

УДК 539.3

Фіалко С.Ю., докт. техн. наук,
Лумельський Д.Є.

СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ РАМ НА СТІЙКІСТЬ

Пропонується трьохвузловий скінченний елемент високого порядку для аналізу стійкості плоских рам. Для апроксимації нормального прогину використовуються ієрархічні функції форми, причому перші чотири, що належать до першого рівня ієрархії, є загальновідомими поліномами Ерміта, а в другому рівні ієрархії застосовуються специфічні поліноми четвертого та п'ятого ступеня. Приведено чисельні результати, що ілюструють швидку збіжність.

Вступ. При аналізі стійкості стержневих систем методом скінченних елементів класичні функції форми – поліноми Ерміта – не дозволяють одержати точне розв'язання задачі, оскільки точний вираз для нормального прогину стержня під дією осьових сил описується комбінацією поліномів і трансцендентних функцій. Якщо вирішувати цю задачу точно, то необхідно відмовитися від класичної апроксимації нормальних прогинів, використовуючи відповідні трансцендентні вирази для функцій форми [1]. Такий підхід дозволяє одержати точне значення критичної сили, однак у рамках методу скінченних елементів (МСЕ) приводить до задачі на власні значення виду

$$\mathbf{A}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

де λ - параметр навантаження, \mathbf{u} – вектор вузлових переміщень. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(\mathbf{A}(\lambda)) = 0,$$

в якому коефіцієнти матриці \mathbf{A} є трансцендентними функціями від параметра навантаження λ . Недоліком цього підходу є відсутність ефективних методів рішення таких задач. Як правило, задається послідовність зростаючих значень параметра λ і, використовуючи **LDL** розкладання матриці \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{L}^T(\lambda),$$

визначається знак визначника $\det(\mathbf{A}(\lambda)) = \prod_{i=1}^N \mathbf{D}_i$, де N – розмірність задачі. Інтервал, укладений між двома суміжними значеннями параметра λ , на границях якого визначник змінює знак, містить критичне значення параметра λ_{cr} . Дроблячи цей інтервал, можна уточнювати значення λ_{cr} . Проблема такого підходу очевидна. По-перше, при щільному спектрі власних чисел задачі (1) стає важко, а іноді неможливо локалізувати мінімальне власне число. По-друге, форма втрати стійкості, що відповідає пошукованому власному числу, часто визначається з значною похибкою і буває недостовірною. По-третє, для великих розрахункових моделей такий алгоритм дуже витратний, оскільки вимагає багаторазового перерозкладення матриці \mathbf{A} .

Якщо використовувати класичну інтерполяцію функції нормального прогину (поліноми Ерміта), то розв'язання виходить наближеним, причому в ряді випадків значення критичного навантаження істотно завищено. Зате параметр навантаження в коефіцієнті матриці входить лінійно, і задача зводиться до алгебраїчної узагальненої проблеми власних значень

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{G}\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{K}, \mathbf{G} – матриці жорсткості і геометричної жорсткості. Методи розв'язування задачі (2) добре відпрацьовані [5], високо ефективні і дозволяють з високим ступенем достовірності визначати як власні числа, так і власні вектори навіть для задач високої розмірності, що мають близькі або строго кратні власні числа.

Для зменшення похибки, зв'язаної з наближеним представленням нормальних прогинів у межах кожного скінченного елемента, варто дробити стержні на окремі скінченні елементи (СЕ), оскільки поліноми Ерміта не можуть точно описати функцію нормального прогину при втраті стійкості. Багаторічний досвід одного з авторів, заснований на підтримці програмних комплексів SCAD та Robot Millennium [4, 6], свідчить про те, що інженер-будівельник практично ніколи не поділяє стержні рам на кілька СЕ. Крім суб'єктивних причин, зв'язаних з нерозумінням вище згаданого факту, існує ще й об'єктивна причина. Справа в тим, що дроблення стержнів рам на окремі СЕ означає, що для розв'язування задачі стійкості необхідно створити іншу розрахункову модель, що відрізняється від тієї, котра використовувалась для статичного аналізу. Але це – додаткова робота, що вимагає витрат часу.

