

УДК 539.3

Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Максим'юк Ю.В.
Сизевич Б.І.

РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ МССЕ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ УШКОДЖЕНОСТІ МАТЕРІАЛУ

Отримані розрахункові співвідношення МССЕ для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружності з урахуванням ушкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання. Використання чотирикутних скінченних елементів довільної форми з урахуванням змінності компонент метричного тензора забезпечує високу ефективність підходу.

Вступ. Значна кількість відповідальних елементів конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла обертання, в процесі виготовлення і експлуатації терплять великих формозмінень, які нерідко проходять при підвищених температурах, що призводить до зміни фізико-механічних характеристик матеріалу і розвитку різного виду деформацій. Зважаючи на можливість одночасного виникнення деформацій пластичності і повзучості, обумовлених як наявністю силового навантаження, так і наявністю зовнішніх температурних впливів, визначення несучої здатності цих об'єктів потребує розв'язання задач термов'язкопружності з урахуванням ушкодженості матеріалу. Вірогідність розв'язання таких задач механіки деформівного твердого тіла суттєво залежить від адекватності використовуваних фізичних співвідношень розглядуваним процесам деформування матеріалу, зокрема урахуванню наявності великих деформацій та ушкодженості матеріалу.

Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень (МССЕ) геометрично нелінійних задач термов'язкопружності для вісесиметричних тіл обертання з урахуванням ушкодженості матеріалу.

1. Вихідні співвідношення геометрично нелінійної задачі. При дослідженні геометрично нелінійних задач для вісесиметричних тіл обертання доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Розглянемо вісесиметричне тіло (рис.1.1) в базисній круговій циліндричній системі координат $z^{i'}$, вісь $z^{1'}$ яка співпадає з віссю обертання, а $z^{2'}$ спрямована вздовж радіуса. Базисна система координат є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови. В свою чергу місцева система координат x^i призначена для отримання розрахункових співвідношень в границях СЕ.

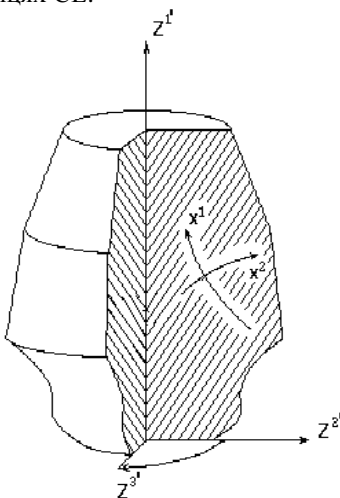


Рис.1.1. Вісесиметричне тіло в базисній круговій циліндричній системі координат

1.1.Визначення деформацій в геометрично нелінійних задачах.

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій x^i і актуальній X^i . Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(F^{ij} - G^{ij}). \quad (1)$$

де F^{ij} – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензору в початковій відрахунковій конфігурації g_o^{ij} , $F^{ij} = g_o^{ij}$, G^{ij} – компоненти метричного тензору в актуальній конфігурації.

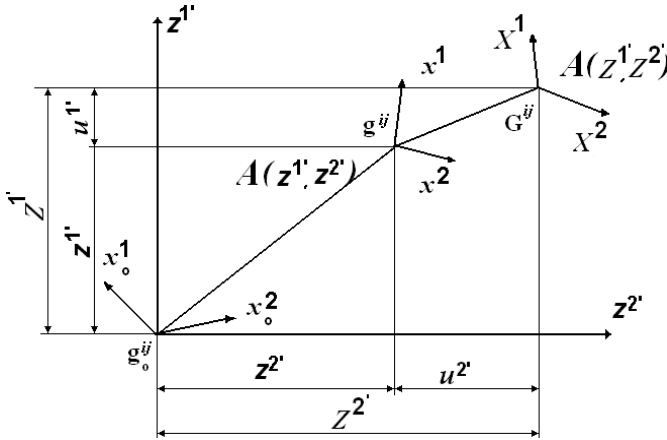


Рис 1.2.

