

УДК 539.3:624.071:624.01

Цихановський В.К., д-р техн. наук
Прусов Д.Е., канд. техн. наук.

УТОЧНЕНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЖОРСТКИХ АЕРОДРОМНИХ ПОКРИТТІВ НА СЛАБКИХ ГРУНТОВИХ ОСНОВАХ З УРАХУВАННЯМ НЕОДНОРІДНОСТІ МАТЕРІАЛУ І ОСОБЛИВОСТЕЙ СТИКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПЛИТ

Вступ. Пропонується у найбільш загальному підході розглядати конструкції жорстких аеродромних покриттів як механічні системи з тонких пластинок (плит), у тому числі гнучких, із міцних матеріалів: залізобетону, фібробетону, тришарового композиту (металопрокату, керамзитобетону і сталльної сітки) та інших композитних матеріалів, які взаємодіють з лінійно-пружною неоднорідною ґрунтовою основою.

Постановка задачі. За основне навантаження приймається вертикальне колісне навантаження від основних опор сучасних повітряних кораблів типу В-747, ІЛ-62м, А-300(380) та інших. Розрахунки на міцність таких покриттів пов'язані з дослідженням напружено-деформованого стану, розрахункового фрагменту, який складається з набору тонких плит (розмірами 7,5x10(15)м) за розрізною або нерозрізною схемами. На пружній основі з урахуванням однібічних однібічних в'язів. Найбільш поширена розрізна схема взаємодії конструктивних елементів покриттів, тобто необхідне моделювання в розрахункових схемах стикових з'єднань плитних конструкцій, які сприймають тільки зусилля стиску, а згинні моменти мають нульові значення.

Вихідна математична модель задачі. У даній методиці розрахунку тонких плит на пружній основі пропонується спрощена математична модель пружної неоднорідної основи з використанням гіпотези пропорційності між додатнім прогином пластини і реакцією пружної основи, при цьому враховується, що коефіцієнт пропорційності є функцією від місцевих координат розрахункового фрагменту покриття:

$$q(x^2, x^3) = -c(x^2, x^3)V, \quad (1)$$

де $q(x^2, x^3)$ — функція реакції основи; $c(x^2, x^3)$ — функція коефіцієнта пропорційності (постелі); V — прогин пластинки у даній точці за нормаллю до серединної поверхні пластинки у деформованому стані.

Величина коефіцієнта постелі залежить від еквівалентного модуля деформації нашарувань штучної і ґрунтової основи покриттів. Функція (1)

визначається за емпіричними формулами, зведеними до двовимірного сплайну, що натягнутий на точковий каркас апроксимуючих функцій у напрямках x^2 ; x^3 , що можуть бути описані функціональним степеневим рядом, коефіцієнти якого визначаються за методом найменших квадратів [1].

Задачі деформування механічних систем, що відрізняються наявністю тільки пружно-піддатливих в'язів, тобто є кінематично-рухомими (наявність зміщень і поворотів елементів дискретної моделі як жорсткого цілого) відносяться до класу нелінійних еволюційних задач і їх розв'язок зводиться до моделювання змін властивостей і структури дискретної моделі (скінченно-елементної моделі) у процесі навантаження [2]. Для дискретної скінченно-елементної моделі тонкої гнучкої пластинки на пружній основі варіаційне рівняння руху можна звести до наступного диференціального рівняння руху SE-моделі за методом в'язкої релаксації:

$$[C]\{\dot{u}\} + \{R(u)\} - \{Q(u)\} + \{S(u)\} = 0, \quad (2)$$

де $[C]$ — матриця в'язкого демпфірування SE-моделі; $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ — вектори приростів переміщень і швидкостей SE-моделі; $\{R(u)\}$, $\{Q(u)\}$, $\{S(u)\}$ — матриці узагальнених реакцій внутрішніх, зовнішніх і опору основи SE-моделі.

Рівноважне положення SE-моделі досягається при умові:

$$\{R(u)\} - \{Q(u)\} + \{S(u)\} = 0, \quad (3)$$

- система нелінійних рівнянь рівноваги SE-моделі.