У даній роботі пропонується стержневий тривузловий скінченний елемент, що дозволяє істотно наблизити значення критичної сили до точного розв'язку задачі за рахунок підвищення порядку апроксимуючих функцій. Це дозволяє без дроблення стержнів рам на СЕ одержувати прийнятний для практичного аналізу результат, приводячи задачу стійкості до виду (2), що допускає використання будь-яких високоефективних методів розв'язування алгебраїчної часткової узагальненої проблеми власних значень. Пропонований СЕ легко узагальнюється на випадок просторової задачі і може бути використаний для аналізу стійкості як стержневих систем, так і комбінованих.

Тривузловий скінченний елемент. Використовується ієрархічна інтерполяція переміщень [3] СЕ в локальній системі координат

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= U_i \varphi_1(\xi) + U_j \varphi_4(\xi) + \Delta U_k \varphi_1(\xi); \\
 &\quad \text{основне поле переміщень} \quad \text{коригувальне} \\
 w(\xi) &= W_i \varphi_2(\xi) + \Theta_i \varphi_3(\xi) + W_j \varphi_5(\xi) + \Theta_j \varphi_6(\xi) + \\
 &\quad \text{основне поле переміщень} \\
 &\quad + \Delta W_k \varphi_8(\xi) + \Delta \Theta_k \varphi_9(\xi), \\
 &\quad \text{коригувальне}
 \end{aligned}$$

де $U_i, W_i, \Theta_i, U_j, W_j, \Theta_j$ – значення переміщень і кутів повороту у вузлах i, j відповідно, $\Delta U_k, \Delta W_k, \Delta \Theta_k$ – значення збільшення переміщень і кутів повороту у середньому вузлі k (рис. 1), $\varphi_1(\xi) - \varphi_6(\xi)$ – класичні функції форми (поліноми Ерміта), що є базисом основного поля переміщень, (перша ступінь ієрархічного базису), а $\varphi_7(\xi) - \varphi_9(\xi)$ – функції форми (рис. 2, 3), що є базисом коригувального поля переміщень (друга ступінь ієрархічного базису), $\xi = \frac{x}{a}$, x – координата уздовж осі стержня. При такому представленні інтерполяція основного поля переміщень у точності збігається з відповідною інтерполяцією двовузлового класичного скінченного елемента, а коригувальне поле переміщень відіграє роль добавки, що уточнює основне поле переміщень. Наведена інтерполяція задовольняє вимозі твердих зсувів, тобто якщо СЕ перемістити в просторі як абсолютно тверде тіло, то деформації і зусилля дорівнюють нулеві.

Функції форми приведені нижче.

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 1 - \xi; \quad \varphi_2(\xi) = 1 - 3 \cdot (\xi)^2 + 2 \cdot (\xi)^3; \\ \varphi_3(\xi) &= a \cdot (-\xi + 2 \cdot (\xi)^2 - (\xi)^3); \quad \varphi_4(\xi) = \xi; \quad \varphi_5(\xi) = 3 \cdot (\xi)^2 - 2 \cdot (\xi)^3; \\ \varphi_6(\xi) &= a \cdot ((\xi)^2 - (\xi)^3); \quad \varphi_7(\xi) = 4 \cdot \xi \cdot (1 - \xi); \\ \varphi_8(\xi) &= 16(\xi - 0.5)^4 - 8(\xi - 0.5)^2 + 1; \\ \varphi_9(\xi) &= 16 \cdot a \cdot (\xi - 0.5)^5 - 8 \cdot a \cdot (\xi - 0.5)^3 + a \cdot (\xi - 0.5). \end{aligned}$$

