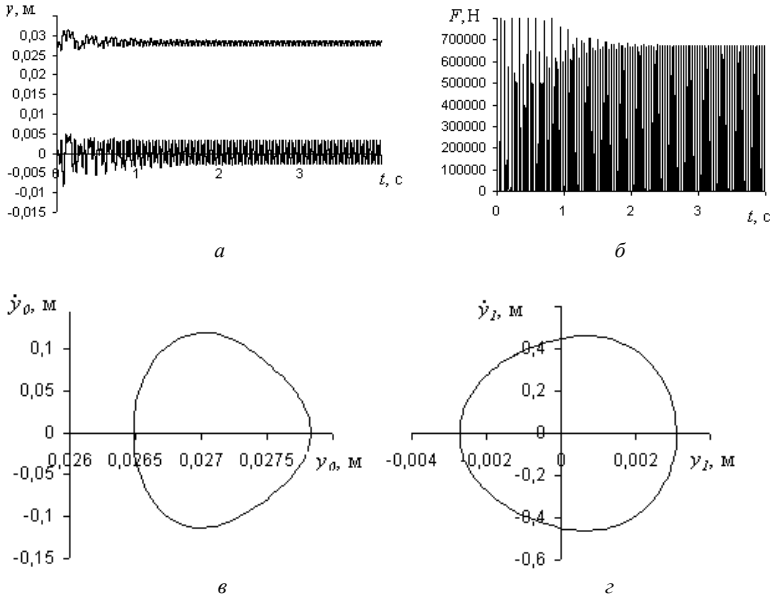


Рис. 7

Описані вище результати представлені в таблиці 3, яка дає наочну картину впливу кроку інтегрування на отримання (n, k) - періодичного режиму коливань віброударного майданчика.

Таблиця 3

N_{ioc}	50	100	125	200	250	300	330	600
$E_1=3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$		(3,1)-перех. (2,2)-уст.		(3,2)-перех. (1,1)-уст.	(1,1)	(1,1)		(1,1)
$E_1=4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$		(3,2)-перех. (3,2)-уст.		(3,2)-перех. (1,1)-уст.		(1,1)		(1,1)
$E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$		(1,1)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(1,1)	(1,1)
$E_1=6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$	(1,1)	(1,1)		(1,1)	(1,1)	(1,1)		(1,1)

3. Висновки

Проведені дослідження показали, що від вибору кроку інтегрування може залежати характер (субгармонічність, багатударність) отриманого в результаті чисельного інтегрування систем руху режиму коливань віброударної системи. Така чутливість віброударної системи, що розглядається, до кроку інтегрування пояснюється її суттєвою нелінійністю і, зокрема, особливостями її конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Назаренко І.І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-Киев: КНУБА, 1999.- 488 с.
3. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона. – К.: Будівельник, 1991. – 160 с.
4. Рекомендации по вибрационному формированию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
5. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – (Здана до друку).
6. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2008.-Вип.82 – сс. 71-82.
7. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
9. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
10. *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// Journal of Sound and Vibration. - 2000. № 235(4). – P. 567-609.

Отримано 19.05.09

Выполнено численное исследование динамического поведения двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы. Показано, как характеристики режима колебаний системы, полученного в результате интегрирования уравнений движения, зависят от выбора шага интегрирования этих уравнений.

The numeric dynamic investigation of two-mass impact vibration system with two freedom degrees is fulfilled. It is shown how the vibration regime characteristics, which were deceived after the integration of motion equations depend from the integration step.