Допущення про пропорційність між прогином і реакцією основи виконується чітко для циліндричної оболонки, занурену в рідину. Якщо порівнювати цю фізичну модель, для якої математична модель побудована на основі методу в'язкої релаксації [2], то вони повністю співпадають і параметр в'язкої релаксації і коефіцієнт пропорційності дорівнюють $C(x^\alpha)$. Виходячи з цього математична модель різницевої схеми оболонки на пружній основі будується на основі рекурентних формул, наведених в [2], з уточненням діагональної матриці жорсткості і вектора зовнішніх впливів, зумовлених впливом лінійно-пружної основи. Для визначення значення коефіцієнта пропорційності основи у даній точці елементарного околу $r(e)$ необхідно знати товщину стискуваної товщі активного півпростору основи $h(x^\alpha)$ і значення загального еквівалентного модуля деформації $E_0(x^\alpha)$:

$$C(x^\alpha) = \frac{E_0(x^\alpha)}{h_0(x^\alpha)}, \quad (4)$$

тобто маємо функцію коефіцієнта постелі основи з розмірністю кгс/см³. Знаючи функцію (4) у скінченно-елементному просторі і приймаючи апроксимуючу функцію у межах $r(e)$ для коефіцієнта постелі можемо визначити узгоджену матрицю реакцій пружної основи, виходячи із першого принципу віртуальної роботи для СЕ-моделі:

$$\sum_{e=1}^E \left[\sigma^{*ij} \delta \gamma_{ij} dV_{(e)} - \int_{r(e)} p^i \delta U_i dV_{(e)} - \int_{r(e)} q^i \delta U_i dS_{(e)} + \int_{r(e)} q_{(0)}^i \delta U_i dS_{(e)} \right] = 0, \quad (5)$$

де $p^i, q^i, q_{(0)}^i$ - компоненти векторів відповідно об'ємних і поверхневих сил зовнішнього навантаження і реакцій основи; σ^{*ij} - компоненти повного тензора напружень.

Після інтегрування по кожній із локальних підобластей $r(e)$ варіаційне рівняння рівноваги СЕ-моделі (5) має наступний вигляд:

$$\sum_{e=1}^E \left[\sum_{P_1 P_2 P_3} R'_{P_1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} + \sum_{P_1 P_2 P_3} P'_{P_1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} - \right. \\ \left. - \sum_{P_1=-1 P_2 P_3} Q'_{P_1=-1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} - \sum_{P_1=+1 P_2 P_3} Q'_{P_1=+1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} + \right. \\ \left. + \sum_{P_1=-1 P_2 P_3} S'_{P_1=-1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} \right] = 0, \quad (6)$$

де $R'_{P_1 P_2 P_3}$ - компоненти нелінійної матриці реакцій у вузлах СЕ узагальнених внутрішніх сил; $P'_{P_1 P_2 P_3}$ - компоненти матриці узагальнених зовнішніх об'ємних сил у вузлах СЕ; $Q'_{P_1=-1 P_2 P_3}, Q'_{P_1=+1 P_2 P_3}$ - компоненти матриці узагальнених поверхневих сил у вузлах СЕ (на нижній і верхній обмежувальних поверхнях оболонки); $S'_{P_1=-1 P_2 P_3}$ - компоненти матриці реакцій пружної основи у вузлах СЕ (на нижній обмежувальній поверхні оболонки).

Компоненти зовнішніх сил і сил реакцій пружної основи можна навести наступними формулами:

$$P'_n = \sum_{m=1}^{m_z=8} \sqrt{G} C_{mn}^{(e)} P'_m, \quad n, m = 1, 2, \dots, 8; \\ Q'_{n(\alpha)} = \sum_{m=1}^{m_z=7} \sqrt{Q_{(P_1=-1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{m(\beta)}, \quad n, m = 1, 3, 5, 7; \quad (7)$$

$$Q'_{n(\alpha)} = \sum_{m=2}^{m_e=8} \sqrt{Q_{(P_1=+1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{m(\beta)}, \quad n, m = 2, 4, 6, 8;$$

$$S'_{n(\alpha)} = \sum_{m=1}^{m_e=7} \sqrt{Q_{(P_1=-1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{(0)m(\beta)}, \quad n, m = 1, 3, 5, 7;$$