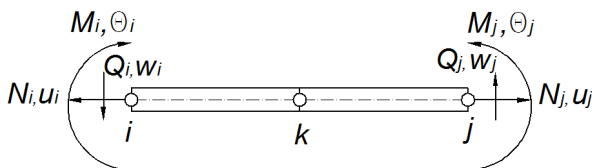


Рис. 1. Тривузловий скінченний елемент

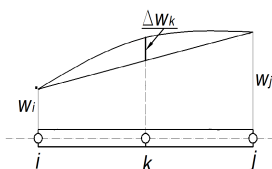


Рис. 2. Вузлові переміщення в крайніх та середнім вузлах

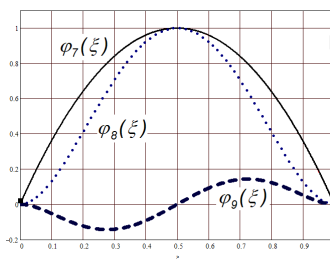


Рис. 3. Функції форми коригуючого поля переміщень

Для одержання матриць жорсткості та геометричної жорсткості скінченного елемента в локальній системі координат застосуємо принцип можливих переміщень

$$\delta E = \delta(\Pi + W) = \int_0^a (M \delta \kappa + N \delta \varepsilon) dx - N \delta \Delta = 0,$$

де останній доданок являє собою роботу подовжних сил при переході з докритичного рівноважного стану в суміжний при втраті стійкості, a – довжина СЕ, Π – потенційна енергія пружної деформації, W – зміна потенціалу зовнішніх сил, M – згинальний момент, N – подовжня сила, κ

– зміна кривизни осі стержня, ε – деформація уздовж осі стержня, Δ – зближення торців при втраті стійкості. Відомо [2], що

$$\Delta = \frac{I}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

В результаті одержуємо матрицю жорсткості K_e :

	i		\vdots	j		\vdots	k	
	$\frac{EA}{a}$	0	0	$-\frac{EA}{a}$	0	0	0	0
i	0	$\frac{12EI}{a^3}$	$-\frac{6EI}{a^2}$	0	$-\frac{12EI}{a^3}$	$-\frac{6EI}{a^2}$	0	0
	0	$-\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{4EI}{a}$	0	$\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{2EI}{a}$	0	0
...
	$-\frac{EA}{a}$	0	0	$\frac{EA}{a}$	0	0	0	0
j	0	$-\frac{12EI}{a^3}$	$\frac{6EI}{a^2}$	0	$\frac{12EI}{a^3}$	$\frac{6EI}{a^2}$	0	0
	0	$-\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{2EI}{a}$	0	$\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{4EI}{a}$	0	0
...
	0	0	0	0	0	0	$\frac{16EA}{3a}$	0
k	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{204,8EI}{a^3}$
	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{36,5714EI}{a}$

і матрицю геометричної жорсткості G_e :

	i		\vdots	j		\vdots	k	
	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	$\frac{6N}{5a}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-\frac{6N}{5a}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-0,22857N$
	0	$-\frac{N}{10}$	$\frac{2Na}{15}$	0	$\frac{N}{10}$	$-\frac{Na}{30}$	0	$-0,53333N$ $0,11429Na$
...
	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	$-\frac{6N}{5a}$	$\frac{N}{10}$	0	$\frac{6N}{5a}$	$\frac{N}{10}$	0	$0,22857N$
	0	$-\frac{N}{10}$	$-\frac{Na}{30}$	0	$\frac{N}{10}$	$\frac{2Na}{15}$	0	$0,53333N$ $0,11429Na$
...
	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	0	$-0,53333N$	0	0	$0,53333N$	0	$\frac{4,87619N}{a}$
	0	$-0,22857N$	$0,11429Na$	0	$0,22857N$	$0,11429Na$	0	$0,40635Na$

Кожна з матриць представлена у виді блоків, коефіцієнти яких відносяться до відповідних вузлів i, j, k . Внаслідок ієрархічності функцій

форми кожна з підматриць, зв'язаних з вузлами i, j , співпадає з відповідними підматрицями двовузлового класичного СЕ.

Дослідження виконані на основі комп'ютерної системи SOLVER, для визначення значень критичних сил і форм втрати стійкості використовувався метод спряжених градієнтів з передобумовленням [5].