Введемо проміжну перемінну відрхункову конфігурацію x^i (рис.1.2), компоненти метричного тензора якої позначимо через g^{ij} . Перемінну відрхункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з G^{ij} :

$$\Delta G^{ij} = (G^{ij} - g^{ij}) \ll G^{ij}. \quad (2)$$

Використовуючи перемінну відрхункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрхункової до перемінної і від перемінної до актуальної конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij},$$

де

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (g_o^{ij} - g^{ij}),$$

$$\Delta \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij}. \quad (3)$$

Коваріантні компоненти ΔG^{ij} визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (4)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2):

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik})(g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (5)$$

Нехтуючи приростом малих величин $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$, одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0,$$

звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{jl}. \quad (6)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (7)$$

На (рис.1.2) показано положення деякої точки А, що належать відрахунковій і актуальній конфігурації.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення $z_{,\beta}^{\alpha'}$, і $Z_{,\beta}^{\alpha'}$ відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}, \quad Z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_{\beta}}. \quad (8)$$

Подамо компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензора базисної декартової системи координат:

$$g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2$$

$$g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (9)$$

Нове положення точки А в системі $z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по x^i , визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}.$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора $G_{\alpha\beta}$ в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= (z_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'}) (z_{,\beta}^{v'} + u_{,\beta}^{v'}) = \\ &= z_{,\alpha}^{v'} z_{,\beta}^{v'} + z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} \\ G_{33} &= (z^{2'} + u^{2'})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Перепишемо (10) в вигляді :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, & G_{33} &= g_{33} + \Delta G_{33}, \\ \text{де } \Delta G_{\alpha\beta} &= z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'}, & \Delta G_{33} &= \left(2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (7), опускаємо в подальшому знак Δ запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахованій конфігурації:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'}), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} (2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Згідно з прийнятим припущенням, співвідношення (12) справедливе при малих $\Delta\varepsilon_{kl}$ і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'}), \\ \hat{\varepsilon}_{33} &= z^{2'} u^{2'}. \end{aligned} \quad (13)$$

1.2. Основні співвідношення термов'язкопружнопластичності. При наявності незворотних деформацій пластичності і повзучості зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння і теорії спрочнення [5]. В цьому випадку прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, прирощень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$ і прирощень деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, та

температурних складових деформацій $d\varepsilon_{ij}^t$ тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^t. \quad (14)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (15)$$

$$C^{ijkl} = \left[\mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right],$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$, що залежать від температури T :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (16)$$

Температурні деформації малі і визначаються формулою:

$$\varepsilon_{ij}^t = \beta^t T g^{ij}, \quad (17)$$

де $\beta^t = \beta^t(T)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Прирощення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом [5]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (18)$$

де f_p – функція текучості ; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$ – компоненти девіатора напружень; $\sigma_0 = \sigma_{ii}$:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p, T)]^2 = 0, \quad (19)$$

де $\tau_s(\vartheta_p, T)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}}$ – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (20)$$

де f_c – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0; \quad (21)$$

$\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ij c}$ –

параметр зміцнення Одквіста; $\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^{c} d\xi_c^{ij}$ – інтенсивність

швидкостей деформацій повзучості.

Тензор деформацій повзучості величина індиферентна. Швидкості деформацій повзучості повинні задовольняти цій властивості. Для цього від тензору деформацій повзучості необхідно визначити об'єктивну похідну за часом. Для отримання індиферентної величини швидкості деформацій повзучості обчислюються об'єктивна похідна Олдройда:

$$\dot{\xi}_c^i = \frac{\partial \varepsilon_c^{ij}}{\partial t} \bar{R}_i \bar{R}_j = \dot{\varepsilon}_c^{ij} \bar{R}_i \bar{R}_j,$$

де \bar{R}_i, \bar{R}_j - векторні бази в актуальній конфігурації.

Параметри τ_c, τ_s, ν, E в рівняннях стану (19) і (21) визначаються із дослідів на простий розтяг або стиск циліндричних зразків при різній температурі нагріву деталей і швидкості деформації. Діаграми спрочнення, побудовані в координатах σ^i (інтенсивність напруження)- ϑ_c (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з інтенсивністю логарифмічної міри деформації ε_i), які показано в роботі [11], достатньо повно характеризують поведінку матеріалу за границями пружності в процесах, що є близькими для простих і супроводжуються великими пластичними деформаціями.