де $\sqrt{Q_{(P_1=-1)}}$ - площа нижньої обмежувальної поверхні оболонки в $r(e)$; $\sqrt{Q_{(P_1=+1)}}$ - площа верхньої обмежувальної поверхні оболонки в $r(e)$; $C_{mn}^{(e)}$ - локальна матриця Грамма, яка визначається інтегралом по двовірній області $r(e)$:

$$C_{mn}^{(e)} \equiv \frac{n(\alpha)}{m(\beta)} \begin{matrix} 1(2) & 3(4) & 5(6) & 7(8) \\ 1(2) & 1/9 & 1/18 & 1/18 & 1/36 \\ 3(4) & 1/18 & 1/9 & 1/36 & 1/18 \\ 5(6) & 1/18 & 1/36 & 1/9 & 1/18 \\ 7(8) & 1/36 & 1/18 & 1/18 & 1/9 \end{matrix}, \quad m, n = 1, 3, 5, 7; \quad \alpha, \beta = 2, 4, 6, 8. \quad (8)$$

Компоненти реакцій основи $q'_{(0)(m)}$, що використовуються у (8) визначаються за формулою:

$$q'_{(0)(m)} = -\frac{E_{(0)(m)}}{h_{(0)(m)}} n'_{(m)} u'_{(m)} k'_{(m)} n'_{(m)}. \quad (9)$$

З урахуванням (4)–(8) остаточно отримуємо рекурентну формулу неявного інтегрування диференціального рівняння руху (2):

$$\begin{aligned} & \left[K_{(NL)}^{i'j'} + C_{(N)}^{(n)} N_{(N)}^{(i')} N_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)} \right] \Delta \left\{ U_{(L)i+1}^{i'(n+1)} \right\} = \\ & = \left\{ Q_{(N)} \left\{ U_{(N)i}^{i'(n+1)} \right\} \right\} - \left\{ R_{(N)} U_{(N)i}^{i'(n+1)} \right\} - \left\{ S_{(N)}^{i'} \right\} \\ & \left\{ U_{i+1}^{i'(n+1)} \right\} = \left\{ U_i^{i'(n+1)} \right\} + \Delta \left\{ U_{i+1}^{i'(n+1)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $K_{(NL)}^{i'j'}$ - матриця жорсткості СЕ-моделі, що зумовлена фізико-механічними властивостями матеріалу пластинки і переднапружень на n -ному кроці подовження за параметром; $C_{(N)}^{(n)} N_{(N)}^{(i')} N_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)}$ - матриця приростів жорсткості СЕ-моделі, зумовлених взаємодією з лінійно-пружною основою; $n_{(N)}^{(i')}$, $n_{(L)}^{(j')}$ - компоненти вектора одиничної нормалі в вузлах N і L пластинки; $C_{(N)}^{(n)} = E_{(0)(N)} / h_{(0)(N)}$ - наведений вузловий коефіцієнт постелі основи; n —

ітерації, що зумовлені методом подовження за параметром збурення; i - ітерації

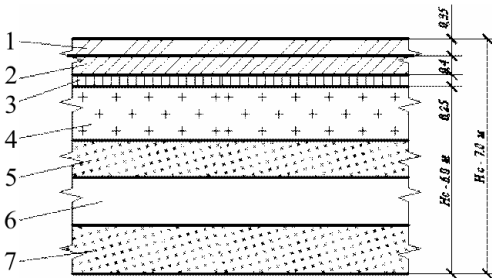


Рис.1. Конструктивна схема покриття:

- 1 – цементобетон марки В45; 2 – бетон марки В35;
- 3 – ґрунтоцемент В10; 4 – супісок лесовидний;
- 5 – супісок пілуватий; 6 – пісок м'який;
- 7 – супісок пілуватий

за методом Ньютона-Канторовича.

В якості прикладу розглядається задача розрахунку на міцність двошарового бетонного покриття перону на штучній основі із ґрунтоцементу.