Для оцінки точності і збіжності запропонованого скінченного елемента було розв'язано кілька задач. Перш за все розглянемо стержень одиничної довжини, стиснутий одиничною силою, при різних граничних умовах.:

$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, M(a) = Q(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ1}) \quad (8)$$

$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, w(a) = M(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ2}) \quad (9)$$


$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, w(a) = \theta(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ3}) \quad (10)$$

Чисельні результати. Відповідні результати приведені в таблицях 1 – 3, причому для всіх розглянутих скінченних елементів використовується поліноміальна інтерполяція, що дозволяє звести задачу до форми (2).

Найбільш несприятливими є умови закріплення ГУ3 (табл. 3). При відсутності дроблення (весь стержень моделюється одним скінченним елементом) похибка для тривузлового СЕ складає порядку 6%. Класичний двовузловий СЕ в цьому випадку взагалі не дає розв'язання, оскільки бракує ступенів свободи: $W_i = \theta_i = W_j = \theta_j = 0 \rightarrow w(\xi) = 0$. При розподілі стержня на два СЕ похибка тривузлового СЕ складає менш 0.01%. Для інших типів закріплення при відсутності дроблення стержня на СЕ похибка для тривузлового СЕ не перевищує 0.1% (табл. 1, 2).


Таблиця 1

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ1

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	4971.9	0.8%	4934.8	0.001%	
	2	4937.3	0.05%	4934.8	$3.8 \times 10^{-6}\%$	
	4	4934.9	0.004%	4934.8	$3.8 \times 10^{-6}\%$	


Таблиця 2

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ2

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	24000	21.6%	19750.2	0.056%	
	2	19887.7	0.8%	19739.2	$1.52 \times 10^{-4} \%$	
	4	19749.3	0.05%	19739.2	$5,1 \times 10^{-5} \%$	

Таблиця 3

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ3

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	–	–	84000	6.39%	
	2	80000	1.38%	78958.0	0.0025%	
	4	79550.0	0.8%	78957.0	0.0012%	

На рис. 4 показана форма втрати стійкості типової багатоповерхової рами. Для кожної зі стиснутих стійок реалізується загальна форма втрати стійкості, що охоплює всі стержні рами. Для такої системи результати, одержані на основі класичного двовузлового СЕ, є цілком прийнятними (табл. 4).

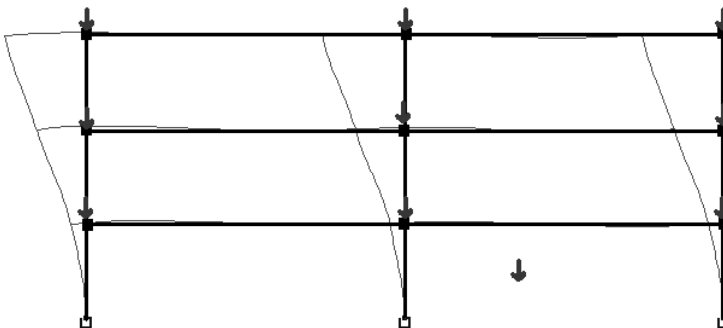


Рис. 4. Загальна форма втрати стійкості багатоповерхової плоскої рами

На рис. 5, 6 наведені приклади, у яких форма втрати стійкості носить локальний характер, тобто охоплює незначну кількість стержнів. З таблиць 5, 6 видно, що при відсутності дроблення стержнів рами на СЕ стандартний двовузловий СЕ дає завищене значення критичного навантаження на 69% – 73% в порівнянні з точним розв'язанням, а запропонований тривузловий СЕ – на 1%. При розподілі стержнів на два СЕ похибка для двовузлового СЕ складає порядку 3%, а тривузлового – не перебільшує 0.2%.

