

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
М.О. Соловей, д-р техн. наук

МАТРИЦЯ МАС МОДИФІКОВАНОГО ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА НЕОДНОРІДНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглянута побудова матриці мас універсального просторового скінченного елемента, який призначений для дослідження процесів геометрично нелінійного деформування пружних неоднорідних оболонок при дії навантаження, що змінюється у часі.

Реальні оболонкові конструкції можуть поєднувати у собі різноманітні види неоднорідностей: підкріплення ребрами та накладками; послаблення отворами, виїмками, каналами; потовщення, зміну товщину, зломи та складну форму серединної поверхні обшивки оболонки; багат шарову структуру матеріалу. Потреби практики висувають задачу удосконалення методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) подібних неоднорідних тонкостінних конструкцій.

У роботах [1-5] прийнято, що структура неоднорідної оболонки визначається: 1) наявністю геометричних особливостей за товщиною у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зломом серединної поверхні та отворами; 2) неоднорідністю матеріалу конструктивних елементів оболонки за товщиною та в плані у вигляді комбінації різних багат шарових пакетів, шари яких виготовлені з традиційних і композитних матеріалів [6]. Виходячи з положень геометрично нелінійної тривимірної теорії термопружності, на основі розробленого універсального модифікованого просторового скінченного елемента (СЕ) побудовано розрахункову математичну модель, що враховує вказані неоднорідності оболонкової конструкції, яка розглядається як тривимірне тіло. Розроблено скінченноелементний метод з алгоритмами дослідження геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки тонких пружних оболонок неоднорідної структури при дії статичного термосилового навантаження. Враховуючи, що нелінійне деформування та втрата стійкості оболонок звичайно відбувається як динамічний процес, природньою постає проблема розвитку методик [1-6] для розрахунків неоднорідних оболонок при дії навантажень, що змінюються у часі. Останнє веде до необхідності врахування в рівняннях динаміки членів, що пов'язані з силами інерції.

Розглядаються тонкі пружні змінної товщини неоднорідні оболонки (рис. 1). Оболонка як тривимірним тіло займає в глобальній декартовій системі координат x^1, x^2, x^3 область, що обмежена двома граничними і контурною поверхнями. Фрагменти оболонки розглядаються як ділянки обшивки неперервно-змінної товщини з гладкою серединною поверхнею та зі зломами, або ступінчато-змінної товщини, на яких розміщені обшивка, ребра, накладки, виїмки, канали, отвори. За товщиною обшивка оболонки та її конструктивні елементи можуть мати багатопарову структуру матеріалу. Вважаємо, що на оболонку діє динамічне навантаження, задане як функція часу.

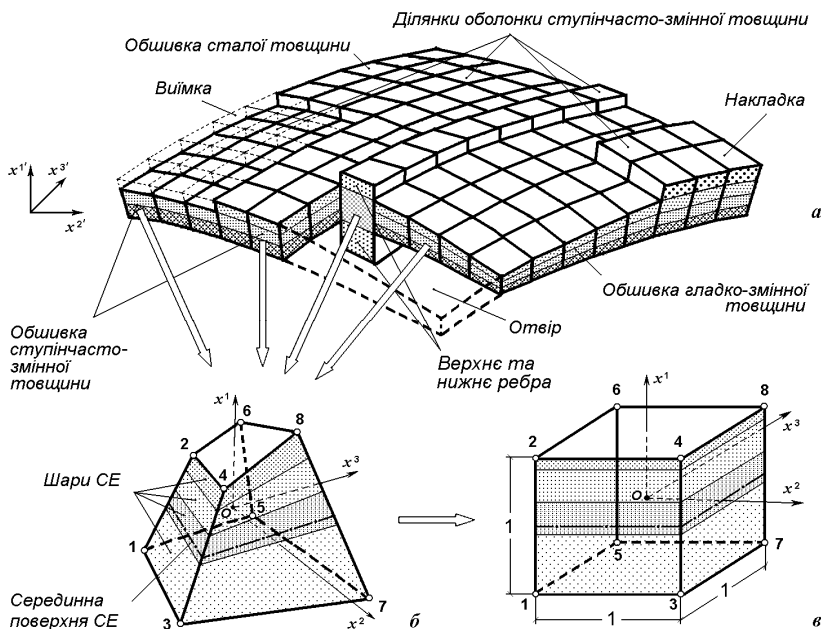


Рис. 1. Моделювання тонкої оболонки неоднорідної структури універсальним просторовим СЕ

