

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук  
О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук  
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

## РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ ПОБУДОВІ КРИВИХ НАВАНТАЖЕННЯ

В статті розглядаються порядок реалізації та результати чисельних досліджень динаміки двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності під дією періодичного зовнішнього навантаження, що були отримані методом продовження розв'язку за параметром. Розв'язки рівнянь руху знаходяться в залежності від амплітуди зовнішнього навантаження, будуються криві навантаження та графіки контактної сили. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Доводиться достовірність отриманих результатів.

**Вступ.** В статті представлені результати застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження. Робота є продовженням статті [1], в якій був описаний розвиток цього методу для таких систем та приведені усі теоретичні положення, що необхідні для його використання. В цій статті, як і в попередній, модифікований метод реалізується на прикладі двомасової віброударної системи, для якої будуються розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь руху на періоді усталеного періодичного режиму коливань в залежності від параметру інтенсивності зовнішнього навантаження, зокрема, криві навантаження та графіки контактної сили.

Раніше [2] був виконаний чисельний аналіз динамічних станів двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами в момент удару з використанням коефіцієнту відновлення. В цій роботі розглядається застосування методу продовження за параметром для дослідження коливань саме такої системи, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії.

### 1. Постановка задачі

Віброударна система складається із основного тіла та приєднаного, яке може відігравати роль ударного гасителя коливань. Докладніше ця модель була описана в [2,3]. Її розрахункова схема

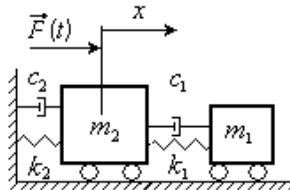


Рис. 1

зображена на рис.1.

Параметри вібростеми, яка досліджується в цій роботі, приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Назва характеристики	Основне тіло	Придане тіло
Маса $m_i, кг$	1000,0	100,0
Парціальна частота коливань $\omega_i, рад/с$	6,283	4,727
Коефіцієнт демпфірування $\xi_i$	0,036	0,20
Модуль Юнга $E_i, Н/м^2$	$2,099 \cdot 10^{11}$	$2,099 \cdot 10^{11}$
Коефіцієнт Пуассона $\mu_i$	0,3	0,3
Вихідна відстань між тілами $D, м$	0,05	
Константи $A, B, 1/м, q$	$A=0,5; B=0,5; q=0,319$	
Амплітуда навантаження $F_0, Н$	400,0	
Частота навантаження $\omega, рад/с$	6,0	
Початкова фаза навантаження $\varphi_0, рад$	0,0	

Рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{кон}(t), \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{кон}(t)],$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}; \quad \chi = \frac{m_2}{m_1}.$$

Зовнішнє гармонічне навантаження запишемо у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

де  $\lambda$  - параметр інтенсивності навантаження,  $T = 2\pi/\omega$  - його період. Продовження розв'язку будуватимемо за параметром  $\lambda$ .

Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = 0.05 \text{ м}, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (3)$$

Сила контактної взаємодії  $F_{кон}(t)$ , яка моделює удар, діє лише під час удару и відсутня в інші моменти часу. Контактна сила може бути описана різними законами, наприклад, законом пружності [4]. В своїх роботах обираємо для її опису контактний закон Герца [5,6]:

$$F_{кон}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (4)$$

де  $\alpha(t) = x_2 - x_1$  – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi}, \quad (5)$$

$\mu_i$  и  $E_i$  – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл,  $A$ ,  $B$  та  $q$  – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту.

Модифікація методу продовження розв'язку за параметром застосовується для дослідження  $T$ -періодичного усталеного режиму коливань віброударної системи.

## 2. Реалізація методу

Згідно з теоретичними положеннями застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження, які описані в [1], побудова розв'язків рівнянь руху (1) на періоді усталеного  $T$ -періодичного процесу, реалізується відповідно до наступної послідовності дій.

1. На першому кроці обчислень надамо параметру інтенсивності навантаження  $\lambda$  деяке початкове значення, наприклад  $\lambda = \lambda_{(k)} = \lambda_{(1)} = 1$ .