Конструктивна схема покриття і активної зони стиску ґрунтової основи наведена на рис. 1.

Розрахункова модель задачі. Для здійснення чисельного розрахунку на міцність використання найбільш ефективна схема МСЕ — момент на схема скінченних елементів [2, 3, 4].

Для побудови розрахункової схеми фрагменту покриття при дії колісного навантаження від найбільш сучасного повітряного корабля В-747-400 попередньо були отримані еквівалентні геометричні параметри і фізико-механічні характеристики тришарової конструкції покриття перону, виходячи з граничних подовжньої і згінної жорсткостей реальної конструкції покриття (рис. 1). Схема побудови еквівалентного перерізу покриття і моделі стикового з'єднання тонких плит за розрізною схемою з умови забезпечення максимального кута повороту перерізу плити без порушення сумісності деформацій на границі скінченних елементів (введення порожнини на 1/3 товщини плити і зниження жорсткості елемента включення на стику з'єднання на порядок нижче розрахункової жорсткості плити) наведені на рис.2. Формули для отримання параметрів еквівалентного (приведеного розрахункового) перерізу покриття наведені в [2]. Для отримання вузлових значень функції коефіцієнта постелі (1) у випадку наявності лінзоподібного ґрунтового прошарку з відомими амплітудами і граничними значеннями коефіцієнта постелі C_0 і C_{max} використовувалась у першому наближенні аналітична сплайн-функція:

$$C_N(x^2, x^3) = C_0 - (C_{max} - C_0) \sin \frac{\pi \cdot x_N^2}{e^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_N^3}{e^3}, \quad (11)$$

де x_N^2, x_N^3 — поточні місцеві координати вузлів розрахункового фрагменту (в глобальній системі координат); e^2, e^3 — розміри

розрахункового фрагменту відповідно по z^2 і z^3 глобальної системи координат (рис. 3).

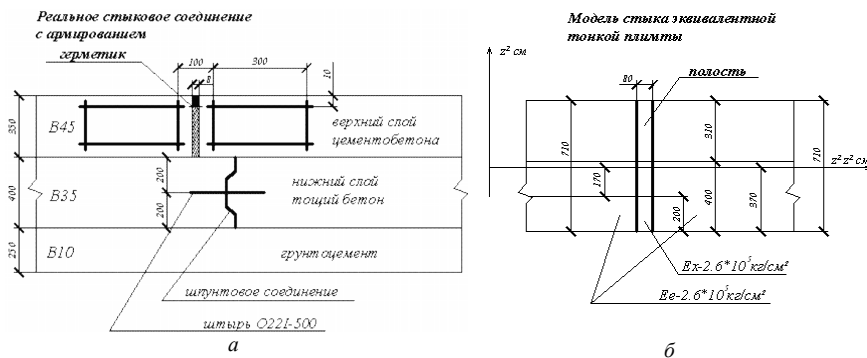


Рис.2. Моделювання стикового з'єднання плит

Дискретна скінченно-елементна модель і розрахункова схема покриття з еквівалентною ізотропною фізичною моделлю: $E_e=3,027 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $h_e=74 \text{ см}$; $V_e=0,231$ наведені на рис. 3. Скінченно-елементна модель з урахуванням площин симетрії (вздовж вісі фюзеляжу літака) включає 4 плити покриття розмірами $750 \times 750 \times 75 \text{ см}$. Сіткова область розрахункового фрагменту побудована так, що включає дискретні моделі пневматичних відбитків коліс основних опор літака В-747-400 — 4 СЕ для кожного відбитку (див. позначені жирною лінією квадратні відбитки на рис. 3), що відповідає 9-ти вузловим зосередженим вертикальним силам (в центрі $Q_1=85552,12 \text{ кг}$; на ребрі $Q_2=4276,06 \text{ кг}$; і на куту $Q_3=2138,03 \text{ кг}$). З урахуванням симетрії колісні відбитки основних опор розміщені на одній плиті для виявлення їх взаємного впливу (див. рис. 4).