Виконуючи диференціювання виразу (15), встановлюємо взаємозв'язок між природженнями напружень і природженнями пружних деформацій:

$$d\sigma^{ij} = \left[\mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e + \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \varepsilon_{kl}^e, \quad (22)$$

де, згідно з формулою (14),

$$d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c - \left(d\varepsilon_{kl}^i - \frac{\partial \beta_T}{\partial T} dT \cdot T \cdot g_{kl} \right).$$

Для визначення прирощень деформацій пластичності скористуємося співвідношеннями (18). Оскільки при пластичному деформуванні зображувальна точка залишається на поверхні текучості, то виконується рівність:

$$d f_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial f_p}{\partial T} dT. \quad (23)$$

Часткові похідні в рівнянні (23) по s^{ij} , ϑ_p , T дорівнюють:

$$\frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = s^{ij}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial T} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial T}. \quad (24)$$

Перепишемо співвідношення (23) з урахуванням (24). Оскільки $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$, отримаємо:

$$s_{ij} d\sigma^{ij} - 2\tau_s \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right) = 0. \quad (25)$$

Враховуючи співвідношення (22) і (23), рівняння (25) можна записати у вигляді:

$$s_{ij} \left[\mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \left(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c \right) + s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \cdot \varepsilon_{kl}^e = 2\tau_s \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right).$$

Подамо прирощення пластичних деформацій відповідно до формули (24). Після відповідних перетворень запишемо вираз λ_p для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_p dT}{\gamma^p}, \quad (26)$$

де
$$\gamma_p = 2G s^{kl} s^{kl} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} = 4\tau_s^2 \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right),$$

$$\beta_p = s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e.$$

Аналогічно визначимо величину скалярного модуля λ_c , що дозволяє обчислити прирощення деформацій повзучості:

$$\lambda_c = \frac{2G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_c dT - \rho_c}{\gamma^c}, \quad (27)$$

де
$$\beta_c = s_{ij} \frac{\partial \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right]}{\partial T} \varepsilon_{kl}^e, \quad \gamma_c = 4\sigma_{ic}^2 \left(G + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_c}{\partial \vartheta_p} \right).$$

Після підставлення значень $d\varepsilon_{kl}^c$ та $d\varepsilon_{kl}^p$ через знайдені λ_c і λ_p в рівняння (22) отримаємо:

$$\begin{aligned} d\sigma^{ij} = & \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ & \times d\varepsilon_{kl} - \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - \left(\frac{\beta_c}{\gamma^p} + \frac{\beta_p}{\gamma^c} \right) s^{kl} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e \right\} dT + \\ & + \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \frac{\rho_c}{\gamma^c} s_{kl}. \end{aligned}$$

Позначивши множник попереду dT через Q^{ij} , а третій складник D^{ij} ,

отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4 G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ \times d\varepsilon_{kl} + Q^{ij} dT + D^{ij} = d\sigma_{ij}^* - d\sigma_c^{ij}$$

де $d\sigma_{ij}^*$ – прирощення напружень, що визначаються з урахуванням залежності фізично-механічних параметрів від розвитку деформацій пластичності і повзучості; $d\sigma_c^{ij} = Q^{ij} dT + D^{ij}$ – прирощення напружень, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик при змінній температурі та швидкості деформацій повзучості.

1.3. Вихідні співвідношення континуальної механіки руйнування в умовах повзучості при тривалому статичному навантаженні. Процес накопичення деформацій повзучості супроводжується появою в матеріалі мікроскопічних хаотично орієнтованих дефектів. Для урахування їх впливу на несучу здатність матеріалу в роботах [6,7] було запропоновано використовувати феноменологічний параметр ушкодженості ω , $0 \leq \omega \leq 1$, фізичний зміст якого пов'язується із відношенням площі поперечного перерізу дефектів до загальної площі поперечного перерізу тіла.