2. Знаходимо розв'язок вихідної нелінійної системи (1) із заданими вихідними умовами (3) прямим чисельним інтегруванням при значенні параметра інтенсивності  $\lambda_{(1)} = 1$ , який був обраний в п.1. Графік цього розв'язку приведений на рис. 2.

На рисунках товстою лінією позначені графіки коливань основного тіла  $m_2$ , а тонкою – приєднаного тіла  $m_1$ .

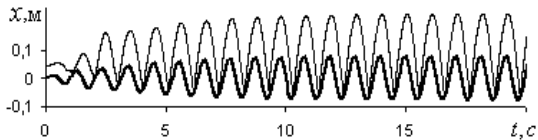


Рис. 2

3. Після закінчення перехідного процесу і встановлення усталеного  $T$ -періодичного режиму коливань обираємо стан при деякому  $t = t_0$ , який буде вихідним для наступного кроку обчислень (рис. 3).

На графіках маркерами помічені точки, які відповідають зазначеному стану. Вихідні значення

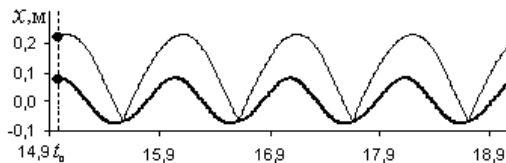


Рис. 3

змінних такі:

$$t_0 = 14,93 \text{ с}, \quad x_{1(k)}(t_0) = 0,2067 \text{ м}, \quad x_{2(k)}(t_0) = 0,0758 \text{ м}, \quad (6)$$

$$\dot{x}_{1(k)}(t_0) = 0,3139 \text{ м/с}, \quad \dot{x}_{2(k)}(t_0) = 0,1837 \text{ м/с}.$$

4. Розв'язок рівнянь руху (1) на одному періоді  $T$  зовнішнього навантаження при таких вихідних даних зображений на рис. 4.

Для побудови кривої навантаження (кривої залежності напіврозмахів коливань від амплітуди зовнішнього навантаження) знаходимо напіврозмах за формулою

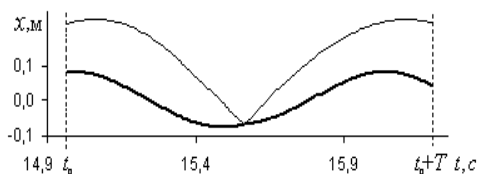


Рис. 4

$$A_{\max} = \frac{|x_{\max}| + |x_{\min}|}{2} \quad (7)$$

і отримуємо першу точку на цій кривій при  $\lambda = 1$ .

5. На наступному кроці надамо параметрові навантаження приріст  $\Delta\lambda_{(k)}$ :  $\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}$ . Обираємо, наприклад,  $\Delta\lambda_{(k)} = 0,1$ . При новому значенні амплітуди зовнішнього навантаження коливальний процес змінюється, значення переміщень та швидкостей при  $t = t_0$  стають іншими – вихідні значення змінних (6) отримують прирости. Значення цих приростів є розв'язками лінійної алгебраїчної системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими [1].

6. Для обчислення чотирьох стовпців коефіцієнтів алгебраїчної системи розв'язуємо чотири системи диференціальних рівнянь 2-го порядку з певними вихідними умовами – розв'язуємо чотири задачі Коші. Розв'язки цих систем при  $t = t_0 + T$  визначають коефіцієнти лінійної алгебраїчної системи.

7. Для обчислення правих частин цієї системи розв'язуємо п'яту систему диференціальних рівнянь 2-го порядку з нульовими вихідними умовами – розв'язуємо п'яту задачу Коші. Значення розв'язку при  $t = t_0 + T$  визначають праві частини лінійної алгебраїчної системи.