Результати розрахунку наведені також у вигляді епюр у перерізах 1-1 і 2-2 розрахункового фрагменту: переміщень, згинних погонних моментів і реакцій основи (рис. 5, 6).

На рис. 4 приведені ізолінії погонних згинних моментів M^3_N , за якими можна зробити висновок про локальний характер їх розподілу в області основних опор літака.

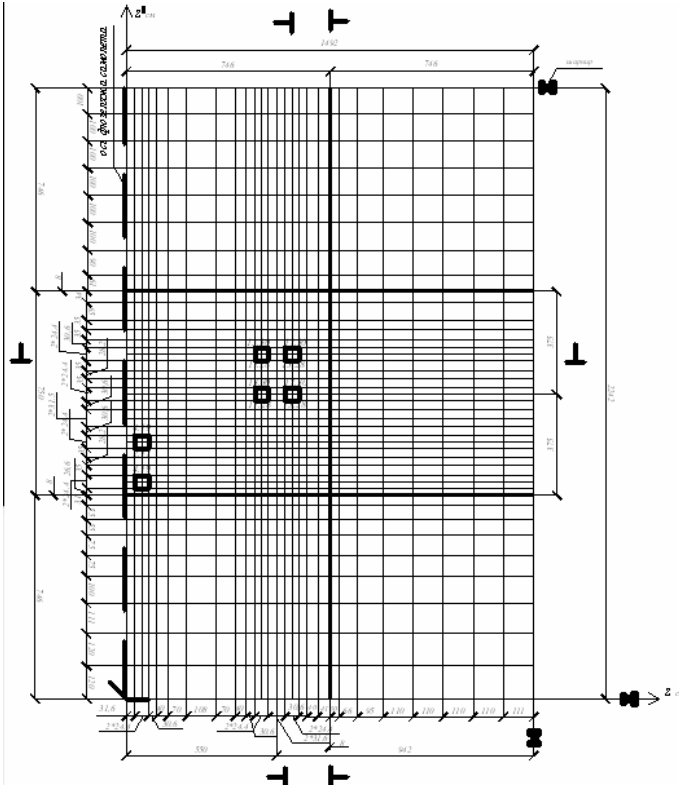


Рис.3. Розрахункова схема покриття перрону

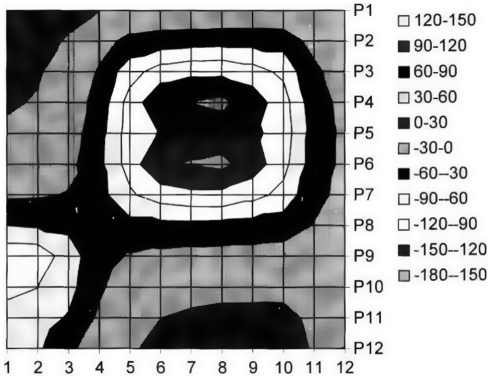


Рис.4. Ізольнії згинних погонних моментів M^{33} у плиті бетонного покриття

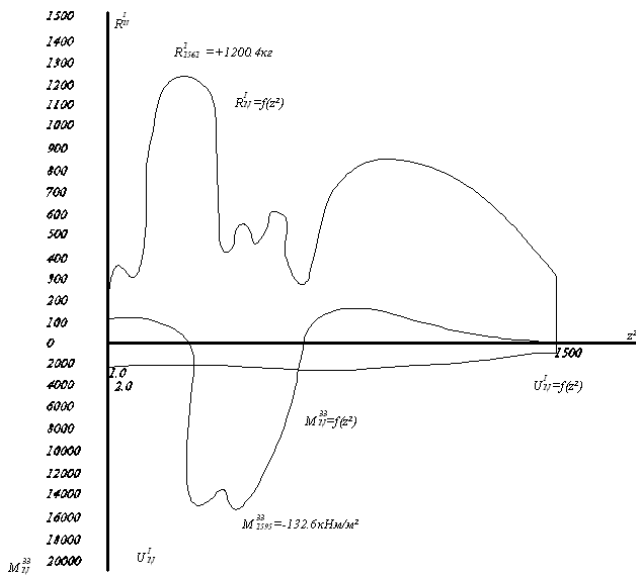


Рис. 5. Епюри у перерізі 1-1: переміщень U_N^1 , згинних погонних моментів M_N^{33} , і реакцій пружної основи R_N^1