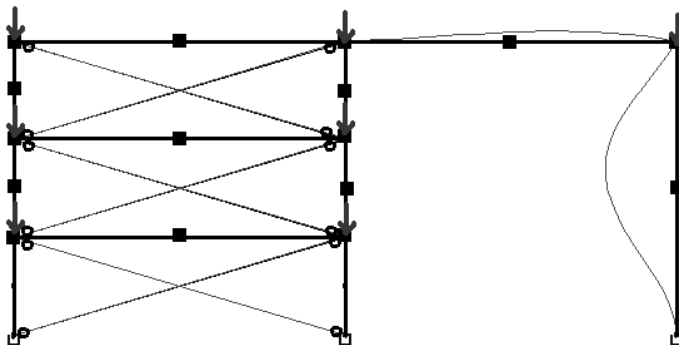


Рис. 5. Локальна форма втрати стійкості плоскої рами

Таблиця 4

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 4

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	45291.5	1.0%	44907.1	0.15%	44838.2
2	45063.7	0.5%	44906.7	0.15%	
4	44917.7	0.18%	44906.7	0.15%	

Таблиця 5

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 5

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	79167.7	73.6%	46060.4	1%	45610.2
2	46919	2.9%	45638.5	0.06%	
4	45751	0.31%	–	–	

Таблиця 6

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 6

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	7537.1	69.5%	4493.3	1.1%	
2	4562.4	2.6%	4454.7	0.2%	
4	4465.3	0.4%	4454.5	0.2%	4446.4

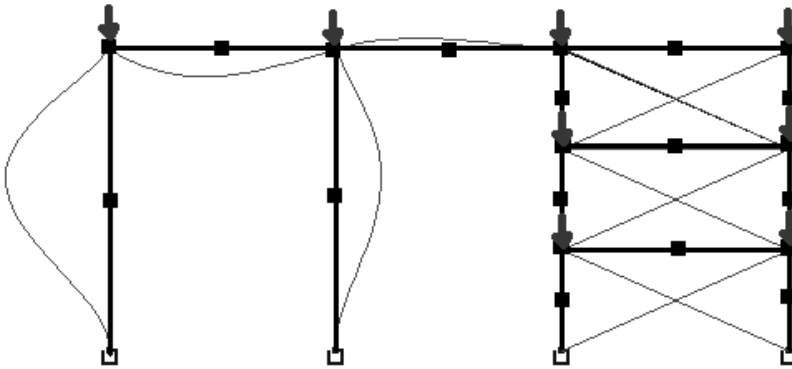


Рис. 6. Локальна форма втрати стійкості плоскої рами

Висновки. Для рам, що втрачають стійкість за локальною формою, стандартний двовузловий СЕ (функції форми – поліноми Ерміта) завищує значення критичної сили до 70%, що є неприйнятним. При цьому потрібно або відмовитися від поліноміальної інтерполяції при побудові функцій форми, перейшовши до неефективного алгоритму розв’язування задачі, або, залишаючись у рамках інтерполяції поліномами Ерміта, виконати розподіл стержнів рами на скінченні елементи.

Запропонований тривузловий скінченний елемент при визначенні критичного навантаження в таких задачах приводить до похибки, що не перевищує 1% без будь-якого розподілу стержнів рам, що є цілком прийнятним для практики. Оскільки поліноміальний характер інтерполяції зберігається, задача зводиться до алгебраїчної узагальненої часткової проблеми власних значень, для рішення якої розроблені ефективні алгоритми.

1. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / *А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лацеников, Н.Н. Шапошников*. – М.: Стройиздат, 1984. – 414 с.
2. Устойчивость деформируемых систем. / *А.С. Вольмир*, Изд.2, перераб. и доп. – М.: 1967. – 984 с.
3. The finite element method / *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor*. — N.Y.: McGraw-Hill—2000, vol. 1—688 p.
4. SCAD для пользователей / *В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер, А.Т. Трофимчук* — К.: Изд-во Компас, 2000.— 332 с.
5. *Фиалко С.Ю.* О решении обобщенной проблемы собственных значений. — В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И., Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. — Издание второе. – К.: Сталь — 2002, — С. 570—597.
6. Robot Millennium. User's Guide (<http://robot-structures.com/us/>).

Надійшла до редколегії 24.11.2006 р.