8. Розв'язуємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Розв'язок цієї системи дає прирости вихідних умов, що розшуковуються:

$$\Delta x_{1(1)}(t_0) = 0,0189 \text{ м}, \quad \Delta x_{2(1)}(t_0) = 0,0130 \text{ м},$$

$$\Delta \dot{x}_{1(1)}(t_0) = 0,0188 \text{ м/с}, \quad \Delta \dot{x}_{2(1)}(t_0) = 0,0101 \text{ м/с}.$$

9. Знаходимо нові вихідні значення змінних для виконання наступного кроку методу продовження за параметром. Вони відповідають ustalеному  $T$ -періодичному режиму коливань при значенні параметра  $\lambda_{(2)}$  на 2-му кроці (взагалі  $\lambda_{(k+1)}$  на  $(k+1)$ -му кроці):

$$\begin{aligned}x_{1(2)}(t_0) &= x_{1(1)}(t_0) + \Delta x_{1(1)}(t_0) = 0,2067_m + 0,0189_m = 0,2256_m, \\x_{2(2)}(t_0) &= x_{2(1)}(t_0) + \Delta x_{2(1)}(t_0) = 0,0758_m + 0,0130_m = 0,0887_m, \\\dot{x}_{1(2)}(t_0) &= \dot{x}_{1(1)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{1(1)}(t_0) = 0,3139_m/c + 0,0188_m/c = 0,3327_m/c, \\\dot{x}_{2(2)}(t_0) &= \dot{x}_{2(1)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(1)}(t_0) = 0,1837_m/c + 0,0101_m/c = 0,1937_m/c.\end{aligned}$$

10. На наступному  $(k+1)$ -му кроці із залученням отриманих в п. 9 вихідних даних та при новому значенні параметра  $\lambda_{(k+1)}$  розв'язуємо вихідну нелінійну систему (1) прямим чисельним інтегруванням на періоді  $T$ , при цьому очевидно, що перехідний процес обминається.

11. Знаходимо нев'язки  $r_{1(k+1)}, r_{2(k+1)}, \dot{r}_{1(k+1)}, \dot{r}_{2(k+1)}, r_{0(k+1)}$   $(k+1)$ -го кроку, перевіряючи тим самим виконання умов періодичності:

$$\begin{aligned}r_{1(k+1)} &= x_{1(k+1)}(t_0 + T) - x_{1(k+1)}(t_0) = 3,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \\r_{2(k+1)} &= x_{2(k+1)}(t_0 + T) - x_{2(k+1)}(t_0) = 8,44 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \\\dot{r}_{1(k+1)} &= \dot{x}_{1(k+1)}(t_0 + T) - \dot{x}_{1(k+1)}(t_0) = -1,30 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\\dot{r}_{2(k+1)} &= \dot{x}_{2(k+1)}(t_0 + T) - \dot{x}_{2(k+1)}(t_0) = 9,64 \cdot 10^{-4} \text{ м}.\end{aligned} \quad (8)$$

Якщо нев'язки малі (менше заданого критерію), отримуємо чергову  $(k+1)$ -у точку на кривій навантаження після обчислення напіврозмаху за формулою (7) і переходимо до наступного  $(k+2)$ -го кроку – повторюємо обчислювальний процес, починаючи с п. 5. Якщо нев'язки великі, то зменшуємо приріст параметра  $\Delta \lambda_{(k)}$  і також знов повторюємо обчислювальний процес, починаючи з п. 5.

Побудови розв'язків необхідно доповнити аналізом стійкості отриманих періодичних режимів, тому що в дійсності реалізуються тільки стійкі коливання. Це можна зробити за допомогою методу Флоке, який був застосований в [2] для дослідження стійкості періодичних віброударних режимів, якщо удар був змодельований граничними умовами.

### 3. Обговорення результатів

Розв'язки рівнянь руху (1), які визначають переміщення обох тіл віброударної системи, що були одержані за два кроки обчислювального процесу для значень амплітуди зовнішнього навантаження  $\lambda_{(1)} = 1,0$ ,  $\lambda_{(2)} = 1,1$ ,  $\Delta \lambda_{(1)} = 0,1$  приведені на рис. 5. Маркерами на рисунку виділені

значення переміщень тіл на початку при  $t = t_0$  та в кінці періоду при  $t = t_0 + T$ .