Цей підхід, що ґрунтується на використанні моделі безперервно-ушкодженого середовища, є переважним. Методологія розв'язання задач повзучості з використанням феноменологічного параметру ушкодженості стала основою для створення самостійного розділу механіки – континуальної механіки руйнування, що використовується для визначення довговічності елементів конструкцій та встановлює взаємозв'язок між процесом накопичення розсіяних ушкоджень і макроруйнуванням (розвитком тріщин).

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості (21) набуває вигляду:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - \left[\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i, \omega) \right]^2 = 0. \quad (28)$$

Значене рівняння може бути конкретизоване, наприклад, із застосуванням теорії накопичення ушкоджень Ю.М.Работнова [7]:

$$\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (29)$$

або іншими рівняннями, що враховують наявність ушкодженості

матеріалу.

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості вирази вигляду (29) потребують доповнення рівнянням змінення з часом параметра ушкодженості.

При побудові таких рівнянь припускається, що прирощення функції $\omega(t)$ за малий проміжок часу t залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра ушкодженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [2, 4 та ін.]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (30)$$

де $\Phi(\omega, p_j)$ – деяка функція; p_j – вектор навантажень, що характеризує силові, деформаційні, температурні та інші зовнішні впливи.

Узагальненням цих та подібних рівнянь є наведений в роботах [2] вираз:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (31)$$

де C, B, m, q, r, β – константи матеріалу.

Величина σ_e , що входить до кінетичного рівняння ушкодженості є значенням еквівалентного напруження, обчисленого відповідно до обраного критерію міцності [2], наприклад максимального нормального напруження $\sigma_e = \sigma_1$, інтенсивності дотичних напружень $\sigma_e = \sigma_i$, критерію Г.С.Писаренка – О.О.Лебедева:

$$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1. \quad (32)$$

Згідно з роботою [2] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення ушкодженості є

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (33)$$

де $I_1(\sigma_{ij}), I_2(s_{ij})$ – відповідно перший і другий інваріанти тензора σ_{ij} і діватора s_{ij} напружень; α, β, γ – константи матеріалу, $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Конкретизація виразу (33) для практичних розрахунків має вигляд:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_i. \quad (34)$$

Спосіб подання ушкодженості у вигляді скалярної величини є найбільш використовуваним у розрахунковій практиці [6, 7]. Використання скалярного параметра ушкодженості дозволяє проводити чисельні дослідження, використовуючи наявні експериментальні дані про властивості матеріалів.

2. Розрахункові співвідношення МСЕ для геометрично нелінійної вісесиметричної задачі.

2.1. Моментна схема скінчених елементів. Для чисельного моделювання процесів термов'язкопружнопластичного деформування вісесиметричних тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою прямокутник довільної форми (рис. 2.1,а).

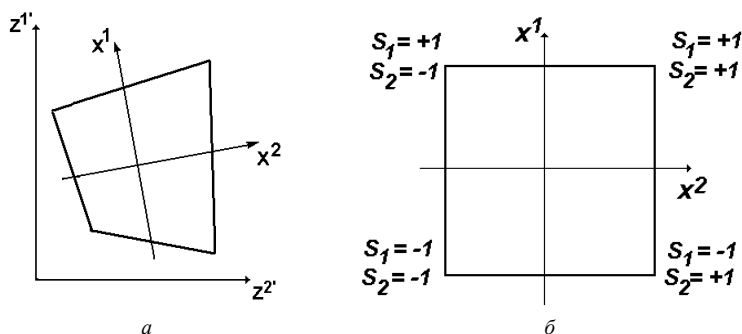


Рис. 2.1. Вісесиметричний СЕ в базисній (а) і місцевій (б) системі координат

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2 (рис.2.1,б). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей C^{ijkl} , коефіцієнт температурного розширення α_T та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0}, \quad (35)$$

Розподіл переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right),$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (36)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}, T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Визначимо переміщення та їх похідні в центрі поперечного перетину СЕ, виходячи з прийнятого закону їх розподілу (36):

$$\overset{\circ}{u}_{i'} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)},$$

$$\overset{\circ}{u}_{i', \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_{\alpha},$$

$$\overset{\circ}{u}_{i', 12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2, \quad (37)$$