При побудові скінченноелементної моделі [1-5] тонка неоднорідна оболонка на всіх її ділянках для усіх її конструктивних елементів (рис. 1, а). апроксимується за товщиною одним і тим самим універсальним ізопараметричним просторовим СЕ з полілінійними функціями форми (рис. 1, б). Введені для модифікованого СЕ додаткові змінні параметри дозволяють враховувати геометричні особливості

конструктивних елементів оболонки і неоднорідність її матеріалу: змінність товщини, злами обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори, вставки, ексцентричне розташування СЕ щодо серединної поверхні обшивки оболонки, багатшарову структуру матеріалу.

В області СЕ введена нормалізована косокутна місцева система координат x^i ($i=1, 2, 3$) (рис. 1, б). Прийнято, що координатна вісь x^1 спрямована у напрямку товщини оболонки, але не обов'язково за нормаллю до її серединної поверхні. Місцеву систему координат СЕ можна умовно інтерпретувати як топологічне відображення області СЕ на куб з одиничними ребрами (рис. 1, в), у центрі якого точці O поміщено початок місцевої системи координат з направленими вздовж ребер куба осями. В масштабах місцевої системи координат відстані між найближчими вузлами (довжини ребер СЕ) дорівнюють одиниці, а координатні осі між собою є ортогональними (рис. 2).

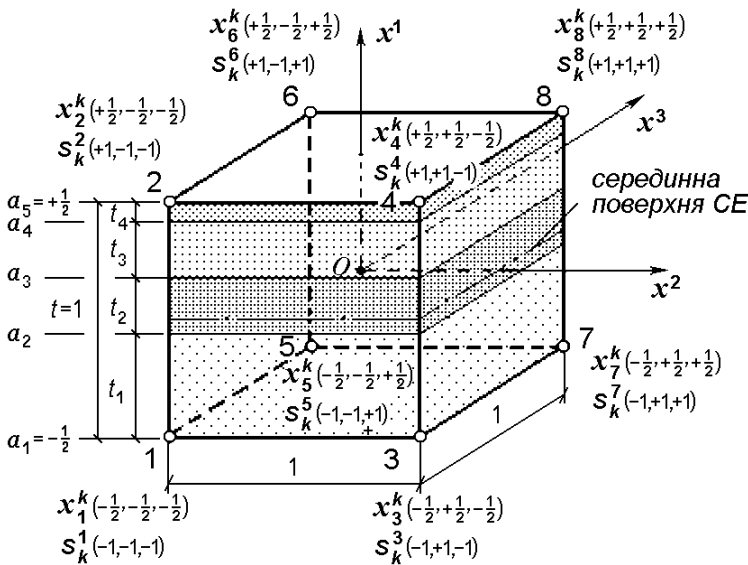


Рис. 2. Місцеві x^k та сіткові s_k координати вузлів СЕ

Введені в кожному СЕ місцеві безрозмірні координати x^i ($-1/2 \leq x^i \leq +1/2$) тотожно співпадають з криволінійними лагранжевими координатами. Таке ототожнення виправдане, оскільки координати кожної матеріальної точки мають сталі значення в будь-який момент часу.

Прийнятий підхід дозволяє за допомогою двох СЕ точно апроксимувати в просторовій скінченноелементній моделі оболонки (СЕМО) геометрію зломів (рис. 3).