Фазові траєкторії для обох тіл при цих значеннях параметру навантаження зображені на рис.6.

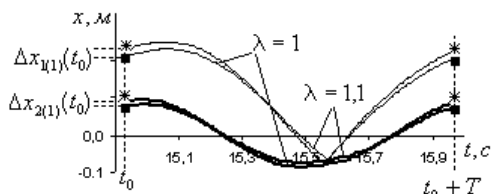


Рис.5

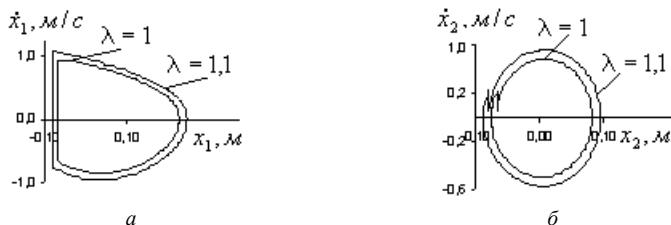


Рис.6

На рис. 7 зображені переміщення тіл на періоді усталеного  $T$ -періодичного режиму коливаний та їхні фазові траєкторії для п'ятьох значень параметру навантаження. Ці рисунки наочно демонструють зміну характеристик динамічних режимів в залежності від амплітуди зовнішнього навантаження.

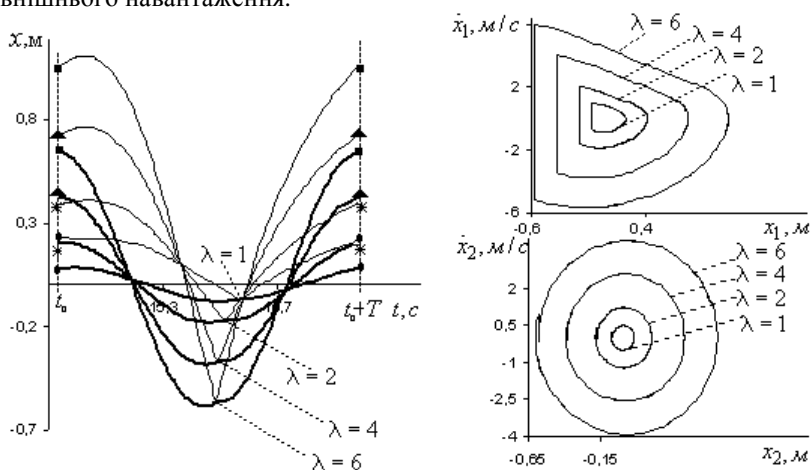


Рис. 7

Криві навантаження, що були побудовані за приведеною схемою обчислень, приведені на рис. 8.

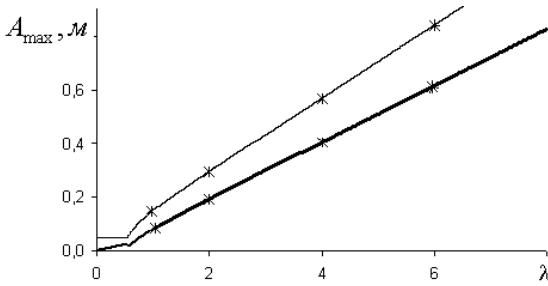


Рис. 8

Ділянки кривих навантаження, що відповідають малим значенням  $\lambda$  ( $\lambda \leq 0,55$ ), показують що при таких величинах зовнішнього навантаження напіврозмахи коливань приєднаного тіла не змінюються. Пояснюється це тим, що при невеликому зовнішньому навантаженні удар між тілами не відбувається, що добре видно на рис. 9, де представлені переміщення тіл віброударної системи, які були отримані прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1) при  $\lambda = 0,5$ .

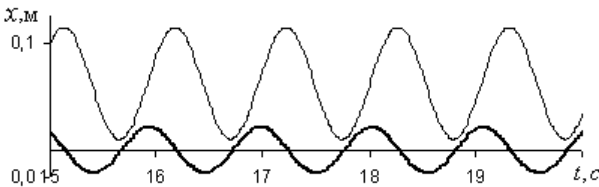


Рис.9

На рис. 10 представлені залежності значень контактної сили від параметра інтенсивності навантаження.