Аналогічно, виходячи з (36), визначимо температуру та її похідні в центрі поперечного перетину СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)},$$

$$\overset{\circ}{T}_{, \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}. \quad (38)$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [3, 8] компоненти тензора приросту повних фізичних деформацій для проміжної відрахункової конфігурації у поперечному перетині скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{12}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33, \beta} x^{\beta},$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (39)$$

У випадку лінійного зв'язку між приростом фізичних компонент тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука (15) :

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl},$$

$$\text{де } C_{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (40)$$

Запишемо вираз для компонент приросту тензора напружень через коефіцієнти розкладу приросту деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \\ & + \tilde{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \tilde{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right) \end{aligned}$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} = & \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} = & \tilde{C}^{ij22} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (41)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (42)$$

Відкидаючи з рівняння (42) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо приріст фізичних компонент тензора напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^\alpha, \quad (43)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення приросту напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент приросту фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти приросту тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}, & \tilde{\sigma}^{12} &= \overset{\circ}{g}_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, & \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}, & \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33} &= \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33},\end{aligned}\quad (44)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент приросту фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}, & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, & \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^{\circ} &= \left. \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial(\varepsilon_{\alpha\alpha}/g_{\alpha\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right) \\ \tilde{\varepsilon}_{33,\alpha}^{\circ} &= \left. \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^{\alpha}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial(\varepsilon_{33}/g_{33})}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^{\beta}=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right),\end{aligned}\quad (45)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta(\alpha)}^{\nu'}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0},$$

$$\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta}=0},$$

$$\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} = \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33} \Big|_{x^{\beta}=0}.$$

Запишемо коефіцієнти розкладу приросту деформації (45) через переміщення в базисній системі координат, що за формулою співпадає з

(13). Як буде показано така формула надалі може бути використана і при визначенні нелінійних зв'язках між деформаціями і переміщеннями згідно (12) :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z_{,i}^{\nu'} u_{,j}^{\nu'} + z_{,j}^{\nu'} u_{,i}^{\nu'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left(z^{2'} u_{2'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \\ &= \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left(z^{2'} u_{2'} \right)}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \left(z_{,\alpha}^{2'} u_{2'} + z^{2'} u_{2',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення для значення похідних від переміщень $u_{,i}^{\nu'}$ і компонент тензора перетворень $z_{,i}^{\nu'}$ в центрі СЕ:

$$u_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{,i}^{\nu'}, \quad z_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{\nu'}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\beta}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} \right), & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{z}^{2'} \overset{\circ}{u}_{2'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{(S_1 S_2)}^{\nu'} \left(S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\nu'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\overset{\circ}{z}^{2'} u_{2'(S_1, S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{(S_1 S_2)}^{\nu'} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} + S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3',3(S_1,S_2)} S_{\alpha} + \frac{\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{2}'}{2} u_{2'(S_1,S_2)} + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{2}' u_{2'(S_1,S_2)} S_{\alpha} \right], \quad (47)$$

2.2.Отримання матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій для вісесиметричного СЕ. Опис процесу деформування вісесиметричних тіл обертання здійснюється відповідно до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (48)$$

Запишемо приріст варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (49)$$

Подаючи в останньому виразі компоненти приросту тензора напружень і тензора деформацій через їхні значення у центрі елемента (39) (43) подані відповідно до МССЕ, отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right. \\ & \times \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{12} + \\ & \left. + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{33,\beta} x^{\beta} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (50) \end{aligned}$$

Обчислимо такі інтеграли:

$$\int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} dx^1 dx^2 = 0,$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (51)$$

Виконуючи інтегрування виразу (50) з урахуванням (51) для приросту варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (52)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\alpha} \right) \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}.$$

У матричній формі цей вираз буде мати вигляд:

$$\delta W = \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (53)$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \overset{\circ}{\sigma}^{22} \overset{\circ}{\sigma}^{12} \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \quad (54)$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в проміжній відрахунковій конфігурації (12) можна співвідношеннями аналогічними за формулою з (13) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\bar{z}_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right), \quad \varepsilon_{33} = \bar{z}{}^{2'} u^{2'}. \quad (55)$$

Коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}{}^{v'} = z^{v'} + \frac{1}{2} u^{v'}, \quad \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} = z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'}, \quad (56)$$

Можна показати, що вираз (53) тотожно дорівнює (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\left(z_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) u_{,\beta}{}^{v'} + \left(z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} \right) u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \left(z^{2'} + \frac{1}{2} u^{2'} \right) u^{2'}. \end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій (53) і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = [\bar{B}] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = [\bar{B}_1] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} = [\bar{B}_2] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad (58)$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u^1_{(s_1, s_2)} \\ u^2_{(s_1, s_2)} \end{matrix} \right\}. \quad (59)$$

Для зручності представлення розділимо матриці $[\bar{B}]$, $[\bar{B}_1]$, $[\bar{B}_2]$ на блоки:

$$\left[\overset{\circ}{B} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;+1)} \right]$$

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;+1)} \right] \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}'_{,2} \end{bmatrix}, \\ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 + \overset{\circ}{z}'_{,2} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \end{bmatrix}, \\ \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \left. \frac{\partial \bar{g}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^\beta=0}, \\ \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \left. \frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{v}'_{,\beta(\alpha)}, \\ \overset{\circ}{g}_{33} &= \bar{g}_{33} \Big|_{x^\beta=0}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами

розкладання прирощень деформацій законом Гука (43), матрична форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}, \alpha \right\} = \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\}, \quad (60)$$

де, у відповідності із законом Гука (15),

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{C} 1111 & \overset{\circ}{C} 1122 & \overset{\circ}{C} 1133 & \overset{\circ}{C} 1112 & \overset{\circ}{C} 1113 & \overset{\circ}{C} 1123 \\ \overset{\circ}{C} 2211 & \overset{\circ}{C} 2222 & \overset{\circ}{C} 2233 & \overset{\circ}{C} 2212 & \overset{\circ}{C} 2213 & \overset{\circ}{C} 2223 \\ \overset{\circ}{C} 3311 & \overset{\circ}{C} 3322 & \overset{\circ}{C} 3333 & \overset{\circ}{C} 3312 & \overset{\circ}{C} 3313 & \overset{\circ}{C} 3323 \\ \overset{\circ}{C} 1211 & \overset{\circ}{C} 1222 & \overset{\circ}{C} 1233 & \overset{\circ}{C} 1212 & \overset{\circ}{C} 1213 & \overset{\circ}{C} 1223 \\ \overset{\circ}{C} 1311 & \overset{\circ}{C} 1322 & \overset{\circ}{C} 1333 & \overset{\circ}{C} 1312 & \overset{\circ}{C} 1313 & \overset{\circ}{C} 1323 \\ \overset{\circ}{C} 2311 & \overset{\circ}{C} 2322 & \overset{\circ}{C} 2333 & \overset{\circ}{C} 2312 & \overset{\circ}{C} 2313 & \overset{\circ}{C} 2323 \end{bmatrix},$$

$$\left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C} ij(3-\alpha)(3-\alpha) \right] \left[\overset{\circ}{C} ij33 \right] \right]. \quad (61)$$

Компоненти матриці пружних сталей обчислюються із використанням компонент метричного тензора, що відповідають проміжній відрахунковій конфігурації.

Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (12):

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left(z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2u'_{,\alpha} u'_{,\beta} \right). \quad (62)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (55) :

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left(Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + Z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} \right), \quad (63)$$

$$\text{де} \quad Z'_{,\alpha} = z'_{,\alpha} + u'_{,\alpha}, \quad Z'_{,\beta} = z'_{,\beta} + u'_{,\beta}, \quad (64)$$