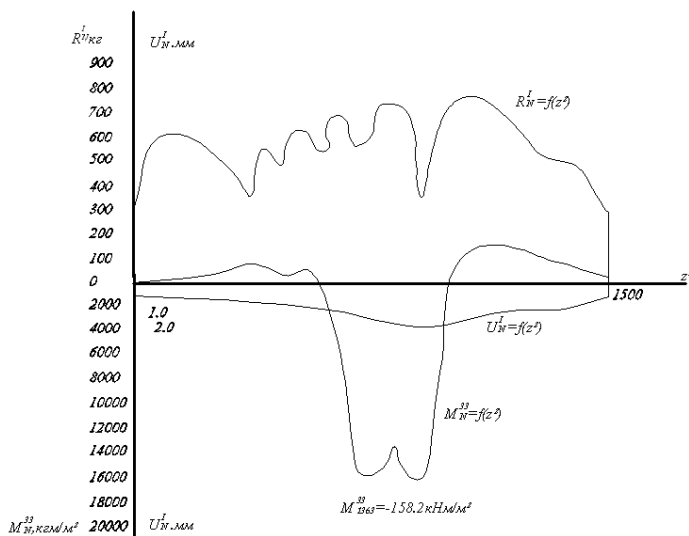


Рис. 6. Епюри у перерізі 2-2: переміщень U_N^1 , згинних погонних моментів M_N^{33} , і реакцій пружної основи R_N^1

Висновки. За результатами розрахунку на міцність можна зробити наступні висновки:

— епюри прогинів мають плавний характер, максимальне значення прогинів при постійному значення коефіцієнта постелі ($c=4,13 \text{ кг/см}^3$) складає $U^1_{1267}=-1,23 \text{ мм}$, а при змінному ($c_0=4,63 \text{ кг/см}^3$, $c_{\max}=4,63 \text{ кг/см}^3$) складає $U^1_{1579}=-1,55 \text{ мм}$;

— епюри погонних згинних моментів мають ярко вразливий синусоподібний характер з чітким локальним імпульсом в області дії основної крайньої опори, ординати епюри досягають максимуму на площадках з нормаллю за направленням x^3 при постійному коефіцієнті постелі — $M^{33}_{1363}=-151,99 \text{ кНм}$, а при перемінному коефіцієнті постелі — $M^{33}_{1455}=-170,38 \text{ кНм}$;

— епюри вузлових реакцій пружної основи мають нерівномірний, стрибкоподібний характер, деякі імпульси зумовлені нерівномірністю сіткової області. За епюрами вузлових реакцій пружної основи визначається максимальна реакція для розрахунку штирів стикового з'єднання плит покриття.

Результати розрахунку на міцність наведеного прикладу конструктивного рішення бетонного покриття перону свідчить про універсальність запропонованої методики дослідження НДС тонких плит на пружній неоднорідній основі, яка дозволяє урахувати: адекватність впливу стикових з'єднань плит на розподіл внутрішніх зусиль; нерівномірність розподілу у полі плити значень коефіцієнта постелі пружної основи; концентрації нормальних і зсувних напружень у плиті; довілну схему впливів колісного навантаження для будь-якого типу повітряного корабля. Використання чисельних розрахунків на міцність дозволяє зробити аналіз характеру розподілу внутрішніх зусиль у плиті і реакцій пружної неоднорідної ґрунтової основи, і знайти найбільш критичну схему колісного навантаження на комбінацію плит розрахункового фрагменту.

1. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А.* Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики). – К.: «Вища школа», 1977. – 408 с.
2. *Баженов В.А., Цыхановский В.К., Кислюцкий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386с.
3. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механики НАН Украины. – 2002. – Т.38 (48), №6. – С.24-63.
4. *Сахаров О.С.* Тензорні ряди в моментній схемі метод скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип.68.– Київ, КНУБА.– 2000.– С.122–129.

Надійшло до редакції 06.12.2006 р.