Розглядається геометрично нелінійне деформування при великих переміщеннях і малих деформаціях, яке описується тензором скінчених деформацій Коши-Гріна [7]. У

кожному шарі кожного СЕ матеріал може бути лінійно пружним, анізотропним та різним. Прийнято, що проковзування між шарами відсутнє. Співвідношення між компонентами тензорів напружень та деформацій описуються узагальненим законом Гука. У просторовому СЕ за невідомі приймаються вузлові переміщення у декартовій системі координат. Співвідношення МСЕ в [1-5] отримані у формі метода переміщень.

Особливості НДС тонкої неоднорідною оболонки враховані неklasичними кінематичною та статичною гіпотезами. Кінематична гіпотеза сформульована як гіпотеза деформівної прямої - пряма у напрямку товщини оболонки до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Зазначена пряма не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні оболонки. Вона спрямована вздовж осі x^1 місцевої системи координат. У цьому напрямку розподіл переміщень прийнятий лінійним, що є загальноприйнятим припущенням у теорії тонких оболонок. Гіпотеза деформівної прямої дозволяє природнім шляхом виконувати стиковку просторових елементів у зломах та на ділянках ступінчасто-змінної товщини.

Відповідно до статичної гіпотези напруження обтиснення σ^{11} кожного n -го шару в напрямку товщини оболонки є сталими: $\partial\sigma_n^{11}/\partial x^1=0$. На відміну від класичної гіпотези $\sigma^{11}=0$, прийняття гіпотези про сталість напружень обтиснення в шарі не позбавляє напружений стан СЕ просторових властивостей і дозволяє використовувати його для моделювання тонких і середньої товщини оболонок.

Розглядання тонкої оболонки з позицій тривимірної теорії пружності без використання класичних гіпотез теорії оболонок відносно геометрії та НДС оболонки дає змогу розширити коло досліджуваних задач та

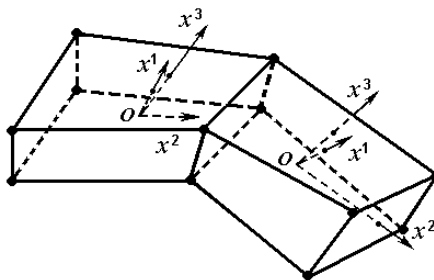


Рис. 3. Моделювання злому в оболонці

спрошує чисельну реалізацію. При цьому відпадає необхідності у виведенні та аналізі складних і громіздких рівнянь різних теорій неоднорідних оболонок, з'являється можливість чисельної оцінки наближених теорій оболонок та пластин.

Розглядаємо просторовий ізопараметричний скінченний елемент об'ємом V_{CE} з масовою густиною $\rho = \rho(x^k)$. Визначаємо прийнятий полілінійний закон зміни функцій координат, переміщень та прискорень в об'ємі CE як

$$x^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) x_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (1)$$

$$u^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) u_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (2)$$

$$\ddot{u}^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (3)$$

де $x^{i'}(x^k)$, $u^{i'}(x^k)$, $\ddot{u}^{i'}(x^k)$ – функції координат, переміщень, та прискорень довільної точки CE в глобальній декартовій системі координат; x^k – місцеві координати точки CE; $s_k = \text{sign}(x_{s_1 s_2 s_3}^k)$ – умовні сіткові координати вузлів CE; $\ddot{u}^{i'} = \partial^2 u^{i'} / \partial t^2$, t – параметр часу; $x_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$, $u_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$, $\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$ – вузлові координати, переміщення та прискорення.

Таким чином, стан CE визначаємо значеннями його вузлових координат, переміщень та прискорень, маючи на увазі, що функції $x^{i'}$, $u^{i'}$, $\ddot{u}^{i'}$ залежать від часу.

При побудові розв'язувальних рівнянь для дослідження динамічного деформування оболонок методом скінченних елементів звичайно використовують принцип можливих переміщень Лагранжа у поєднанні з принципом Даламбера [8], який має вигляд

$$\sum_{CE} (\delta W_{CE} - (\delta K_{CE} + \delta A_{CE})) = 0,$$

де K_{CE} , W_{CE} та A_{CE} – роботи сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил CE.