При їх підстановці в (63) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left((z'_{,\alpha} + u'_{,\alpha}) \delta u'_{,\beta} + (z'_{,\beta} + u'_{,\beta}) \delta u'_{,\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + u'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}} \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{Z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{Z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \end{bmatrix}, \\
 \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{Z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{H}_{221} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{Z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{H}_{221} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 + \overset{\circ}{Z}'_{,1} + \overset{\circ}{Z}'_{,2} \overset{\circ}{H}_{331} \right) \end{bmatrix}, \\
 \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{Z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{H}_{112} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{Z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{H}_{112} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} + \overset{\circ}{Z}'_{,2} \overset{\circ}{H}_{332} \right) \end{bmatrix} \\
 \overset{\circ}{H}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}}{\overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} = \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0}, \\
 \overset{\circ}{H}_{33, \alpha} &= \frac{\overset{\circ}{G}_{33, \alpha}}{\overset{\circ}{G}_{33}}, \quad \overset{\circ}{G}_{33, \alpha} = \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{G}_{33} = \overset{\circ}{G}_{33} \Big|_{x^\beta=0}, \\
 \overset{\circ}{G}_{(\alpha)\beta, \alpha} &= \overset{\circ}{Z}'_{, \alpha} \overset{\circ}{Z}'_{, \beta} \overset{\circ}{v}'_{, \beta(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Вираз для варіації енергії деформації матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \sum_{l=0}^L \left(\delta \{u_l\}^T \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}} \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \right]^T + \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \right]^T \right) \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, \alpha} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \\
 &= \sum_{l=0}^L \delta \{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}_l
 \end{aligned}$$

$$\text{де} \quad \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}_l = \left[\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left(\left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, 1} \right\} + \left[\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, 2} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (65)$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень:

$$\delta W = \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge, \alpha \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge, \alpha \right\} \right) \right\} \sqrt{g}^{\circ}. \quad (66)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\} = \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right] u_{(s_1, s_2)}$$

$$\left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' \end{bmatrix},$$

$$\left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{221} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{221} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_1 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_{33,1} \right) \end{bmatrix},$$

$$\left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_{33,2} \right) \end{bmatrix},$$

де $\overset{\circ}{h}$, $\overset{\circ}{z}$, $\overset{\circ}{\beta}'$ визначаються згідно формул (45),(8).

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{ u \}_l^T \right) [K]_{ln} \{ u \}_n, \quad (67)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості вісесиметричного СЕ:

$$[K]_{ln} = \left\{ \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} \right) \sqrt{g} \right]. \quad (68)$$

3. Розв'язання тестових прикладів. З метою доведення ефективності використання розроблених розрахункових співвідношень МССЕ для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ, розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглої пластини навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис.3.1).

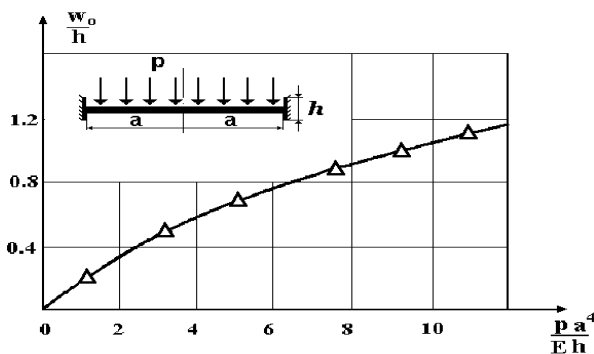


Рис.3.1

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $a=0.2$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E = 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий в роботі [10], що показаний на рис.3.1 суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження. Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, із використанням зображеної на рис.3.1. дискретної моделі, показані на рис.3.1 трикутниками, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

Висновки. Отримані розрахункові співвідношення МСЕ – вирази матриці жорсткості (68) і вектору вузлових реакцій (65) – для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодженості матеріалу вісесиметричних тіл. Розв'язання тестової задачі засвідчило вірогідність отриманих результатів.

1. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та. - 1964. – 483с.
2. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – №3. – С.31–66.
3. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
4. *Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник.* / Под ред.Шестерикова С.А.-М.:Машиностроение,1983.-101 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. - М.: 1966. – 752 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
9. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
10. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука,1966.-456 с.
11. *Тормахов М.Н.* О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений // Рук. деп. ВИНТИ №7899-В. – 13 с.

Надійшло до редакції 22.11.2006 р.