Для перевірки достовірності результатів, отриманих при побудові кривих навантаження та графіків контактної сили, виконаємо пряме чисельне інтегрування рівнянь (1) при декількох значеннях  $\lambda$ . На рис.11 зображені переміщення тіл при  $\lambda=2$  (рис.11,а) та при  $\lambda=4$  (рис.11,б), які включають перехідний процес.

Значення напіврозмахів та максимумів контактної сили, які отримані для усталених режимів коливань, відмічені маркерами на графіках рис. 8 та рис.10,а. Спостерігаємо добрий збіг результатів, що були одержані

методом продовження за параметром та прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1).

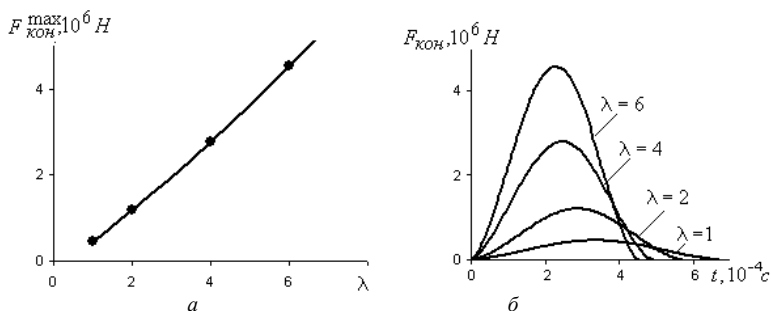


Рис.10

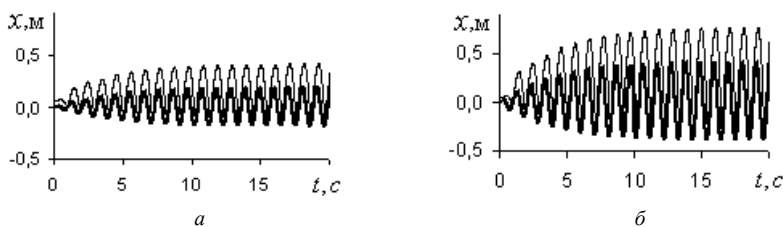


Рис.11

**Висновки.** Отже, обчислення та побудови, які були виконані в цій роботі, наочно демонструють, як за суттєво спрощеною процедурою, обминаючи перехідний процес, крок за кроком здобуваються розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи на періоді в усталеному  $T$ -періодичному режимі коливань. Грунтуючись на отриманих розв'язках, будуються графіки різних динамічних характеристик коливань віброударної системи в залежності від амплітуди періодичного зовнішнього навантаження, достовірність яких підтверджуються збіжністю зі значеннями, що одержані прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 87. 2011. - С. 63-73.
2. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.



3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
4. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
5. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

*Стаття надійшла до редакції 19.10.2011 р.*

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

#### **РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КРИВЫХ НАГРУЖЕНИЯ**

В статье рассматривается порядок реализации и результаты числовых исследований динамики двухмассовых виброударных систем с двумя степенями свободы под действием периодической внешней нагрузки, полученные методом продолжения решения по параметру. Решения уравнений движения получены в зависимости от параметра амплитуды внешней нагрузки, строятся кривые нагружения и графики контактной силы. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия, которая описывается законом Герца. Проверена достоверность полученных результатов.

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

#### **THE REALIZATION OF CONTINUATION AFTER PARAMETER METHOD FOR VIBROIMPACT SYSTEMS AT LOADING CURVES CONSTRUCTION**

The realization order and the numerical research results for two-mass vibroimpact systems with two degrees of freedom are examined in this article. These systems are under periodic external loading. The numerical researches are fulfilled by continuation after parameter method. The solutions of movement equations are obtained depending of external loading amplitude, the loading curves and the contact force graphes are constructed. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force describing by Hertz law. Reliability of the received results is controlled.