Співвідношення для обчислення віртуальної роботи внутрішніх $\delta W_{CE} = \int_{V_{CE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV_{CE}$ та поверхневих і масових зовнішніх сил δA_{CE} для багатощарового елемента наведені в [3, 5].

При постановці динамічної задачі та для забезпечення збіжності розв'язків будемо використовувати узгоджену матрицю розподілених мас. Вона отримується зведенням розподілених інерційних сил до еквівалентних вузлових зусиль. Коефіцієнти узгодженої матриці мас визначаються при застосуванні апроксимуючих поліномів, що використовуються при побудові матриці жорсткості.

Віртуальну роботу сил інерції СЕ визначаємо як

$$\delta K_{CE} = - \int_{V_{CE}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dV_{CE} = - \int \int \int \sqrt{g} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4)$$

Процедура інтегрування (4) здійснюється звичайним для МСЕ чином. Приймаємо величину \sqrt{g} сталою в межах СЕ. Функції (2) та (3) підставляємо в (4) та виконуємо інтегрування за місцевими координатами у межах СЕ (від $x^i = -\frac{1}{2}$ до $x^i = +\frac{1}{2}$) з урахуванням його багат шарової структури:

$$\begin{aligned} \delta K_{CE} &= -\sqrt{g} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{a_{n+1}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \rho_n \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^i \delta u_{p_1 p_2 p_3}^i (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1} - a_n) + (s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1}^2 - a_n^2) + 4s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

де a_n та a_{n+1} – координати x^1 вузлових точок на нижній та верхній границях n -го шару; через багат шаровість елемента густина ρ прийнята ступінчасто-сталою функцією координати x^1 :

$$\rho = \rho(x^1) = \rho_n, \quad a_n \leq x^1 \leq a_{n+1}.$$

Простий трилінійний вигляд функцій форми (1) – (3) дозволив виконати процедуру інтегрування в (4) аналітично. Введемо позначення: $x_{O_n}^1 = (a_{n+1} + a_n)/2$ – координата x^1 центра n -го шару; $t_n = (a_{n+1} - a_n)$ – товщина n -го шару.

Тоді (5) набуває вигляду

$$\delta K_{CE} = -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1 s_2 s_3} \sum_{p_1 p_2 p_3} \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \delta u_{p_1 p_2 p_3}^{i'} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n t_n + 2(s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 + 4s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}. \quad (6)$$

Доведено [3, 5, 8], що при апроксимації тонкої оболонки просторовими СЕ доцільно переходити від вузлових змінних на обмежуючих поверхнях СЕ до розв'язувальних функцій на його серединній поверхні. Такий підхід підвищує стійкість обчислювального процесу до накопичення помилок округлення. В якості нових змінних приймаємо сукупність переміщень і прискорень відповідних вузлових точок на серединній поверхні СЕ $v_{s_2 s_3}^{k'}$, $\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ та їхньої різниці на обмежуючих поверхнях елемента $v_{s_2 s_3}^{k'}$, $\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$. Таким чином

$$v_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad v_{s_2 s_3}^{k'} = u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}, \quad (7)$$

$$\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{\ddot{u}_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + \ddot{u}_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \ddot{u}_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - \ddot{u}_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}; \quad (8)$$

$$u_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = v_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} v_{s_2 s_3}^{k'}, \quad (9)$$

$$\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}. \quad (10)$$

Введені в такий спосіб заміни (9), (10) можна трактувати, як перехід від восьми-вузлового просторового СЕ до чотири-вузлового оболонкового СЕ, що віднесений до його серединної поверхні.

Підставивши співвідношення (9), (10) у (6) та виконавши підсумовування за сітковими координатами s_1 та p_1 , варіацію δK_{CE} подамо як

$$\delta K_{CE} = -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n t_n \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 \left(\ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right) + \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right\} = - \sum_{\substack{s_2, s_3=\pm 1 \\ p_2, p_3=\pm 1}} \left(m_{\ddot{v} v} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \right.$$

$$\left. + m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{u}^{i'} \delta v^{i'}_{p_2p_3} + m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{v}^{i'} \delta u^{i'}_{p_2p_3} + m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{v}^{i'} \delta v^{i'}_{p_2p_3} \right). \quad (11)$$

Отримані в (11) аналітичні розрахункові формули для коефіцієнтів чотирьох блоків узгодженої матриці мас СЕ $m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$, $m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3}$,

$m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$, $m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\rho}, \\ m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отримані аналітичні співвідношення для узгодженої матриці мас багат шарового СЕ приводять до істотного зменшення трудомісткості чисельних обчислень. Введення в (12) наступних позначень

$$\hat{\rho} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3},$$

дозволило схематично подати структуру матриці мас та її блоків (рис. 4, 5). На рис. 5, як приклад, наведено перший блок матриці мас $m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$, де пусті клітинки відповідають нульовим коефіцієнтам.

Зазначимо, що матриця мас є симетричною, має розмірність 24×24 та за своєю структурою подібна матриці жорсткості цього ж СЕ.

| | $\ddot{u}^{i'}_{s_2s_3}$ | $\ddot{v}^{i'}_{s_2s_3}$ |
|--------------------------|---|---|
| $\delta u^{i'}_{p_2p_3}$ | $m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\rho}$ | $m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$ |
| $\delta v^{i'}_{p_2p_3}$ | $m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$ | $m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$ |

Рис. 4. Загальний вигляд блоків узгодженої матриці мас багат шарового СЕ

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|--------------|----|----------------|---------------------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|--|----------------|----------------|--|----------------|----------------|--|--------------|--------------|--|
| | | | | $\ddot{u}_{s_2 s_3}^{i'}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | s1 | | | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | s2 | | | -1 | | | | | | +1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | s3 | | | -1 | | | +1 | | | -1 | | | +1 | | | | | | | | | | | | | | |
| $\delta u_{s_2 s_3}^{i'}$ | | p1 | p2 | p3 | i' | 1' | 2' | 3' | 1' | 2' | 3' | 1' | 2' | 3' | 1' | 2' | 3' | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1' | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2' | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | |
| | | 3' | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | -1 | +1 | -1 | 1' | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 2' | | | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 3' | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | | -1 | +1 | -1 | 1' | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 2' | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 3' | 2 $\bar{\rho}$ | | | $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | | +1 | +1 | -1 | 1' | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 2' | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| 3' | $\bar{\rho}$ | | | | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | +1 | +1 | +1 | 1' | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2' | | | | | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | 3' | $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 2 $\bar{\rho}$ | | | 4 $\bar{\rho}$ | | | | | | | | | | | | | | | |

Рис. 5. Приклад першого блоку матриці мас $m_{\ddot{u}_{s_2 s_3}^{i'}}^{CE}$

Отримані співвідношення для матриці мас є універсальними, оскільки вони відповідають загальному варіанту розробленого просторового багатопарового СЕ. Модифікація скінченного елемента обшивки (СЕО) у скінчений елемент зі зміненими параметрами (СЕМ) виконана в [3, 5] за товщиною обшивки вздовж місцевої осі x^1 .

Коефіцієнти матриці мас для різних варіантів СЕ (СЕО та СЕМ), з яких складається конкретна СЕМО, обчислюються за одними й тими ж співвідношеннями (12). Узагальнені вузлові змінні для загального варіанта СЕ (СЕМ) надалі будемо позначати відміткою “тильда” $\tilde{u}_{s_2 s_3}^{i'}$,

$\tilde{v}'_{s_2s_3}$ та $\tilde{\ddot{v}}'_{s_2s_3}$, $\tilde{v}'_{s_2s_3}$. Вони на різних ділянках ступінчасто-змінної товщини СЕМО розуміються в (11) і (12) як різні змінні в СЕО та СЕМ, що віднесені до серединної поверхні свого СЕ.

Для СЕМ варіація сил інерції $\delta\tilde{K}_{CE}$ відповідно до (11) має наступний вигляд

$$\delta\tilde{K}_{CE} = - \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left(\tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} \right). \quad (13)$$

При формуванні системи розв'язувальних рівнянь СЕМО виникає проблема узгодження різних змінних (вузлових переміщень і прискорень різних типів СЕ) при об'єднанні комбінацій СЕО та СЕМ у єдиний ансамбль елементів. Ця проблема вирішується шляхом визначення залежностей між відповідними коефіцієнтами матриць мас СЕО та СЕМ.

Як єдині невідомі прийняті узагальнені вузлові переміщення та прискорення серединної поверхні СЕО $v'_{s_2s_3}$, $v'_{s_2s_3}$ та $\ddot{v}'_{s_2s_3}$, $\ddot{v}'_{s_2s_3}$. На основі прийнятих положень зв'язок узагальнених вузлових переміщень і прискорень серединних поверхонь СЕО та СЕМ є таким самим як і для їхніх узагальнених вузлових координат [3, 5]. Тому маємо:

$$\tilde{v}'_{s_2s_3} = v'_{s_2s_3} + a_{s_2s_3} v'_{s_2s_3}, \quad \tilde{v}''_{s_2s_3} = b_{s_2s_3} v''_{s_2s_3}, \quad (14)$$

$$\tilde{\ddot{v}}'_{s_2s_3} = \ddot{v}'_{s_2s_3} + a_{s_2s_3} \ddot{v}'_{s_2s_3}, \quad \tilde{\ddot{v}}''_{s_2s_3} = b_{s_2s_3} \ddot{v}''_{s_2s_3}, \quad (15)$$

де $b_{s_2s_3}$ – коефіцієнти зміни довжин ребер СЕ при перетворенні СЕО в СЕМ; $a_{s_2s_3}$ – коефіцієнти зміщення ребер СЕ в напрямку його товщини ($a_{s_2s_3} > 0$, якщо цей напрямок збігається з напрямком осі x^1).

Співвідношення (14), (15) забезпечують умову сумісності та нерозривності вузлових переміщень і прискорень між усіма скінченними елементами СЕМО на різних ділянках оболонки гладко-змінної та ступінчасто-змінної товщини. З залежностей (14), (15) випливає, що СЕО є частковим випадком СЕМ, для якого коефіцієнти $b_{s_2s_3} = 1$, $a_{s_2s_3} = 0$.

Підставляючи (14), (15) у (13), визначаємо $\delta\tilde{K}_{CE}$ СЕМ через єдині невідомі - узагальнені вузлові переміщення $v'_{s_2s_3}$, $v'_{s_2s_3}$ та прискорення $\ddot{v}'_{s_2s_3}$, $\ddot{v}'_{s_2s_3}$, що віднесені до серединної поверхні СЕО:

$$\delta \tilde{K}_{CE} = - \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left(\tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right). \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + a_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + \\ &+ a_{p_2 p_3} b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \end{aligned} \quad (17)$$

– коефіцієнти узгодженої матриці мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – Том 45, №9. – С. 3-40.
2. *Vazhenov V.A., Solovoi N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol. 45. – №9. – Pp. 923-953.
3. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
4. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Успехи механики. В 6-ти томах / Под. ред. А.Н. Гузя. Том 6 (кн. 2). – К.: Литера ЛТД, 2011. С. 609-645.
5. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 336 с.
6. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О., Калашиников О.Б.* Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 172-180.
7. *Блох В.И.* Теория упругости. - Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. - 483 с.
8. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислюцкий, В.В. Киричевский и др. – К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 21.07.2013 р.

Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.

**МАТРИЦА МАСС МОДИФИЦИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО
КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ**

Рассматривается построение матрицы масс пространственного конечного элемента, предназначенного для исследования процессов геометрически нелинейного деформирования упругих неоднородных оболочек при действии нагрузок, изменяющихся во времени.

Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.

**MASS MATRIX OF THE MODIFIED SOLID FINITE ELEMENT FOR
INHOMOGENEOUS SHELLS**

Construction of a solid finite element mass matrix is considered. The element is intended for research of geometrically nonlinear deformation of elastic inhomogeneous shells under loads, changing in time.